Journal of Baku Engineering University

BMU
BAKI MÜHƏNDİSLİK UNİVERSİTETİ

ISSN 2521-635X

Volume 2
Number 2
2018

MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

Journal is published twice a year
Number-1. June, Number-2. December

An International Journal

http://journal.beu.edu.az

Contact address

Journal of Baku Engineering University
AZ0102, Khirdalan city, Hasan Aliyev str. 120, Absheron, Baku, Azerbaijan
Tel: 00 994 12 - 349 99 95 Fax: 00 994 12 349-99-90/91

e-mail: journal@beu.edu.az
web: http://journal.qu.edu.az
facebook: Journal Of Baku Engineering University

ISSN 2521-635X

ISSN 2521-635X

Journal of Baku Engineering University

MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

Baku - AZERBAIJAN

Journal of Baku Engineering University

MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

2018. Volume 2, Number 2

CONTENTS

JOURNAL OF BAKU ENGINEERING UNIVERSITY- MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
2018. Volume 2, Number 2 *Pages 59-66*

UOT: 517.947

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Г. М. ЭЙВАЗЛЫ
Сумгаитский Государственный Университет
Сумгаит / АЗЕРБАЙДЖАН
aliyeva_gunel193@mail.ru

РЕЗЮМЕ

В данной статье исследуется однозначная разрешимость одной краевой задачи для операторно-дифференциального уравнения четвертого порядка на конечном отрезке в гильбертовом пространстве. Для этой цели сначала исследуется решение краевой задачи для соответствующего однородного уравнения.

Показывается, что при заданных краевых условиях краевая задача для однородного уравнения имеет только тривиальное решение.

Пользуясь методом преобразования Фурье, доказывается однозначная разрешимость заданной краевой задачи для неоднородного операторно-дифференциального уравнения четвертого порядка в гильбертовом пространстве:

Ключевые слова: гильбертово пространство, оператор, операторно-дифферен-циальное уравнение, преобразование Фурье, краевая задача.

HILBERT FƏZASINDA SONLU PARÇADA DÖRDÜNCÜ TƏRTIB OPERATOR-DIFERENSIAL TƏNLIK ÜÇÜN SƏRHƏD MƏSƏLƏSININ BIRQIYMƏTLI HƏLL OLUNMASI

XÜLASƏ

Təqdim edilmiş məqalədə Hilbert fəzasında sonlu parçada dördüncü tərtib operator-diferensial tənlik üçün bir sərhəd məsələsinin birqiymətli həll oluna bilməsi məsələsi öyrənilmişdir. Bu məqsədlə əvvəlcə uyğun bircins tənlik üçün baxılan sərhəd şərtləri daxilində sərhəd məsələsinin həlli araşdırılmışdır. Göstərilmişdir ki, baxılan sərhəd şərtləri daxilində bircins tənliyin yalnız trivial həlli vardır. Furye çevirməsi üsulundan istifadə edərək qeyri-bircins tənlik üçün baxılan sərhəd məsələsinin birqiymətli həll oluna bilməsi isbat edilir.

Açar sözlər: Hilbert fəzası, operator, operator-diferensial tənlik, Furye çevirməsi, sərhəd məsələsi.

ON UNIQUELY SOLVABILITY OF A BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR FOURTH ORDER OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATION IN THE HILBERT SPACE

ABSTRACT

A uniquely solvability problem of a fourth order operator differensial equation in the finite segment in Hilbert space was studied in the introduced paper. For this purpose, at first, a solution was investigated for considered boundary value conditions. It is shown that the homogeneous equation has a trivial solution under considered condition. Using the Fourier transform a uniquely solvability of non-homogeneous equation is proved for considered boundary value problem.

Key words: Hilbert space, operator, operator-differensil equation, Furier transformation, boundary-value problem.

1. Введение. Постановка задачи

Пусть H -сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(x,y)_H$, где $x,y \in H$. Обозначим через $L_2([0,1],H)$ гильбертово пространство всех вектор-функций, определенных на $[0,1]$ со значениями в H, которые имеют норму

$$\| f\|_{L_2([0,1],H)} = \left(\int_0^1 \| f(t)\|_H^2 dt \right)^{1/2}.$$

Пусть A-самосопряжённый положительно-определенный оператор в H с областью определения $D(A)$.

Ясно, что область определения оператора $A^p (p \ge 0)$ является гильбертовым пространством H_p относительно скалярного произведения $(x,y)_{H_p} = = \left(A_x^p, A_y^p\right)_H, x,y \in D\left(A^p\right)$. При $p=0$ же считаем, что $H_0 = H$, $(x,y)_{H_0} = (x,y)_H$, $x,y \in H$.

Определим гильбертово пространство:

$$W_2^4([0,1],H) = \left\{ u(t);\ u_{(t)}^{(4)} \in L_2([0,1];H),\ A^4 u(t) \in L_2([0,1];H) \right\}$$

со скалярным произведением

$$(u,v)_{W_2^{(4)}([0,1];H)} = \int_0^1 \left(u^{(4)}(t), v^{(4)}(t) \right)_H dt + \int_0^1 \left(A^4 u(t),\ A^4 v(t) \right)_H dt$$

и с нормой

$$\|u\|_{W_2^{(4)}([0,1];H)} = \left\{ \left\| u^{(4)}(t) \right\|^2_{L_2[0,1];H)} + \left\| A^4 u(t) \right\|^2_{L_2[0,1];H)} \right\}.$$

Из теоремы о следах следует [1], что если $u(t) \in ([0,1];H)$, то $u_{(0)}^{(k)} \in H_{4-k-\frac{1}{2}}$, $u_{(1)}^{(k)} \in H_{4-k-\frac{1}{2}}$, $k = 1,2,3$. Здесь и в дальнейшем, производная $u^{(k)} \equiv \dfrac{d^j u}{dt^j}$ понимается в смысле теории обобщенных функций.

Рассмотрим краевую задачу:

$$Lu = \frac{d^4 u}{dt^4} + A^4 u = f(t),\ t \in [0,1]. \tag{1}$$

$$u(0) = u(1) = 0,\ u'(0) = u'(1) = 0. \tag{2}$$

Определение 1. Если вектор-функция $u(t) \in W_2^4([0,1];H)$ удовлетворяет уравнению почти-всюду в $[0,1]$, тогда ее будем называть регулярным решением уравнения (1).

Определение 2. Если при любом $f(t) \in L_2([0,1];H)$ существует регулярное решение уравнения (1), для которого краевые условия (2) выполняются в смысле

$$\lim_{t\to+0} \|u(t)\|_{H^{7/2}} = 0,\ \lim_{t\to+0} \|u'(t)\|_{H^{3/2}} = 0,\quad \lim_{t\to1-0} \|u(t)\|_{H^{7/2}} = 0,\quad \lim_{t\to1-0} \|u'(t)\|_{H^{3/2}} = 0,$$

тогда вектор-функция $u(t)$ называется регулярным решением краевой задачи (1)-(2).

Определение 3. Если для всех $f(t) \in L_2([0,1];H)$ краевая задача (1)-(2) имеет регулярное решение и выполняется оценка

$$\|u\|_{W_2^{(4)}([0,1];H)} \le const \cdot \| f\|_{L_2([0,1];H)},$$

тогда краевая задача (1)-(2) называется однозначно разрешимой или регулярно разрешимой.

2. Исследование решение краевой задачи для однородного уравнения

Чтобы изучить однозначную разрешимость задачи (1)-(2), надо показать, что краевая задача

$$\frac{d^4u(t)}{dt^4} + A^4u(t) = 0, \quad t \in [0,1] \tag{3}$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u(1) = u'(1) = 0 \tag{4}$$

имеет только тривиальное решение.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть A самосопряжённый положительно-определенный оператор в пространстве H . Тогда краевая задача (3)-(4) имеет только нулевое тривиальное решение.

Доказательство.Через $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ обозначим корни уравнения $\omega^4 + 1 = 0$,т.е. $\omega_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, $\omega_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$, $\omega_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, $\omega_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$. Как видно $\operatorname{Re}\omega_1 < 0$, $\operatorname{Re}\omega_2 < 0$, $\operatorname{Re}\omega_5 > 0$, $\operatorname{Re}\omega_4 > 0$.

Общим решением уравнения (3) в пространстве $W_2^4([0,1]; H)$ имеет следующий вид:

$$u_0(t) = e^{\omega_1 tA}x_1 + e^{\omega_2 tA}x_2 + e^{\omega_3 (t-1)A}x_3 + e^{\omega_4 (t-1)A}x_4, \quad t \in (0,1).$$

Здесь x_1, x_2, x_3, x_4 неизвестные векторы, которые являются элементами пространства $H_{7/2}$. Мы требуем, чтобы вектор-функция $u_0(t)$ удовлетворяла граничным условиям (4). Тогда для определения векторов x_1, x_2, x_3, x_4 получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + e^{-\omega_3 A}x_3 + e^{-\omega_4 A}x_4 = 0 \\ \omega_1 Ax_1 + \omega_2 Ax_2 + A\omega_3 e^{-\omega_3 A} + \omega_4 Ae^{-\omega_4 A} = 0 \\ e^{\omega_1 A}x_1 + e^{\omega_2 A}x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \omega_1 Ae^{\omega_1 A}x_1 + \omega_2 Ae^{\omega_2 A}x_2 + \omega_3 Ax_3 + \omega Ax_4 = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + e^{-\omega_3 A}x_3 + e^{-\omega_4 A}x_4 = 0 \\ \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 e^{-\omega_3 A}x_3 + \omega_4 e^{-\omega_4 A}x_4 = 0 \\ e^{\omega_1 A}x_1 + e^{\omega_2 A}x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \omega_1 e^{\omega_1 A}x_1 + \omega_2 e^{\omega_2 A}x_2 + \omega_3 x_3 + \omega_4 x_4 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

В пространстве $H_{7/2}^4 = H_{7/2} \times H_{7/2} \times H_{7/2} \times H_{7/2}$ определим следующую операторную матрицу $\Delta(A)$ и вектор $\tilde{X}$:

$$\Delta(A) = \begin{pmatrix} E & E & e^{-\omega_3 A} & e^{-\omega_4 A} \\ \omega_1 E & \omega_2 E & \omega_3 e^{-\omega_3 A} & \omega_4 e^{-\omega_4 A} \\ e^{\omega_1 A} & e^{\omega_2 A} & E & E \\ \omega_1 e^{\omega_1 A} & \omega_2 e^{\omega_2 A} & \omega_3 E & \omega_4 E \end{pmatrix}$$

и

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение (5) можно записать в следующем виде

$$\Delta(A)\widetilde{X} = 0 \tag{5'}$$

Через μ_0 обозначим нижний грань спектра оператора A. В интервале $[\mu_0, \infty)$ рассмотрим матричную функцию $\Delta(\lambda): C^4 \to C^4$:

где

$$\Delta(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & e^{-\omega_3\mu} & e^{-\omega_4\mu} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 e^{-\omega_3\mu} & \omega_4 e^{-\omega_4\mu} \\ e^{\omega_1\mu} & e^{\omega_2\mu} & 1 & 1 \\ \omega_1 e^{\omega_1\mu} & \omega_2 e^{\omega_2\mu} & \omega_3 & \omega_4 \end{pmatrix}.$$

Учитывая условия $\mathrm{Re}(-\omega_3) < 0$, $\mathrm{Re}(-\omega_4) < 0$, $\mathrm{Re}\,\omega_1 < 0$, $\mathrm{Re}\,\omega_3 < 0$ при $\mu \to \infty$ имеем; $e^{-\omega_3\mu} \to 0$, $e^{-\omega_4\mu} \to 0$, $e^{\omega_1\mu} \to 0$, $e^{\omega_2\mu} \to 0$..

Тогда

$$\lim_{\mu\to\infty} \Delta(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \omega_3 & \omega_4 \end{pmatrix} = \Delta(\infty).$$

Отсюда имеем:

$$\det \Delta(\infty) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \omega_3 & \omega_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \omega_3 & \omega_4 \end{vmatrix} = (\omega_2 - \omega_1)(\omega_4 - \omega_3)$$

$$|\det \Delta(\infty)| = 2 > 0.$$

Можно найти такую k_0, что при $|\det \Delta(\mu)| \geq c > 0$.

Теперь покажем, что $\Delta(\mu) \neq 0$ при всех $\mu \in [\mu_0, k_0]$.

Допустим обратное. Предположим, что существует $\widetilde{\mu} \in [\mu_0, k_0]$, такое $\Delta(\widetilde{\mu}) = 0$.

Тогда существует ненулевой вектор $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix}$ такой, что $\Delta(\mu)\widetilde{\xi} = 0$.

Отсюда получается, что функция

$$\eta(t) = e^{\omega_1\widetilde{\mu}t}\xi_1 + e^{\omega_2\widetilde{\mu}t}\xi_2 + e^{\omega_3\widetilde{\mu}(1-t)}\xi_3 + e^{\omega_4\widetilde{\mu}(1-t)}\xi_4 \tag{6}$$

является решением краевой задачи

$$\frac{d^4\eta(t)}{dt^4} + \widetilde{\mu}^4\eta(t) = 0, \quad t \in (0,1) \tag{7}$$

$$\eta(0) = \eta'(0) = 0, \quad \eta(1) = \eta'(1) = 0 \tag{8}$$

Умножая обе стороны уравнения (7) на функции. $\overline{\eta}(t)$ и интегрируя по частям на интервале (0,1) получаем:

$$\left\|\frac{d^2\eta(t)}{dt^2}\right\|_{L_2(0,1)} + \tilde{\mu}^4\|\eta(t)\|^2_{L_2(0,1)} = 0.$$

Отсюда следует, что $\eta(t)$, т.е.

$$e^{\omega_1\tilde{\mu}t}\xi_1 + e^{\omega_2\tilde{\mu}t}\xi_2 + e^{\omega_3\tilde{\mu}(1-t)}\xi_3 + e^{\omega_4\tilde{\mu}(1-t)}\xi_4 = 0. \qquad (9)$$

Так как функции $e^{\omega_1\tilde{\mu}t}$, $e^{\omega_2\tilde{\mu}t}$, $e^{\omega_3\tilde{\mu}(1-t)}$, $e^{\omega_4\tilde{\mu}(1-t)}$ образуют линейно-независимую систему, из равенства (9) следует $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0$. Это противоречит нашему предположению. По предположению $|\xi| \neq 0$. Таким образом получаем, что при $\mu \in [\mu_0, k_0]$ $\Delta(\mu) \neq 0$. Поэтому при всех $\mu \in [\mu_0, +\infty)$ существует оператор $\Delta^{-1}(\mu)$. Так как оператор A является самосопряжённым положительно-определённым оператором, поэтому $\sigma(A) \subset [\mu_0, \infty]$ и существует ограниченный обратный оператор $\Delta^{-1}(A)$ и $\|\Delta^{-1}(A)\| \leq const$. Отсюда следует, что уравнение (5') и следовательно уравнение (5) имеет только тривиальное решение.

Теорема доказана.

3. Исследование решения краевой задачи для неоднородного уравнения

Теорема 2. Пусть A самосопряжённый положительно-определенный оператор в пространстве H. Тогда для любого $f(t) \in L_2([0,1]; H)$ краевая задача (1), (2) имеет единственное решение $u(t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^4((0,1); H)$.

Доказательство. Определим следующую функцию:

$$f_1(t) = \begin{cases} f(t), & t \in (0,1) \\ 0, & R|(0,1), \quad R = (-\infty, \infty). \end{cases}$$

Ясно, что $f_1(t) \in L_2(R; H)$ и $\|f_1(t)\|_{L_2(R;H)} = \|f(t)\|_{L_2([0,1];H)}$. Будем исследовать однозначную разрешимость следующей задачи на всей оси:

$$\frac{d^2v(t)}{dt^4} + A^4v(t) = f_1(t), \ t \in R = (-\infty, \infty). \qquad (10)$$

Применяя преобразование Фурье из (10) получаем

$$v(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\xi^4E + A^4\right)^{-1}\hat{f}_1(\xi)e^{i\xi t}dt, \ t \leftarrow R, \ \xi \in R.$$

Вектор-функция $v(t)$ удовлетворяет уравнению (10) почти всюду на R. Покажем, что $v(t)W_2^4(R; H)$. По теореме Планшереля имеем:

$$\|v\|^2_{W_2^4(R;H)} = \|v^{(4)}\|_{L_2(R;H)} + \|A^4v\|_{L_2(R;H)} = \|\xi^4\hat{v}(\xi)\|^2_{L_2 9R;H)} + \|A^4\hat{v}(\xi)\|^2_{L_2(R;H)}.$$

Здесь $\hat{f}_1(\xi)$ и $\hat{v}(\xi)$ являются преобразованиями Фурье соответственно функций $f_1(t)$ и $v(t)$.

Из уравнения (10) имеем:

$$\xi^4 \cdot \hat{v}(\xi) + A^4\hat{v}(\xi) = \hat{f}_1(\xi), \quad \xi \in R$$

$$\left(\xi^4 E + A^4\right)\hat{v}(\xi) = \hat{f}_1(\xi)$$

Отсюда $\hat{v}(\xi) = \left(\xi^4 E + A^4\right)^{-1} \hat{f}_1(\xi)$

Тогда имеем:

$$\|v\|^2_{W_2^4(R;H)} = \left\|\xi^4\left(\xi^4 E + A^4\right)^{-1} \hat{f}_1(\xi)\right\|_{L_2(R;H)} + \left\|A^4\left(\xi^4 E + A^4\right)^{-1} \hat{f}_1(\xi)\right\|_{L_2(R;H)}. \quad (11)$$

Оценим каждое из слагаемых в правой части равенства (11).

$$\left\|A^4\hat{v}(\xi)\right\|_{L_2(R;H)} = \left\|A^4\left(\xi^4 E + A^4\right)^{-1} f_1^{-1}(\xi)\right\|_{L_2 9R;H)} \le \sup_{\xi}\left\|A^4\left(\xi^4 E + A^4\right)^{-1}\right\| \cdot \left\|\hat{f}_1(\xi)\right\|_{L_2(R;H)}.$$

Пользуясь спектральным разложением оператора A, имеем:

$$\left\|A^4\left(\xi^4 E + A^4\right)^{-1}\right\| = \sup_{\lambda\in\sigma(A)}\left|\lambda^4\left(\xi^4 + \lambda^4\right)^{-1}\right| \le 1.$$

Тогда

$$\left\|A^4\hat{v}(\xi)\right\|_{L_1(R;H)} \le \left\|\hat{f}_1(\xi)\right\|_{L_2(R;H)} = \left\|f_1(\xi)\right\|_{L_2 9R;H)} = \left\|f_1\right\|_{L_2([0,1];H)}.$$

Отсюда

$$\left\|A^4 v\right\|_{L_2(R;H)} = \left\|A^4\hat{v}(\xi)\right\|_{L_2(R;H)} \le \left\|f_1\right\|_{L_2([0,1];H)}$$

т.е. $A^4 v \in L_2(R;H)$.

Аналогично оцениваем $\left\|v^{(4)}\right\|_{L_2(R;H)} = \left\|\xi^4 v(\xi)\right\|_{L_2(R;H)}$.

$$\left\|\xi^4\hat{v}(\xi)\right\|_{L_2(R;H)} = \left\|\xi^4\left(\xi^4 E + A^4\right)^{-1} \hat{f}_1(\xi)\right\|_{L_2 9R;H)} \le \sup_{\xi\in R}\left\|\xi^4\left(\xi^4 E + A^4\right)^{-1}\right\| \cdot \left\|\hat{f}_1(\xi)\right\|_{L_2(R;H)}.$$

Так как

$$\left\|\xi^4\left(\xi^4 E + A\right)^{-1}\right\| = \sup_{\lambda\in\sigma(A)}\left|\xi^4\left(\xi^3 + \lambda^4\right)^{-1}\right| \le 1$$

имеем:

$$\left\|\xi^4\hat{v}(\xi)\right\|_{L_2(R;H)} \le \left\|\hat{f}_1(\xi)\right\|_{L_2(R;H)} = \left\|f_1(\xi)\right\|_{L_2(R;H)} = \left\|f_1\right\|_{L_2((0,1);H)}.$$

Окончательно получаем:

$$\|v\|^2_{W_2^4(R;H)} \le 2\|f\|_{L_2([0,1];H)},$$

т.е. $v(t) \in W_2^4(R;H)$.

Рассмотрим функцию

$$\alpha(t) = \begin{cases} v(t), & t \in [0,1] \\ 0, & R|[0,1]. \end{cases}$$

Из того, что $v(t)\in W_2^4(R;H)$ следует, что $\alpha(t)\in W_2^4([0,1];H)$. Функция $\alpha(t)$ является почти всюду решением уравнения

$$\frac{d^4v}{dt^4}+A^4v=f(t),\ t\in[0,1].$$

Так как $\alpha(t)\in W_2^4([0,1];H)$, тогда из теоремы о следах получаем, что

$$\alpha^{(k)}(0)\in H_{4-k-\frac{1}{2}},\ \alpha^{(k)}(1)\in H_{4-k-\frac{1}{2}},$$

и

$$\left\|\alpha^{(k)}(0)\right\|_{4-k-\frac{1}{2}}\le C(k)\|u\|_{W_2^4([0,1];H)}.$$

А также

$$\left\|\alpha^{(k)}(1)\right\|_{4-k-\frac{1}{2}}\le C_1(k)\|u\|_{W_2^4([0,1];H)},\ k=\overline{0,3}.$$

Покажем, что решение задачи (1)-(2) представляется в виде

$$u(t)=\alpha(t)+e^{\omega_1 tA}x_1+e^{\omega_2 tA}x_2+e^{\omega_3(t-1)A}x_3+e^{\omega_4(t-1)A},\tag{12}$$

где $x_1,x_2,x_3,x_4\in H_{7/2}$ неизвестные векторы.

Пользуясь краевыми условиями $u(0)=0_1u^1(0)=0,\ u(1)=0,\ u^1(1)=0$, для определения неизвестных векторов x_1,x_2,x_3,x_4 получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}x_1+x_2+e^{-\omega_3A}x_3+e^{-\omega_4A}x_4=-\alpha(0)\\ \omega_1x_1+\omega_2x_2+\omega_3e^{-\omega_3A}x_3+\omega_1e^{-\omega_3A}x_4=-\overline{A}^1\alpha^1(0)\\ e^{\omega_1A}x_1+e^{\omega_2A}x_2+x_3+x_4=-\alpha(1)\\ \omega_1e^{\omega_1A}x_1+\omega_2e^{\omega_2A}x_2+\omega_4x_4=-A^{-1}\alpha^1(1).\end{cases}\tag{13}$$

Так как $-\alpha(0),\ -A^{-1}\alpha^1(0),\ -\alpha(1),\ -A^{-1}\alpha^1(1)$ являются элементами пространства $H_{7/2}$, тогда систему уравнений (13) можем представить в виде матричного уравнения

$$\Delta(A)\hat{X}=\hat{\alpha},\tag{14}$$

здесь

$$\hat{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix},\quad \hat{\alpha}=\begin{pmatrix}-\alpha(0)\\-A^{-1}\alpha^1(0)\\-\alpha(1)\\-A^{-1}\alpha^1(1)\end{pmatrix}\quad\text{и}\quad \Delta(A)=\begin{pmatrix}E & E & e^{-\omega_3A} & e^{-\omega_4A}\\ \omega_1E & \omega_2E & \omega_3e^{-\omega_3A} & \omega_4e^{-\omega_4A}\\ e^{\omega_1A} & e^{\omega_2A} & E & E\\ \omega_1e^{\omega_1A} & \omega_2e^{\omega_2A} & \omega_3E & \omega_4E\end{pmatrix}$$

Выше мы показали, что оператор $\Delta(A):H_{7/}\to H_{7/2}$ имеет ограниченную обратную. Поэтому векторы $x_1,x_2,x_3,x_4\in H_{7/2}$ определяются однозначно и решение задачи (1), (2) представляется в виде (12). Теорема 2 доказана.

4. Доказательство основной теоремы

Пользуясь теоремой 1 и теоремой 2, доказывается следующая теорема об однозначной разрешимости задачи (1), (2).

Теорема 3. Пусть оператор A является самосопряженным положительно-определённым оператором в пространстве H. Тогда краевая задача однозначно разрешима в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^4([0,1];H)$.

Доказательство. В пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^4([0,1];H)$ определим оператор:

$$L_0 u = \frac{d^4 u}{dt^4} = A^4 u .$$

Из теоремы 1 следует, что $KerL_0 = \{0\}$, а из теоремы вытекает, что $JmL_0 = L_2([0,1];H)$.

Таким образом, оператор L_0 взаимно однозначно действует из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^4([0,1];H)$ в пространство $L_2([0,1];H)$.

Теперь же покажем ограниченность оператор L_0. Для любого $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^4([0,1];H)$ имеем:

$$\|L_0 u\|^2_{L_2([0,1];H)} = \left\|\frac{d^4 u}{dt^4} + A^4 u\right\|_{L_2([0,1];H)} \le 2\left(\left\|\frac{d^2 u}{dt}\right\|^2_{L_2([0,1];H)} + \|A^4 u\|^2_{L_2([0,1];H)}\right) = 2\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^4([0,1];H)} .$$

Итак, мы получаем, что оператор L_0 ограничен и взаимно однозначно действует из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^4([0,1];H)$ в пространство $L_2([0,1];H)$.

Далее, применяя теорему Банаха об обратном операторе, завершаем доказательство теоремы, то есть оператор L_0 осуществляет изоморфизм пространств $\overset{\circ}{W}{}_2^4([0,1];H)$ и $L_2([0,1];H)$:

$$\|L_0^{-1} f\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^4([0,1];H)} \le c\|f\|_{L_2([0,1];H)},$$

или $\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^4([0,1];H)} \le c\|f\|_{L_2([0,1];H)}$.

Отсюда получаем взаимно-однозначную разрешимость краевой задачи (1), (2). Теорема доказана.

В заключении выражаю глубокую благодарность научному руководителю профессору Г.И. Асланову за постановку задачи и постоянное внимание.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения, Москва, Мир, 1971, 371 стр.
2. Агаева Г.А. О разрешимости одной краевой задачи для операторно-дифференциальных уравнений второго порядка на конченом отрезке. Известия Педагогического Университета, раздел естесвенных наук, 2013, № 3, с. 26-30.
3. Agaeva G.A. On the exists and uniqueness of the generalized solution of a boundary value problem for second order operator-differential equation. Transaction of NAS of Azerbaijan, 2014, v. 34, № 4, p. 3-8.
4. SalimovM.Yu. On conditions of correct solvability of the boundary value problem of the second order operator-differential equation on finite segment. Proceedings of IMM of NAS Azerbaijan, 2009, v. 14 (22), p. 84-89.
5. Zamanov H.I. On the solvability one boundary value problem of fourth order operator-differential equation. Journal of Gafgaz University, Mathematics and computer science, 2014, v. 2, № 1, p. 181-192.
6. Zamanov H.I. Solvability of one class boundary value problem in Hilbert space, Journal of Gafgaz University, Mathematics and computer science, 2016, v. 4, № 1, p. 109-113.

2018. Volume 2, Number 2 Pages 67-77

УДК 517.977.56

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ С НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

К.Б. МАНСИМОВ, М.М. НАСИЯТИ

Институт Систем Управления НАН Азербайджана

Бакинский Государственный Университет

kamilbmansimov@gmail.com,nasiyati_m@mail.ru

АННОТАЦИЯ

Изучается одна дискретная двухпараметрическая задача оптимального управления с негладким критерием качества. При различных предположениях на данные задачи установлены ряд необходимых условий оптимальности.

Ключевые слова: разностный аналог системы Гурса-Дарбу, необходимое условие оптимальности, специальное приращение критерия качества, выпуклая область управления, производная по направлению.

NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS IN ONE DISCRETE CONTROL PROBLEM WITH UNDIFFERENTABLE QUALITY CRITERION

ABSTRACT

We study one two-parameter discrete optimal control problem with a nonsmooth quality criterion. Under various assumptions on these problems, a number of necessary optimality conditions are established.

Keywords: difference analogue of the Goursat-Darboux system, necessary optimality condition, special increment of the quality criterion, convex control domain, directional derivative.

DİFERENSİALLANMAYAN KEYFİYYƏT MEYARLI BİR DİSKRET İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ OPTİMALLIQ ŞƏRTLƏRİ

XÜLASƏ

Məqalədə qeyri hamar keyfiyyət meyarlı diskret iki parametrli bir optimal idarəetmə məsələsi öyrənilir. Müxtəlif şərtlər daxilində optimallıq üçün bir sıra zəruri şərtlər isbat olunmuşdur.

1. **Введение.** Многие управляемые процессы являются многоэтапными и описываютсразличными дифференциальными и разностными уравнениями (см.напр.[1-12]). Встатье рассматривается одна многоэтапная задача оптимального управления описываемая дискретными двухпараметрическиси системами.При различных условиях гладеости на данные задачи установлены ряд необходимых условий оптимальности.

2. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$S(u_1,u_2)=\Phi_1(z_1(t_1,X))+\Phi_2(z_2(t_2,X)), \tag{2.1}$$

при ограничениях

$$u_i(t,x)\in U_i\subset R^r,\ (t,x)\in D_i,\ i=1,2, \tag{2.2}$$

$$\left(D_i=\{(t,x):\ t=t_{i-1},t_{i-1}+1,t_{i-1}+2,\dots,t_i-1,\ \ x=x_0,x_0+1,\dots,X-1\}\right),$$

$$z_i(t+1,\ x+1)=f_i(t,x,z_i(t,x),z_i(t+1,x),z_i(t,x+1),u_i(t,x)), \tag{2.3}$$

$$(t,x)\in D_i=\{(t,x):\ t=t_{i-1},t_{i-1}+1,t_{i-1}+2,\dots,t_i-1,\ \ x=x_0,x_0+1,\dots,X-1\},\ i=1,2,$$

$$z_1(t_0,x)=\alpha(x), \quad x=x_0,x_0+1,\dots,X,$$
$$z_1(t,x_0)=\beta_1(t), \quad t=t_0,t_0+1,\dots,t_1, \ \alpha(x_0)=\beta_1(t_0), \tag{2.4}$$
$$z_2(t_1,x)=G(z_1(t_1,x)), \quad x=x_0,x_0+1,\dots,X,$$
$$z_2(t,x_0)=\beta_2(t), \quad t=t_1,t_1+1,\dots,t_2, \ G(z_1(t_1,x_0))=\beta_2(t_1).$$

Здесь $f_i(t,x,z_i,a_i,b_i,u_i)$, $i=1,2$ -заданные соответственно n_i, $i=1,2$ мерные вектор-функции непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по (z_i,a_i,b_i), $i=1,2$ соответственно, $\alpha(x)$, $\beta_i(t)$, $i=1,2$-заданные дискретные вектор-функции соответствующих размерностей, $G(z_1)$-заданная n_2-мерная непрерывно дифференцируемая вектор-функция, U_i, $i=1,2$-заданные непустые и ограниченные множества, $u_i(t,x)$, $i=1,2$-r_i-мерные соответственно вектор-функции управляющих воздействий, t_0, t_1, t_2, x_0, X – заданы, $\Phi_i(z_i)$, $i=1,2$-заданные скалярные функции удовлетворяющие условию Липшица и имеющие производные по любому направлению.

Пару $u(t,x)=(u_1(t,x), u_2(t,x))$, удовлетворяющую вышеприведенным ограничениям, назовем допустимым управлением, решение $z(t,x)=(z_1(t,x), z_2(t,x))$ задачи (3)-(4), соответствующее этому допустимому управлению – допустимым состоянием, а соответствующий процесс $(u(t,x), z(t,x))=(u_1(t,x), u_2(t,x), z_1(t,x), z_2(t,x))$ – допустимым процессом.

Допустимое управление $u(t,x)=(u_1(t,x), u_2(t,x))$, доставляющий минимум функционалу (2.1) при ограничениях (2.2)-(2.4), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u(t,x), z(t,x))$, $(u_1(t,x), u_2(t,x), z_1(t,x), z_2(t,x))$ – оптимальным процессом.

Как видно между $z_1(t,x)$ и $z_2(t,x)$ имеется связь вида

$$z_2(t_1,x)=G(z_1(t_1,x)).$$

Такие задачи оптимального управления называют многоэтапнымиступенчатыми или же составными задачами оптимального управления (см. напр. [1-12]).Мы изучаем случай негладкого функционала[13,14] в многоэтапной задаче управления.

3. Вспомогательные факты. Пусть $(u_1(t,x), u_2(t,x), z_1(t,x), z_2(t,x))$ – фиксированный допустимый процесс. Введем обозначения

$$\Delta_{v_i(t,x)} f_i[t,\ x]= f_i(t,x,z_i(t,x),z_i(t+1,x),z_i(t,x+1),v_i(t,x))- f_i(t,x,z_i(t,x),z_i(t+1,x),z_i(t,x+1),u_i(t,x)),$$

$$\frac{\partial f_i[t,\ x]}{\partial z_i}=\frac{\partial f_i(t,x,z_i(t,x),z_i(t+1,x),z_i(t,x+1),u_i(t,x))}{\partial z_i},$$

$$\frac{\partial f_i[t,\ x]}{\partial a_i}=\frac{\partial f_i(t,x,z_i(t,x),z_i(t+1,x),z_i(t,x+1),u_i(t,x))}{\partial a_i},$$

$$\frac{\partial f_i[t,\ x]}{\partial b_i}=\frac{\partial f_i(t,x,z_i(t,x),z_i(t+1,x),z_i(t,x+1),u_i(t,x))}{\partial b_i},$$

где $v_i(t,x)$, $i=1,2$ – произвольные допустимые управляющие функции.

В дальнейшем штрих (`) будет означать операцию транспонирования.

Пусть множества

$$f_i\left(t,x,z_i(t,x),z_i(t+1,x),z_i(t,x+1),U_i\right)= \quad (3.1)$$

$$=\left\{\gamma_i,\ \gamma_i=f_i\left(t,x,z_i(t,x),z_i(t+1,x),z_i(t,x+1),v_i(t,x)\right),\ v_i(t,x)\in U_i,\ (t,x)\in D_i\right\},\ i=1,2$$

выпуклы.

Через $u_i(t,x;\varepsilon)$, $i=1,2$ обозначим произвольные допустимые управляющие функции, такие что

$$\begin{aligned} z_i(t+1,x+1;\varepsilon)&=f_i\left(t,x,z_i(t,x;\varepsilon),z_i(t+1,x;\varepsilon),z_i(t,x+1;\varepsilon),u_i(t,x;\varepsilon)\right)\equiv\\ &\equiv(1-\varepsilon)f_i\left(t,x,z_i(t,x;\varepsilon),z_i(t+1,x;\varepsilon),z_i(t,x+1;\varepsilon),u_i^0(t,x)\right)+\\ &+\varepsilon f_i\left(t,x,z_i(t,x;\varepsilon),z_i(t+1,x;\varepsilon),z_i(t,x+1;\varepsilon),v_i(t,x;\varepsilon)\right),\quad (t,x)\in D_i,\ i=1,2, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$z_1(t_0,x;\varepsilon)=\alpha(x),\quad x=x_0,x_0+1,\dots,X,\ z_1(t,x_0;\varepsilon)=\beta_1(t),\quad t=t_0,t_0+1,\dots,t_1 \quad (3.3)$$

$$z_2(t_1,x;\varepsilon)=G\left(z_1(t_1,x;\varepsilon)\right),\quad x=x_0,x_0+1,\dots,X,\ z_2(t,x_0;\varepsilon)=\beta_2(t),\quad t=t_1,t_1+1,\dots,t_2.$$

Положим по определению

$$y_i(t,x)=\left.\frac{\partial z_i(t,x;\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0},\ i=1,2. \quad (3.4)$$

Из (3.2)-(3.3) получаем, что вектор-функции $y_i(t,x)$ и $V_i(t,x)$, $i=1,2$ являются решениями, соответственно следующих задач

$$y_i(t+1,x+1)=\frac{\partial f_i(t,x)}{\partial z_i}y_i(t,x)+\frac{\partial f_i(t,x)}{\partial a_i}y_i(t+1,x)+\frac{\partial f_i(t,x)}{\partial b_i}y_i(t,x+1)+\Delta_{v_i(t,x)}f_i(t,x), \quad (3.5)$$

$$y_1(t_0,x)=0,\quad x=x_0,x_0+1,\dots,X,\ y_1(t,x_0)=0,\quad t=t_0,t_0+1,\dots,t_1, \quad (3.6)$$

$$y_2(t_1,x)=G_z\left(z(t_1,x)\right)y_1(t_1,x),\quad x=x_0,x_0+1,\dots,X,\ y_2(t,x_0)=0,\quad t=t_1,t_1+1,\dots,t_2.$$

Следовательно, из (3.4) следует, что

$$z_i(t,x;\varepsilon)=z_i(t,x)+\varepsilon y_i(t,x)+o(\varepsilon),\ i=1,2. \quad (3.7)$$

4. Необходимое условие оптимальности. Вычислим приращение функционала (2.1), соответствующее допустимым управлениям $u(t,x;\varepsilon)$, $u(t,x)$, $i=1,2$.

$$\begin{aligned} &S\left(u_1(t,x;\varepsilon),u_2(t,x;\varepsilon)\right)-S\left(u_1(t,x),u_2(t,x)\right)=\left[\Phi_1\left(z_1(t_1,X;\varepsilon)\right)-\Phi_1\left(z_1(t_1,X)\right)\right]+\\ &\quad+\left[\Phi_2\left(z_2(t_2,X;\varepsilon)\right)-\Phi_2\left(z_2(t_2,X)\right)\right]=\left[\Phi_1\left(z_1(t_1,X)+\varepsilon y_1(t_1,X)+o(\varepsilon)\right)-\right.\\ &\quad\left.-\Phi_1\left(z_1(t_1,X)\right)\right]+\left[\Phi_2\left(z_2(t_2,X)+\varepsilon y_2(t_2,X)+o(\varepsilon)\right)-\Phi_2\left(z_2(t_2,X)\right)\right]=\\ &=\left[\Phi_1\left(z_1(t_1,X)+\varepsilon y_1(t_1,X)\right)-\Phi_1\left(z_1(t_1,X)\right)\right]+\left[\Phi_2\left(z_2(t_2,X)+\varepsilon y_2(t_2,X)\right)-\right.\\ &\quad\left.-\Phi_2\left(z_2(t_2,X)\right)\right]+\left[\Phi_1\left(z_1(t_1,X;\varepsilon)\right)-\Phi_1\left(z_1(t_1,X)+\varepsilon y_1(t_1,X)\right)\right]+\\ &\quad+\left[\Phi_2\left(z_2(t_2,X;\varepsilon)\right)-\Phi_2\left(z_2(t_2,X)+\varepsilon y_2(t_2,X)\right)\right]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

По предположению функции $\Phi_i(z_i)$, $i=1,2$ удовлетворяют условию *Липщица*. Это означает, что

$$\left|\Phi_i\left(z_i(t_i,X;\varepsilon)\right)-\Phi_i\left(z_i(t_i,X)+\varepsilon y_i(t_i,X)\right)\right|\le\tilde{o}(\varepsilon),\ i=1,2.$$

Поэтому в силу того, что функции $\Phi_i(z_i)$, $i=1,2$ имеют производные по любому направлению из (4.1) имеем

$$S(u_1(t,x;\varepsilon),u_2(t,x;\varepsilon))-S(u_1(t,x),u_2(t,x))=\varepsilon\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\Phi_i(z_i(t_i,X))}{\partial y_i(t_i,X)}+o(\varepsilon)\cdot \tag{4.2}$$

Если предположить, что допустимое управление $u(t,x)=(u_1(t,x),u_2(t,x))$ оптимальное, то из разложения (4.2), в силу произвольности $\varepsilon\in[0,1]$, следует, что

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\Phi_i(z_i(t_i,X))}{\partial y_i(t_i,X)}\geq 0\cdot \tag{4.3}$$

Неравенство (4.3) является довольно общим необходимым условием оптимальности. Конкретизируем полученный результат.

Как видно, уравнение в вариациях (3.5)-(3.6) является линейным неоднородным разностным уравнением. Поэтому на основе формулы о представлении решений подобных уравнений (см. напр. [14]) получим:

$$y_1(t,x)=\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_1(t,x;\tau,s)\Delta_{v_1(\tau,s)}f_1[\tau,s], \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}y_2(t,x)=&\sum_{\tau=t_1}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_2(t,x;\tau,s)\Delta_{v_2(\tau,s)}f_2[\tau,s]+R_2(t,x;t_1-1,x-1)y_2(t_1,x)+\\&+\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[R_2(t,x;t_1-1,s-1)-R_2(t,x;t_1-1,s)\frac{\partial f_2[t_1-1,s]}{\partial a_2}\right]y_2(t_1,s).\end{aligned} \tag{4.5}$$

Здесь $(n_i\times n_i)$-мерные матричные функции $R_i(t,x;\tau,s)$, $i=1,2$ являются соответственно решениями следующих задач:

$$\begin{aligned}R_i(t,x;\tau-1,s-1)=&R_i(t,x;\tau,s)\frac{\partial f_i[\tau,s]}{\partial z_i}+R_i(t,x;\tau-1,s)\frac{\partial f_i[\tau-1,s]}{\partial a_i}+\\&+R_i(t,x;\tau,s-1)\frac{\partial f_i[\tau,s-1]}{\partial b_i},\quad i=1,2,\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$R_i(t,x;\tau-1,x-1)=R_i(t,x;\tau,x-1)\frac{\partial f_i[\tau,x-1]}{\partial b_i},\ i=1,2,$$

$$R_i(t,x;t-1,s-1)=R_i(t,x;t-1,s)\frac{\partial f_i[t-1,s]}{\partial a_i},\ i=1,2, \tag{4.7}$$

$$R_i(t,x;t-1,x-1)=E_i,\ i=1,2,$$

(E_i, $i=1,2$ $(n_i\times n_i)$ - мерные единичные матрицы).

Учитывая (3.6) соотношение (4.5) записывается в виде

$$\begin{aligned}y_2(t,x)=&R_2(t,x;t_1-1,x-1)\frac{\partial G(z_1(t_1,x))}{\partial z_1}y_1(t_1,x)+\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[R_2(t,x;t_1-1,s-1)-R_2(t,x;t_1-1,s)\frac{\partial f_2[t_1-1,s]}{\partial a_2}\right]\frac{\partial G(z_1(t_1,s))}{\partial z_1}y_1(t_1,s)+\\&+\sum_{\tau=t_1}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_2(t,x;\tau,s)\Delta_{v_2(\tau,s)}f_2[\tau,s].\end{aligned} \tag{4.8}$$

Займемся дальнейшим преобразованием представления (4.8).

Принимая во внимание (4.4), из (4.8) получим

$$y_2(t,x)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_2(t,x;t_1-1,x-1)\frac{\partial G(z_1(t_1,x))}{\partial z_1}R_1(t_1,x;\tau,s)\Delta_{v_1(\tau,s)}f_1[\tau,s]+$$

$$+\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[R_2(t,x;t_1-1,s-1)-R_2(t,x;t_1-1,s)\frac{\partial f_2[t_1-1,s]}{\partial a_2}\right]\frac{\partial G(z_1(t_1,s))}{\partial z_1}\times$$

$$\times\left[\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{\beta=x_0}^{x-1}R_2(t_1,s;\tau,\beta)\Delta_{v_1(\tau,\beta)}f_1[\tau,\beta]\right]+\sum_{\tau=t_1}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_2(t,x;\tau,s)\Delta_{v_2(\tau,s)}f_2[\tau,s]. \tag{4.9}$$

Далее, на основе соотношения из [15, стр. 102-107] получаем, что

$$\sum_{s=x_0}^{x-1}\sum_{\beta=x_0}^{s-1}\left[R_2(t,x;t_1-1,s-1)-R_2(t,x;t_1-1,s)\frac{\partial f_2[t_1-1,s]}{\partial a_2}\right]\frac{\partial G(z_1(t_1,s))}{\partial z_1}\times$$

$$\times R_2(t,x;\tau,\beta)\Delta_{v_1(\tau,\beta)}f_1[\tau,\beta]= \tag{4.10}$$

$$=\sum_{s=x_0}^{x-1}\sum_{\beta=s+1}^{x-1}\left[R_2(t,x;t_1-1,\beta-1)-R_2(t,x;t_1-1,\beta)\frac{\partial f_2[t_1-1,\beta]}{\partial a_2}\right]\times$$

$$\times\frac{\partial G(z_1(t_1,\beta))}{\partial z_1}R_1(t_1,\beta;\tau,s)\Delta_{v_1(\tau,s)}f_1[\tau,s].$$

Поэтому, полагая

$$Q_1(t,x;\tau,s)=R_2(t,x;t_1-1,x-1)\frac{\partial G(z_1(t_1,x))}{\partial z_1}R_1(t_1,x;\tau,s)+ \tag{4.11}$$

$$+\sum_{\beta=s+1}^{x-1}\left[R_2(t,x;t_1-1,\beta-1)-R_2(t,x;t_1-1,\beta)\frac{\partial f_2(t_1-1,\beta)}{\partial a_2}\right]\frac{\partial G(z_1(t_1,\beta))}{\partial z_1}R_1(t_1,\beta;\tau,s)$$

представление (4.9) записывается в виде

$$y_2(t,x)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}Q_1(t,x;\tau,s)\Delta_{v_1(\tau,s)}f_1[\tau,s]+\sum_{\tau=t_1}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_2(t,x;\tau,s)\Delta_{v_2(\tau,s)}f_2[\tau,s]. \tag{4.12}$$

Предположим, что $v_2(t,x)\equiv u_2(t,x)$, $(t,x)\in D_2$. В этом случае представление (4.12) принимает вид:

$$y_2(t,x)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}Q_1(t,x;\tau,s)\Delta_{v_1(\tau,s)}f_1[\tau,s]. \tag{4.13}$$

Если предположить, что $v_1(t,x)\equiv u_1(t,x)$, $(t,x)\in D_1$, то из представлений (4.4), (4.12) соответственно получим, что

$$y_1(t,x)\equiv 0,\ (t,x)\in D_1,\ y_2(t,x)=\sum_{\tau=t_1}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_2(t,x;\tau,s)\Delta_{v_2(\tau,s)}f_2[\tau,s]. \tag{4.14}$$

Положим

$$\ell_1(v_1)=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}R_1(t_1,X;t,x)\Delta_{v_1(t,x)}f_1[t,x], \tag{4.15}$$

$$\ell_2(v_1)=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}Q_1(t_2,X;t,x)\Delta_{v_1(t,x)}f_1[t,x], \tag{4.16}$$

$$\ell_3(v_2)=\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}R_2(t_2,X;t,x)\Delta_{v_2(t,x)}f_2[t,x]\,. \quad (4.17)$$

Принимая во внимание (4.4), (4.12)-(4.18) в (4.3) приходим к следующему утверждению

Теорема 4.1. Если множества (3.1) выпуклы, то для оптимальности допустимого управления $(u_1(t,x), u_2(t,x))$ в задаче (2.1)-(2.4) необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$1)\ \frac{\partial\Phi_1(z_1(t_1,X))}{\partial\ell_1(v_1)}+\frac{\partial\Phi_2(z_2(t_2,X))}{\partial\ell_2(v_1)}\ge 0, \quad (4.18)$$

для всех $v_1(t,x)\in U_1$, $(t,x)\in D_1$,

$$2)\ \frac{\partial\Phi_2(z_2(t_2,X))}{\partial\ell_3(v_2)}\ge 0, \quad (4.19)$$

для всех $v_2(t,x)\in U_2$, $(t,x)\in D_2$.

Доказанная теорема является достаточно общей теоремой. Из нее можно получить в частности аналог дискретного принципа максимума для рассматриваемой задачи.

5. Случай выпуклой области управления. Предположим, что в задаче (2.1)-(2.4) множества U_i, $i=1,2$ выпуклы, а вектор функции $f_i(t,x,z_i,a_i,b_i,u_i)$, $i=1,2$ непрерывно дифференцируемы по (z_i,a_i,b_i,u_i), $i=1,2$ соответственно.

Рассмотрим возмущенную систему

$$\begin{aligned} &z_i(t+1,x+1;\varepsilon)\equiv f_i(t,x,z_i(t,x;\varepsilon),z_i(t+1,x;\varepsilon),z_i(t,x+1;\varepsilon),u_i(t,x;\varepsilon))\equiv \\ &\equiv f_i(t,x,z_i(t,x;\varepsilon),z_i(t+1,x;\varepsilon),z_i(t,x+1;\varepsilon),\varepsilon v_i(t,x)+(1-\varepsilon)u_i(t,x)),\ i=1,2, \end{aligned} \quad (5.1)$$

с краевыми условиями

$$z_1(t_0,x;\ \varepsilon)=\alpha(x),\ \ x=x_0,x_0+1,\ldots,X,\ \ z_1(t,x_0;\ \varepsilon)=\beta_1(t),\ \ t=t_0,t_0+1,\ldots,t_1, \quad (5.2)$$

$$z_2(t_1,x;\ \varepsilon)=G(z_1(t_1,x;\ \varepsilon)),\quad x=x_0,x_0+1,\ldots,X,\ \ z_2(t,x_0;\ \varepsilon)=\beta_2(t),\quad t=t_1,t_1+1,\ldots,t_2,$$

где $\varepsilon\in[0,1]$ произвольное число, а $v_i(t,x)\in U_i$, $(t,x)\in D_i$, $i=1,2$ произвольные допустимые управляющие функции.

Положим

$$q_i(t,x)=\frac{\partial z_i(t,x;\varepsilon)}{\partial\varepsilon},\ i=1,2. \quad (5.3)$$

Из краевой задачи (5.1)-(5.2) следует, что $q_i(t,x)$, $i=1,2$, определяемые формулами (5.3), являются решениями следующих задач:

$$\begin{aligned} q_i(t+1,x+1)=&\frac{\partial f_i[t,x]}{\partial z_i}q_i(t,x)+\frac{\partial f_i[t,x]}{\partial a_i}q_i(t+1,x)+\frac{\partial f_i[t,x]}{\partial b_i}q_i(t,x+1)+ \\ &+\frac{\partial f_i[t,x]}{\partial u_i}(v_i(t,x)-u_i(t,x)),\quad i=1,2, \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$q_1(t_0,x)=0, \quad x=x_0,x_0+1,\dots,X\,, q_1(t,x_0)=0, \quad t=t_0,t_0+1,\dots,t_1, \tag{5.5}$$

$$q_2(t_1,x)=G_{z_1}(z_1(t_1,x))q_1(t_1,x), \quad x=x_0,x_0+1,\dots,X,$$

$$q_2(t,x_0)=0, \quad t=t_1,t_1+1,\dots,t_2\,.$$

Перейдем к вычислению специального приращения критерия качества, соответствующее допустимым управлениям $u(t,x)$ и $u(t,x;\,\varepsilon)=\varepsilon\, v(t,x)+(1-\varepsilon)u(t,x),\ i=1,2$.

$$S(u(t,x;\,\varepsilon))-S(u(t,x))=[\Phi_1(z_1(t_1,X;\,\varepsilon))-\Phi_1(z_1(t_1,X))]+[\Phi_2(z_2(t_2,X;\,\varepsilon))-$$

$$-\Phi_2(z_2(t_2,X))]=\sum_{i=1}^{2}[\Phi_i(z_i(t_i,X)+\varepsilon\, q_i(t_i,X)+o(\varepsilon))-\Phi_i(z_i(t_i,X))]=$$

$$=\sum_{i=1}^{2}[\Phi_i(z_i(t_i,X)+\varepsilon\, q_i(t_i,X)+o(\varepsilon))-\Phi_i(z_i(t_i,X)+\varepsilon\, q_i(t_i,X))]+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}[\Phi_i(z_i(t_i,X)+\varepsilon\, q_i(t_i,X))-\Phi_i(z_i(t_i,X))].$$

Поскольку функции $\Phi_i(z_i),\ i=1,2$ удовлетворяют условию Липшица и имеют производные по любому направлению, то аналогично схеме из пункта 3, получаем, что

$$S(u_i(t,x;\,\varepsilon))-S(u_i(t,x))=\varepsilon\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\Phi_i(z_i(t_i,X))}{\partial q_i(t_i,X)}+o(\varepsilon)\cdot \tag{5.6}$$

Из разложения (5.6) следует, что вдоль оптимального управления $(u_1(t,x),\,u_2(t,x))$ выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\Phi_i(z_i(t_i,X))}{\partial q_i(t_i,X)}\ge 0\cdot \tag{5.7}$$

Неравенство (5.7) является неявным необходимым условием оптимальности первого порядка в случае выпуклости $U_i,\ i=1,2$, при помощи которого можно получить более легко проверяемые необходимые условия оптимальности первого порядка. Рассмотрим этот вопрос. Для чего найдем представления решений $q_i(t,x),\ i=1,2$ уравнений (5.4) с краевыми условиями (5.5). По аналогии с (4.4), (4.5) получаем, что

$$q_1(t,x)=\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_1(t,x;\tau,s)\frac{\partial f_1[\tau,s]}{\partial u_1}(v_1(\tau,s)-u_1(\tau,s)), \tag{5.8}$$

$$q_2(t,x)=\sum_{\tau=t_1}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_2(t,x;\tau,s)\frac{\partial f_2[\tau,s]}{\partial u_2}(v_2(\tau,s)-u_2(\tau,s))+R_2(t,x;\,t_1-1,x-1)q_2(t_1,x)+$$

$$+\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[R_2(t,x;\,t_1-1,s-1)-R_2(t,x;\,t_1-1,s)\frac{\partial f_2[t_1-1,s]}{\partial a_2}\right]q_2(t_1,s). \tag{5.9}$$

Поскольку

$$q_2(t_1,s)=\frac{\partial G(z_1(t_1,s))}{\partial z_1}q_1(t_1,s)=$$

$$=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{\beta=x_0}^{s-1}\frac{\partial G(z_1(t_1,s))}{\partial z_1}R_1(t_1,s;\,\tau,\beta)\frac{\partial f_1[\tau,\beta]}{\partial u_1}(v_1(\tau,\beta)-u_1(\tau,\beta)),$$

то из (5.9), по аналогии с доказательством формулы (4.12) доказывается, что

$$q_2(t,x)=\sum_{\tau=t_1}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_2(t,x;\,\tau,s)\frac{\partial f_2[\tau,s]}{\partial u_2}\left(v_1(\tau,s)-u_1(\tau,s)\right)+ \\ +\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}Q_1(t,x;\,\tau,s)\frac{\partial f_1[\tau,s]}{\partial u_1}\left(v_1(\tau,s)-u_1(\tau,s)\right). \tag{5.10}$$

Здесь $R_i(t,x;\,\tau,s)$, $i=1,2$ – являются решениями задач (4.6)-(4.11), а $Q_1(t,x;\,\tau,s)$ определяется по формуле (4.11). Предположим, что $v_1(t,x)\not\equiv u_1(t,x)$, $(t,x)\in D_1$, а $v_2(t,x)\equiv u_2(t,x)$, $(t,x)\in D_2$. Тогда формула (5.10) принимает вид:

$$q_2(t,x)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}Q_1(t,x;\,\tau,s)\frac{\partial f_1[\tau,s]}{\partial u_1}\left(v_1(\tau,s)-u_1(\tau,s)\right). \tag{5.11}$$

Положим

$$c_1(v_1)=\sum_{x=x_0}^{X-1}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}R_1(t_1,X;\,t,x)\frac{\partial f_1[t,x]}{\partial u_1}\left(v_1(t,x)-u_1(t,x)\right), \tag{5.12}$$

$$c_2(v_1)=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}Q_1(t_2,X;\,t,x)\frac{\partial f_1[t,x]}{\partial u_1}\left(v_1(t,x)-u_1(t,x)\right). \tag{5.13}$$

Если положить $v_1(t,x)\equiv u_1(t,x)$, $(t,x)\in D_1$, $v_2(t,x)\not\equiv u_2(t,x)$, $(t,x)\in D_2$, то представления (5.5), (5.7) примут соответственно следующий вид:

$$q_1(t,x)\equiv 0,\ (t,x)\in D_2\cup(t_1,X), \tag{5.14}$$

$$q_2(t,x)=\sum_{\tau=t_1}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_2(t,x;\,\tau,s)\frac{\partial f_2[\tau,s]}{\partial u_2}\left(v_2(\tau,s)-u_2^0(\tau,s)\right). \tag{5.15}$$

Пусть

$$c_3(v_2)=\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}R_2(t_2,X;\,t,x)\frac{\partial f_2[t,x]}{\partial u_2}\left(v_2(t,x)-u_2^0(t,x)\right). \tag{5.16}$$

Принимая во внимание соотношения (5.3)-(5.13) в (5.4) приходим к следующему утверждению

Теорема 5.2. Если множества U_i, $i=1,2$ выпуклы, а $f_i(t,x,z_i,a_i,b_i)$, $i=1,2$ имеют непрерывные производные также по u_i, $i=1,2$ соответственно, то для оптимальности допустимого управления $\left(u_1^0(t,x),\,u_2^0(t,x)\right)$ в задаче (2.1)-(2.4) необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\Phi_i\left(z_i^0(t_1,X)\right)}{\partial c_i(v_1)}\geq 0, \tag{5.17}$$

для всех $v_1(t,x)\in U_1$, $(t,x)\in D_1$, $v_2(t,x)\in U_2$, $(t,x)\in D_2$;

$$\frac{\partial\Phi_2\left(z_2^0(t_2,X)\right)}{\partial c_3(v_2)}\geq 0, \tag{5.18}$$

выполнялись соответственно для всех $v_2(t,x)\in U_2$, $(t,x)\in D_2$.

6. Задача на минимакс. Предположим, что в задаче (2.1)-(2.4) функции $\Phi_i(z_i)$, $i=1,2$ имеют следующий вид:

$$\Phi_i(z_i)=\max_{d_i\in A_i}\varphi_i(z_i,d_i),\ i=1,2. \tag{6.1}$$

Здесь $A_i\subset R^{m_i}$, $i=1,2$ – заданные непустые и ограниченные множества m_i-мерных векторов d_i, $i=1,2$, а $\varphi_i(z_i,d_i), i=1,2$-скалярные функции непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по z_i, $i=1,2$ соответственно.

Пусть $\left(u_1^0(t,x),\, u_2^0(t,x),\, z_1^0(t,x),\, z_2^0(t,x)\right)$ является оптимальным процессом в задаче (2.1)-(2.4), (6.1). Эту задачу назовем задачей на минимакс для дискретной ступенчатой задачей управления (2.1)-(2.4).

В силу теоремы 5.2 учитывая соответствующие формулы из[12,13], получаем, что вдоль процесса $\left(u_1^0(t,x),\, u_2^0(t,x),\, z_1^0(t,x),\, z_2^0(t,x)\right)$ для всех $v_1(t,x)\in U_1$, $(t,x)\in D_1$ и $v_2(t,x)\in U_2$, $(t,x)\in D_2$ выполняются соответственно соотношения

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial\ell_i(v_i)}\left[\max_{d_i\in A_i}\varphi_i\left(z_i^0(t_i,X),d_i\right)\right]\ge 0, \tag{6.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\ell_3(v_2)}\left[\max_{d_2\in A_2}\varphi_2\left(z_2^0(t_2,X),d_2\right)\right]\ge 0. \tag{6.3}$$

Положим [13, 14]:

$$A_i\left(z_i^0\right)=\left\{d_i\in A_i:\ \varphi_i\left(z_i^0(t_i,X),d_i\right)=\max_{\bar d_i\in A_i}\varphi_i\left(z_i^0(t_i,X),\bar d_i\right)\right\}.$$

Используя известную формулу (см. напр. [12, 13]) о производной по направлению функции типа максимума получаем, что

$$\max_{d_1\in A_1\left(z_1^0\right)}\frac{\partial\varphi_1'\left(z_1^0(t_1,X),d_1\right)}{\partial z_1}\ell_1(v_1)+\max_{d_2\in A_2\left(z_2^0\right)}\frac{\partial\varphi_2'\left(z_2^0(t_2,X),d_2\right)}{\partial z_2}\ell_2(v_2)\ge 0, \tag{6.4}$$

$$\max_{d_2\in A_2\left(z_2^0\right)}\frac{\partial\varphi_2'\left(z_2(t_2,X),d_2\right)}{\partial z_2}\ell_3(v_2)\ge 0. \tag{6.5}$$

Из (6.1),учитывая выражения $\ell_1(v_1)$, $\ell_2(v_2)$, определяемые формулами (4.16), (4.17) соответственно, будем иметь:

$$\max_{d_1\in A_1\left(z_1^0\right)}\frac{\partial\varphi_1'\left(z_1(t_1,X),d_1\right)}{\partial z_1}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}R_1(t_1,X;t,x)\Delta_{v_1(t,x)}f_1[t,x]+\max_{d_2\in A_2\left(z_2^0\right)}\frac{\partial\varphi_2'\left(z_2(t_2,X),d_2\right)}{\partial z_2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}Q_2(t_2,X;t,x)\Delta_{v_1(t,x)}f_1[t,x]=$$

$$=\max_{\substack{d_1\in A_1\left(z_1^0\right)\\ d_2\in A_2\left(z_2^0\right)}}\left[\frac{\partial\varphi_1'\left(z_1(t_1,X),d_1\right)}{\partial z_1}+\frac{\partial\varphi_2'\left(z_2(t_2,X),d_2\right)}{\partial z_2}\right]'\times\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\left[R_1(t_1,X;t,x)+Q_2(t_2,X;t,x)\right]\Delta_{v_1(t,x)}f_1[t,x]\ge 0.$$

Далее, используя выражения (4.18) для $\ell_3(v_2)$ из неравенства (6.5), получаем, что

$$\frac{\partial}{\partial\ell_3(v_2)}\left\{\max_{d_2\in A_2}\varphi_2\left(z_2(t_2,X),d_2\right)\right\}=\max_{d_2\in A_2\left(z_2^0\right)}\left\{\frac{\partial\varphi_2'\left(z_2(t_2,X),d_2\right)}{\partial z_2}\ell_3(v_2)\right\}=\max_{d_2\in A_2\left(z_2^0\right)}\left\{\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\frac{\partial\varphi_2'\left(z_2(t_2,X),d_2\right)}{\partial z_2}R_2(t_2,X;\,t,x)\Delta_{v_2(t,x)}f_2[t,x]\right\}\ge 0.$$

Таким образом, доказали, что в задаче на минимакс (2.1)-(2.4), (6.1) вдоль оптимального процесса $\left(u(t,x),\, z(t,x)\right)$ выполняются соотношения

$$\max_{\substack{d_1\in A_1(z_1^0)\\ d_2\in A_2(z_2^0)}}\left[\frac{\partial\varphi_1'(z_1(t_1,X),d_1)}{\partial z_1}+\frac{\partial\varphi_2'(z_2(t_2,X),d_2)}{\partial z_2}\right]'\times \tag{6.6}$$

$$\times\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\left[R_1(t_1,X;t,x)+Q_2(t_2,X;t,x)\right]\Delta_{v_1(t,x)}f_1[t,x]\ge 0,$$

для всех $v_1(t,x)\in U_1$, $(t,x)\in D_1$,

$$\max_{d_2\in A_2(z_2^0)}\left\{\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\frac{\partial\varphi_2'(z_2(t_2,X),d_1)}{\partial z_2}R_2(t_2,X;t,x)\Delta_{v_2(t,x)}f_2[t,x]\right\}\ge 0, \tag{6.7}$$

для всех $v_2(t,x)\in U$, $(t,x)\in D_2$.

7. Случай дифференцируемых $\Phi_i(z_i)$, $i=1,2$. Предположим, что в задаче (2.1)-(2.4) функции $\Phi_i(z_i)$, $i=1,2$ непрерывно дифференцируемы. В этом случае соотношения (4.18), (4.19) принимают соответственно вид

$$\frac{\partial\Phi_1'(z_1(t_1,X))}{\partial z_1}\ell_1(v_1)+\frac{\partial\Phi_2'(z_2(t_2,X))}{\partial z_2}\ell_2(v_1)\ge 0, \tag{7.1}$$

$$\frac{\partial\Phi_2'(z_2(t_2,X))}{\partial z_2}\ell_3(v_2)\ge 0. \tag{7.2}$$

С учетом обозначений (4.16), (4.17), (4.18) неравенства (7.1), (7.2) записываются в виде:

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\left[\frac{\partial\Phi_1'(z_1(t_1,X))}{\partial z_1}R_1(t_1,X;t,x)\Delta_{v_1(t,x)}f_1[t,x]+\frac{\partial\Phi_2'(z_2(t_2,X))}{\partial z_2}Q_1(t_2,X;t,x)\Delta_{v_1(t,x)}f_1[t,x]\right]\ge 0 \tag{7.3}$$

$$\sum_{x=x_0}^{X-1}\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\frac{\partial\Phi_2'(z_2(t_2,X))}{\partial z_2}R_2(t_2,X;t,x)\Delta_{v_2(t,x)}f_2[t,x]\ge 0. \tag{7.4}$$

Полагая

$$\psi_1^0(t,x)=-R_1'(t_1,X;t,x)\frac{\partial\Phi_1(z_1(t_1,X))}{\partial z_1}-Q_1(t_2,X;t,x)\frac{\partial\Phi_2(z_2(t_2,X))}{\partial z_2}, \tag{7.5}$$

$$\psi_2^0(t,x)=-R_2'(t_2,X;t,x)\frac{\partial\Phi_2(z_2(t_2,X))}{\partial z_2}, \tag{7.6}$$

$$H_i(t,x,z_i,a_i,b_i,\psi_i)=\psi_i'\ f_i(t,x,z_i,a_i,b_i), \tag{7.7}$$

$$\Delta_{v_i(t,x)}H_i(t,x)\equiv\psi_i'(t,x)\Delta_{v_i(t,x)}f_i[t,x],$$

неравенства (7.3), (7.4) записываются в виде

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Delta_{v_1(t,x)}H_1[t,x]\le 0, \tag{7.8}$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Delta_{v_2(t,x)}H_2[t,x]\le 0. \tag{7.9}$$

Из (7.5), (7.6) учитывая (4.6)-(4.7), (4.11) можно получить уравнения для $\psi_i^0(t,x)$, $i=1,2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление разрывными системами. Новосибирск. Наука, 1987, 226 с.
2. Багирова С.А., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности в одной ступенчатой задаче управления. // Изв. НАН Азербайджана. Сер. физ.-техн. и матем. наук, 2005, № 3, с. 183-188.
3. Габелко К.Н. Оптимизация многоэтапных процессов // Автореф. дисс. на соиск. уч. степени канд. физ.-мат. наук. Иркутск, 1975, 17 с.
4. Габелько К.Н. Последовательное улучшение многоэтапных процессов // Автоматика и телемеханика. 1974, № 12, с. 72-80.
5. Исмайлов Р.Р., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности квазиособых управлений в одной ступенчатой задаче управления // Кибернетика и анализ. 2008, № 1, с.101-115.
6. Исмайлов Р.Р., Мансимов К.Б. Об условиях оптимальности в одной ступенчатой задаче управления // Журн. Вычисл. мат. и мат. физики.2006, № 19, с. 1758-1770.
7. Катковник В.Я., Полуэктов Р.А. Многомерные дискретные системы управления. М.: Наука, 1966.
8. Розова В.Н. Оптимальное управление ступенчатыми системами с интегральным функционалом // Вестник РУДН. Сер. Прик. и компьютерн. мат. 2002, № 1(1), с. 131-136.
9. Харатишвили Г.Л. Принцип максимума в оптимальных задачах с переключением // Труды Инс. Сист. уп.-я. АН ГССР. Тбилиси. Изд-во «Мецниереба», 1980, т. 19, № 1, с. 5-17.
10. Харатишвили Г.Л.Семиатомические оптимальные системы // В сб: Оптимальное управление системами с переменной структурой. Тбилиси. Изд.-во «Мецниереба», 1985. с. 3-47.
11. Харатишвили Г.Л., Тадумадзе Т.А. Принцип максимума в оптимальных задачах с переключением // Труды Института Систем Управления. АН СССР. Тбилиси. «Мецниереба», 1980, т. 19, № 2, с. 7-14.
12. Демьянов В.Ф.Минимакс: Дифференцируемость по направлениям. Изд-во ЛГУ, Л-д. 1974, 120 с.
13. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квази-дифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990, 432 с.
14. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку, Изд-во БГУ, 2013, 151 с.

2018. Volume 2, Number 2 *Pages 78-84*

УДК 517.946

QARIŞIQ VƏ BİRGƏ TİP TƏNLİK ÜÇÜN SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİNİN ARAŞDIRILMASI

NİFTULLAYEVA Şəbinə Ağadin, İBRAHİMOV Natiq Səhrab, ƏLİYEV Nihan Əlipənah

Lənkəran Dövlət Universiteti

sebineniftullayeva_90@mail.ru

XÜLASƏ

İşdə qarışıq və birgə tipə məxsus olan bir tənlik üçün qeyri-lokal sərhəd şərtləri daxilində sərhəd məsələsinin həlli araşdırılmışdır. Baxılan tənliyin birgə tipə aid olan hissəsi birinci tərtib elliptik tip olan Koşi-Riman tənliyinin qarışıq törəməsindən alınan tənlik, qarışıq tipə aid olan hissə isə Koşi-Riman tənliyi ilə birinci tərtib hiperbolik hissədən ibarət olan tənlikdir. Həm Koşi-Riman tənliyindən həm də birinci tərtib hiperbolik tip tənlikdən qarışıq törəmə alınmışdır. Ona görə baxılan qarışıq və birgə tip tənlik üçüncü tərtibdir.

Açar sözlər: Qarışıq tip tənlik, birgə tip tənlik, qarışıq və birgə tip tənlik, qeyri-lokal sərhəd şərti, zəruri şərtlər, fredholmluq.

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ГРАНИЧНЫЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННО-СОСТАВНОГО ТИПА

РЕЗЮМЕ

Излогаемая работа посвящено исследованию решений граничных задач для уравнения смешанного и составного типа с нелокальными граничными условиями. Первая часть, состовного типа рассматриваемого уравнения является смешанная производная уравнения эллиптического типа первого порядка Коши-Римана, вторая часть смешанного типа является уравнения Коши-Римана и уравнения гиперболического типа первого порядко. Основное уравнения получается с помощью получения смешанной производной от уравнения Коши-Римана и уравнения первого порядко гиперболического типа. Поэтому рассматриваемое уравнения смешанного и состовного типа является уравнением третьего порядко.

Ключевые слова: уравнения смешанного типа, уравнения составного типа, уравнения смешанно-составного типа, нелокальные граничные условии, необходимые условии, фредгольмовость.

ON A STUDY OF THE SOLUTIONS OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE MIXED AND COMPOSITE TYPE EQUATIONS

SUMMARY

In the work the solution of the boundary value problem with non-local boundary conditions is studied for the mixed and composite type equation. The part of the considered equation belonging to the composite type is obtained from the mixed derivative of the first order elliptic Cauchy-Riemman eqation, and the part belonging to the mixed type, consists of Cauchy-Riemman equation and first order hyperbolic equation. The mixed derivative has been taken from both Cauchy-Riemman equation and first order hyperbolic equation. So the considered mixed composite type equation is the third order equation.

Keywords: Mixed type equation, composite type equation, non-local condition, necessary condition, Fredholm property.

Giriş: Məlumdur ki, lokal sərhəd şərtləri daxilində, qarışıq tip tənliklər üçün baxılan məsələlərə aid olan işlərdən [1]-i, birgə tip tənliklər üçün [2]-ni, nəhayət qarışıq və birgə tip tənliklər üçün isə [3]-ü göstəmək olar. Belə ki, bu işlərdə elliptik hissədə həmişə Laplas tənliyi götürülmüşdür. Laplas tənliyi ikinci tərtib olduğundan onun üçün bir lokal şərt vermək kifayətdir. Bizim başladığımız elliptik tip tənlik birinci tərtib olduğundan onun üçün bir lokal şərt daxilində məsələ korrekt olmadığından (məsələnin həlli olmaya bilər) biz qeyri-lokal sərhəd şərtinə baxmaq məcburiyyətində oluruq [4]. Ona görə baxdığımız həm qarışıq tip tənliklər üçün sərhəd məsələləri [5], həm də birgə tip tənliklər üçün sərhəd məsələləri [6] qeyri-lokal sərhəd şərtləri daxilindədir.

Bu cür məsələlərdən birgə və ya qarışıq tip tənliklər üçün müxtəlif oblastlarda baxılan məsələlərdən [7]-[9] işlərini göstərə bilərik.

Məsələnin qoyuluşu: Aşağıdakı kimi qarışıq və birgə tip olan üçüncü tərtib

$$\frac{\partial^3 u_s(x)}{\partial x_1 \partial x_2^2} + i^s \frac{\partial^3 u_s(x)}{\partial x_1^2 \partial x_2} = 0, x = (x_1, x_2) \in D_s, s = 1,2, \tag{1}$$

tənliyi üçün qeyri-lokal,

$$\sum_{m=1}^{2} \sum_{0 \le p+q \le 2} \left\{ \alpha_{k,p,q}^{(m)}(x_1) \frac{\partial^{p+q} u_m(x)}{\partial x_1^p \partial x_2^q} \bigg|_{x_2 = \gamma_m(x_1)} + \beta_{k,p,q}^{(m)}(x_1) \frac{\partial^{p+q} u_m(x)}{\partial x_1^p \partial x_2^q} \bigg|_{x_2 = 0} \right\} = \alpha_k(x_1), \tag{2}$$

$k = \overline{1,6}$; $x_1 \in [a_1, b_1]$,

sərhəd şərtləri daxilində məsələyə baxaq.

Burada $i = \sqrt{-1}$, $D_1 = \{x: , x_1 \in (a_1, b_1), x_2 \in (\gamma_1(x_1), 0)\}, D_2 = \{x: , x_1 \in (a_1, b_1), x_2 \in (0, \gamma_2(x_1))\}$, oblastları x_2- istiqamətində qabarıq, məhdud olub, $\gamma_m(a_1) == \gamma_m(b_1) = 0, m = 1,2$; $\gamma_1(x_1) < 0$, $\gamma_2(x_1) > 0, x_1 \in (a_1, b_1), \alpha_{k,p,q}^{(m)}(x_1), \beta_{k,p,q}^{(m,)}(x_1)$ və $\alpha_k(x_1)$ verilənləri $k = \overline{1,6}$; $0 \le p + q \le 2, m = 1,2$ olduqda kəsilməz funksiyalar olub, (2) sərhəd şərtləri xətti asılı deyil, ν_s isə D_s -in sərhəddinə çəkilmiş xarici normaldır, $s = 1,2$.

Fundamental həllər: Məlumdur ki, (1) tənliyinin fundamental həlli

$$\frac{\partial^3 U_s(x-\xi)}{\partial x_1 \partial x_2^2} + i^s \frac{\partial^3 U_s(x-\xi)}{\partial x_1^2 \partial x_2} = \delta(x_1 - \xi_1)\delta(x_2 - \xi_2),\ x_1, \xi_1 \in \mathbb{R},\ x_2, \xi_2 \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

tənliyini ödəməlidir. Burada $\delta(x_k - \xi_k)$ $k = 1,2$, Dirakın delta funksiyasıdır.

Bu isə o deməkdir ki, $s = 1$ olarsa (3) tənliyinin fundamental həlli üçün

$$U_1(x - \xi) = -\frac{i}{2\pi}[x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)] \cdot \{\ln[x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)] - 1\}, \tag{4}$$

ifadəsi,

$s = 2$ olduqda isə

$$U_2(x - \xi) = \int_{x_1 - \xi_1}^{\frac{1}{2}[(x_2 - \xi_2) + (x_1 - \xi_1)]} \theta(t)\theta(x_2 - \xi_2 + x_1 - \xi_1 - t)dt, \tag{5}$$

ifadəsi alınmış olur.

Əsas münasibətlər:

Verilmiş (1) tənliyində $s = 1$ götürməklə, onu (4) fundamental həllinə vuraraq, D_1 oblastı boyunca inteqralına Ostroqradski-Qaus formulunu tətbiq etməklə (hissə-hissə inteqrallamaqla) alarıq:

$$\int_{\partial D_1} \left\{ \left[\frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_1 \partial x_2} U_1(x - \xi) + u_1(x) \frac{\partial^2 U_1(x - \xi)}{\partial x_1 \partial x_2} - i \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_1} \frac{\partial U_1(x - \xi)}{\partial x_1} \right] \cos(\nu_1, x_2) + \right.$$

$$\left. + \left[-\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2} \frac{\partial U_1(x - \xi)}{\partial x_2} + i \frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_1 \partial x_2} U_1(x - \xi) + i u_1(x) \frac{\partial^2 U_1(x - \xi)}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \cos(\nu_1, x_1) \right\} dx =$$

$$= \left\{ \left(u_1(\xi), \xi \in D_1, @ @ \frac{1}{2} u_1(\xi), \xi \in \partial D_1 . \right) \right. \tag{6}$$

Qalan əsas münasibətlər $s = 1$ olduqda (1) tənliyini (4) fundamental həllinin x_1 və x_2-yə nəzərən ikinci tərtibə qədər törəmələrinə vurub, D_1 oblastı boyunca inteqrallamaqla, Ostroqradski-Qaus formulunu tətbiq edərək alınır.

Zəruri şərtlər və onların requlyarlaşdırılması

Burada əvvəlcə (1) tənliyinə qayıdıb, $s = 2$ olduqda aldığımız tənliyi x_2–yə nəzərən 0-dan $\gamma_2(x_1)$ -ə qədər inteqrallasaq:

$$\left.\frac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_{x_2=\gamma_2(x_1)} - \left.\frac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_1^2}\right|_{x_2=\gamma_2(x_1)} = \left.\frac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_{x_2=0} - \left.\frac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_1^2}\right|_{x_2=0}. \tag{7}$$

şəkilli zəruri şərt almış oluruq.

Yuxarıda söylədiyimiz əsas münasibətlərdən aşağıdakı zəruri şərtlər alınır.

$$\left.\frac{\partial^2 u_1(\xi)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}\right|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)} + i\left.\frac{\partial^2 u_1(\xi)}{\partial \xi_1^2}\right|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)} = \cdots \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u_1(\xi)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}\right|_{\xi_2=0} + i\left.\frac{\partial^2 u_1(\xi)}{\partial \xi_1^2}\right|_{\xi_2=0} = \cdots \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u_1(\xi)}{\partial \xi_2^2}\right|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)} + i\left.\frac{\partial^2 u_1(\xi)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}\right|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)} = \cdots \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u_1(\xi)}{\partial \xi_2^2}\right|_{\xi_2=0} + i\left.\frac{\partial^2 u_1(\xi)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}\right|_{\xi_2=0} = \cdots \tag{11}$$

burada (...) ilə sinqulyar olmayan hədlərin cəmi işarə edilmişdir.

Nəhayət $s = 2$ olduqda (1) –dən alınan tənliyi

$$\theta(x\_1 - \xi\_1\,)\delta(x\_2 - \xi\_2\,),$$

ifadəsinə vurub D_2 üzrə inteqrallasaq, alarıq:

$$-\int_{a_1}^{b_1}\left.\left(\frac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_1 \partial x_2}\right)\right|_{x_2=\gamma_2(x_1)} \theta(x_1-\xi_1)\delta(\gamma_2(x_1)-\xi_2)\,\gamma_2'(x_1)dx_1 =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_2(\xi)}{\partial \xi_2^2} - \dfrac{\partial^2 u_1(\xi)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}, \xi \in D_2, \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2 u_2(\xi)}{\partial \xi_2^2} - \dfrac{\partial^2 u_1(\xi)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}\right), \xi \in \partial D_2. \end{cases} \tag{12}$$

Buradan da

$$\left.\left(\frac{\partial^2 u_2(\xi)}{\partial \xi_2^2} - \frac{\partial^2 u_2(\xi)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}\right)\right|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)} = 0, \tag{11}$$

requlyar zəruri şərti alınmış olur.

Beləliklə qoyulmuş məsələ üçün aldığımız zəruri şərtlərdən (7), (8)-(11) və (13) kimi altı requlyar ifadələrini almış oluruq.

Bu requlyar ifadələr (2) şərtləri ilə birlikdə 12 münasibət vermiş olur.

Aldığımız 12 requlyar münasibətdən

$$u_1\big(x_1, \gamma_1(x_1)\big), u_1(x_1, 0), u_2(x_1, 0), u_2\big(x_1, \gamma_2(x_1)\big),$$

$$\left.\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2}\right|_{x_2=\gamma_1(x_1)}, \left.\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2}\right|_{x_2=0}, \left.\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_2}\right|_{x_2=0}, \left.\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_2}\right|_{x_2=\gamma_2(x_1)}, \tag{14}$$
$$\left.\frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_2^2}\right|_{x_2=\gamma_1(x_1)}, \left.\frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_2^2}\right|_{x_2=0}, \left.\frac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_2^2}\right|_{x_2=0}, \left.\frac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_2^2}\right|_{x_2=\gamma_2(x_1)},$$

kimi əsas məchullar təyin olunmalıdır. Qalan məchullar, analizdən məlum olan

$$1)\ u_1'\big(x_1,\gamma_1(x_1)\big) = \left.\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_1}\right|_{x_2=\gamma_1(x_1)} + \left.\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2}\right|_{x_2=\gamma_1(x_1)} \gamma_1'(x_1),$$

$$2)\ \left.\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_1}\right|_{x_2=0} = u_1'(x_1,0),\ 3)\ \left.\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_1}\right|_{x_2=0} = u_2'(x_1,0),$$

$$4)\ u_2'(x_1,\gamma_2(x_1)) = \left.\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_1}\right|_{x_2=\gamma_2(x_1)} + \left.\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_2}\right|_{x_2=\gamma_2(x_1)} \gamma_2'(x_1)$$

$$5)\ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\left.\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2}\right|_{x_2=\gamma_1(x_1)}\right) = \left.\frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_{x_2=\gamma_1(x_1)} + \left.\frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_2^2}\right|_{x_2=\gamma_1(x_1)} \gamma_1'(x_1),$$

$$6)\ \left.\frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_1^2}\right|_{x_2=0} = u_1''(x_1,0)$$

$$7)\ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\left.\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_2}\right|_{x_2=\gamma_2(x_1)}\right) = \left.\frac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_{x_2=\gamma_2(x_1)} + \left.\frac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_2^2}\right|_{x_2=\gamma_2(x_1)} \gamma_2'(x_1),$$

$$8)\ \left.\frac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_1^2}\right|_{x_2=0} = u_2''(x_1,0)$$

$$9)\ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\left.\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_2}\right|_{x_2=0}\right) = \left.\frac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_{x_2=0},\ 10)\ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\left.\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2}\right|_{x_2=0}\right) = \left.\frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_{x_2=0} \tag{15}$$

$$11)\ u_1''(x_1,\gamma_1(x_1)) = \left.\frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_1^2}\right|_{x_2=\gamma_1(x_1)} + 2\gamma_1'(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\left.\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2}\right|_{x_2=\gamma_1(x_1)}\right) -$$

$$-\left.\frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_2^2}\right|_{x_2=\gamma_1(x_1)} {\gamma_1'}^2(x_1) + \left.\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2}\right|_{x_2=\gamma_1(x_1)} \gamma_1''(x_1)$$

$$12)\ u_2''(x_1,\gamma_2(x_1)) = \left.\frac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_1^2}\right|_{x_2=\gamma_2(x_1)} + 2\gamma_2'(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\left.\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_2}\right|_{x_2=\gamma_2(x_1)}\right) -$$

$$-\left.\frac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_2^2}\right|_{x_2=\gamma_2(x_1)} {\gamma_1'}^2(x_1) + \left.\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_2}\right|_{x_2=\gamma_2(x_1)} \gamma_2''(x_1)$$

ifadələrindən tapılır.

İndi yuxarıda aldığımız (7)-(11), (13) ifadələrinə verilmiş (2) sərhəd şərtlərini qoşsaq, alarıq:

$$\left.\frac{\partial^2 u_1(\xi)}{\partial\xi_1\partial\xi_2}\right|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}+i\left.\frac{\partial^2 u_1(\xi)}{\partial\xi_1^2}\right|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}=\cdots,$$

$$\left.\frac{\partial^2 u_1(\xi)}{\partial\xi_1\partial\xi_2}\right|_{\xi_2=0}+i\left.\frac{\partial^2 u_1(\xi)}{\partial\xi_1^2}\right|_{\xi_2=0}=\cdots,$$

$$\left.\frac{\partial^2 u_1(\xi)}{\partial\xi_2^2}\right|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}+i\left.\frac{\partial^2 u_1(\xi)}{\partial\xi_1\partial\xi_2}\right|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}=\cdots,$$

$$\left.\frac{\partial^2 u_1(\xi)}{\partial\xi_2^2}\right|_{\xi_2=0}+i\left.\frac{\partial^2 u_1(\xi)}{\partial\xi_1\partial\xi_2}\right|_{\xi_2=0}=\cdots,$$

$$\left.\frac{\partial^2 u_2(\xi)}{\partial\xi_1\partial\xi_2}\right|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}+\left.\frac{\partial^2 u_2(\xi)}{\partial\xi_1^2}\right|_{\xi_2=0}-\left.\frac{\partial^2 u_2(\xi)}{\partial\xi_1\partial\xi_2}\right|_{\xi_2=0}-\left.\frac{\partial^2 u_2(\xi)}{\partial\xi_1^2}\right|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}=0$$

$$\left.\frac{\partial^2 u_2(\xi)}{\partial\xi_2^2}\right|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}-\left.\frac{\partial^2 u_2(\xi)}{\partial\xi_1\partial\xi_2}\right|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}=0.$$

$$\sum_{0\le p+q\le 2}\left\{\alpha_{k,p,q}^{(1)}(\xi_1)\left.\frac{\partial^{p+q}u_1(\xi)}{\partial\xi_1^p\partial\xi_2^q}\right|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}+\beta_{k,p,q}^{(1)}(\xi_1)\left.\frac{\partial^{p+q}u_1(\xi)}{\partial\xi_1^p\partial\xi_2^q}\right|_{\xi_2=0}+\right.$$

$$\left.+\alpha_{k,p,q}^{(2)}(\xi_1)\left.\frac{\partial^{p+q}u_2(\xi)}{\partial\xi_1^p\partial\xi_2^q}\right|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}+\beta_{k,p,q}^{(2)}(\xi_1)\left.\frac{\partial^{p+q}u_2(\xi)}{\partial\xi_1^p\partial\xi_2^q}\right|_{\xi_2=0}\right\}=\alpha_k(\xi_1)\qquad k=\overline{1,6}$$

Bu verdiyimiz 12 ifadələrdə (15) münasibətlərini nəzərə alaq:

$$\frac{[1-2\gamma_1'(\xi_1)i]\partial}{\partial\xi_1}\left(\left.\frac{\partial u_1(\xi)}{\partial\xi_2}\right|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}\right)+\left[\gamma_1'^2(\xi_1)i-\gamma_1'(\xi_1)\right]\left.\frac{\partial^2 u_1(\xi)}{\partial\xi_2^2}\right|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}=\cdots,\qquad(16)$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\left.\frac{\partial u_1(\xi)}{\partial\xi_2}\right|_{\xi_2=0}\right)+iu_1''(\xi_{1,0})=\cdots,\qquad(17)$$

$$\left.\frac{[1-\gamma_1'(\xi_1)i]\left(\partial^2 u_1(\xi)\right)}{\partial\xi_2^2}\right|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}+i\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\left.\frac{\partial u_1(\xi)}{\partial\xi_2}\right|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}\right)=\cdots,\qquad(18)$$

$$\left.\frac{\partial^2 u_1(\xi)}{\partial\xi_2^2}\right|_{\xi_2=0}+i\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\left.\frac{\partial u_1(\xi)}{\partial\xi_2}\right|_{\xi_2=0}\right)=\cdots\qquad(19)$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\left.\frac{\partial u_2(\xi)}{\partial\xi_2}\right|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}\right)-\left.\frac{\partial^2 u_2(\xi)}{\partial\xi_2^2}\right|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}\gamma_2'(\xi_1)-\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\left.\frac{\partial u_2(\xi)}{\partial\xi_2}\right|_{\xi_2=0}\right)-$$

$$-\left[-\frac{2\gamma_2'(\xi_1)\partial}{\partial\xi_1}\left(\left.\frac{\partial u_2(\xi)}{\partial\xi_2}\right|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}\right)+\gamma_2'^2(\xi_1)\left.\frac{\partial^2 u_2(\xi)}{\partial\xi_2^2}\right|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}\right]=\cdots\qquad(20)$$

$$\left.\frac{[1-\gamma_2'(\xi_1)]\left(\partial^2 u_2(\xi)\right)}{\partial\xi_2^2}\right|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}-\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\left.\frac{\partial u_2(\xi)}{\partial\xi_2}\right|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}\right)=0,\qquad(21)$$

$$\frac{\left[-\alpha_{k,2,0}^{(1)}(\xi_1)2\gamma_1'(\xi_1)+\alpha_{k,1,1}^{(1)}(\xi_1)\right]\partial}{\partial\xi_1}\left(\left.\frac{\partial u_1(\xi)}{\partial\xi_2}\right|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}\right)+\left[\alpha_{k,2,0}^{(1)}(\xi_1)\gamma_1'^2(\xi_1)-\right.$$

$$\left.-\alpha_{k,1,1}^{(1)}(\xi_1)\gamma_1'(\xi_1)\right]\left.\frac{\partial^2 u_1(\xi)}{\partial\xi_2^2}\right|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}+\left[-2\gamma_2'(\xi_1)\alpha_{k,2,0}^{(2)}(\xi_1)+\alpha_{k,1,1}^{(2)}(\xi_1)\right]\times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\left.\frac{\partial u_2(\xi)}{\partial \xi_2}\right|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}\right)+\left[\alpha_{k,2,0}^{(2)}(\xi_1)\,\gamma_2'^2(\xi_1)-\alpha_{k,1,1}^{(2)}(\xi_1)\gamma_2'(\xi_1)\right]\left.\frac{\partial^2 u_2(\xi)}{\partial \xi_2^2}\right|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}+$$

$$+\frac{\beta_{k,1,1}^{(1)}(\xi_1)\partial}{\partial \xi_1}\left(\left.\frac{\partial u_1(\xi)}{\partial \xi_2}\right|_{\xi_2=0}\right)+\frac{\beta_{k,1,1}^{(2)}(\xi_1)\partial}{\partial \xi_1}\left(\left.\frac{\partial u_2(\xi)}{\partial \xi_2}\right|_{\xi_2=0}\right)+\alpha_{k,0,2}^{(1)}(\xi_1)\left.\frac{\partial^2 u_1(\xi)}{\partial \xi_2^2}\right|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}+$$

$$+\beta_{k,0,2}^{(1)}(\xi_1)\left.\frac{\partial^2 u_1(\xi)}{\partial \xi_2^2}\right|_{\xi_2=0}+\alpha_{k,0,2}^{(2)}(\xi_1)\left.\frac{\partial^2 u_2(\xi)}{\partial \xi_2^2}\right|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}+\beta_{k,0,2}^{(2)}(\xi_1)\left.\frac{\partial^2 u_2(\xi)}{\partial \xi_2^2}\right|_{\xi_2=0}=\cdots,$$

$$k=\overline{(1,6)}. \qquad (22)$$

Beləliklə aşağıdakı hökmü almış oluruq:

Teorem. Əgər D_1, D_2- x_2 istiqamətində qabarıq, məhdud müstəvi oblast olub, sərhədləri hissə-hissə Lyapunov xəttidirsə, xətti asılı olmayan sərhəd şərtlərinin əmsalları və sağ tərəfləri kəsilməz funksiyalardırsa, (16) –(22) sistemindən (14) əsas məchulları təyin olunursa, onda (1)-(2) sərhəd məsələsi Fredholm tiplidir.

Qeyd 1. (16)-(22) kimi verilmiş 12 xətti cəbri tənliklər sistemindən Kramer üsulu ilə

$$u_1''(x_1,\gamma_1(x_1)), u_1''(x_{1,0}), u_2''(x_{1,0}), u_2''(x_1,\gamma_2(x_1)),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\left.\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2}\right|_{x_2=\gamma_1(x_1)}\right),\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\left.\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2}\right|_{x_2=0}\right),\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\left.\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_2}\right|_{x_2=0}\right),\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\left.\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_2}\right|_{x_2=\gamma_2(x_1)}\right),$$

$$\left.\frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_2^2}\right|_{x_2=\gamma_1(x_1)},\left.\frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_2^2}\right|_{x_2=0},\left.\frac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_2^2}\right|_{x_2=0},\left.\frac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_2^2}\right|_{x_2=\gamma_2(x_1)},$$

məchullar təyin edilməlidir.

Qeyd 2. Qalan 12 sərhəd qiymətləri (15)-dən təyin olunurlar.

Qeyd 3. $u_1(x_1,\gamma_1(x_1)), u_1(x_{1,0}), u_2(x_{1,0}), u_2(x_1,\gamma_2(x_1)), \left.\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2}\right|_{x_2=\gamma_1(x_1)} \left.\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2}\right|_{x_2=0}$

$\left.\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_2}\right|_{x_2=0}, \left.\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_2}\right|_{x_2=\gamma_2(x_1)}$ funksiyaları qeyd 1-də tapılan funksiyaları inteqrallamaqla alınıb.

Qeyd 4. Qeyd 3-də tapılan funksiyalar ixtiyari sabitlərdən asılı olurlar ki (inteqralla-madan alınan sabitlər) həmin sabitləri $u_1(x), u_2(x), u_1'(x_{1,0}), u_2'(x_{1,0}), u_1'(x_1,\gamma_1(x_1)), u_2'(x_1,\gamma_2(x_1))$,

$$\left.\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2}\right|_{x_2=\gamma_1(x_1)}\left.\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2}\right|_{x_2=0}\left.\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_2}\right|_{x_2=0},\left.\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_2}\right|_{x_2=\gamma_2(x_1)}$$

funksiyalarını $⟦(a⟧_{1,0})$ və $(b_{1,0})$ nöqtələrində verilməsi ilə tapılırlar.

Qeyd 5. Qeyd 4-də söylənilən şərtlər çox zəif şərtlərdir. Belə ki, iki ölçülü fəzada sıfır ölçülü çoxluqda (nöqtələrdə) verilmiş şərtlərdir.

Qeyd 6. Bütün sərhəd qiymətləri təyin edildikdən sonra məsələnin həllinin analitik ifadəsi əsas münasibətlərdən təyin olunur.

ƏDƏBİYYAT

1. Лаврентьев М.А., Бицадзе А.В. К проблем уравнений смещанного типа- Докл. АН СССР, 1950,т.70, с. 373-376
2. Hadamard. Proprietes dune equation lineaire aux derivees partielles du quatrieme ordre.The Tohoku. J.1933 v.37.p.133-150

3. Бицадзе А.В., Салахатдинов М.С. К Теории уравнений смещанного- составного тип. Сиб.мат. журн.1961 т.2 №1, с.7-9
4. Əliyev N.Ə.,Zeynalov R.M., Koşi-Riman tənliyi üçün qlobal hədd tutan sərhəd şərti daxilində Steklov məsələsinin həllinin araşdırılması. Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences.Series of Physical – Technical and Mathematical Sciences. Vol.XXIX, №3, 2009 s.1-6.
5. Aliyev N., Jahanshahi M., Sufficient conditions for reduction of the BVP including a mixed PDE with non-lokal boundary conditions to Fredholm inteqral equations, Int.Jour. of Math. Educ. In Scien. And Techn.28 (1997), no. 3, pp.419-425
6. A.Delshad Gharehgheslaghi, N. Aliyev, General Boundary Value Problem for the Third Order Linear Differantial Equation of Composite Type, Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, Kharkov, Ukraine Vol 8, №2, 2012 pp.1-16
7. Əliyev N.Ə., İbrahimov N.S., Niftullayeva Ş.A., "Qarışıq tip tənliklər üçün qeyri-lokal və qlobal hədli sərhəd məsələsinin həllinin araşdırılması", Elmi xəbərlər, Təbiyyat elmlər seriyası Lənkəran Dövlət Universiteti.2016
8. Aliyev N., İbrahimov N.S., Niftullayeva Ş.A., İnvestigation the boundary problem for the composite type equation with boundary condition involving non-local and global terms Вестник Киевского университета. Серия физико-математические науки", 2017 год, №1. 2017
9. Niftullayeva Ş.A., Paraleloqram və düzbucaqlının birləşməsində qarışıq tip birinci tərtib tənlik üçün qeyri-lokal sərhəd şərti daxilində məsələnin həllinin araşdırılması Texniki Universiteti. 2017 çapdadır.

JOURNAL OF BAKU ENGINEERING UNIVERSITY- MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
2018. Volume 2, Number 2 *Pages 85-91*

UOT: 517.947

BİR SİNİF İKİNCİ TƏRTİB XÜSUSİ TÖRƏMƏLİ OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN BÜTÜN FƏZADA HƏLL OLUNMASI HAQQINDA

R.F. HƏTƏMOVA
Sumqayıt Dövlət Universiteti
hetemova_roya@mail.ru

XÜLASƏ

Təqdim edilmiş məqalədə bütün R^n fəzasında ikinci tərtib xüsusi törəməli operator-diferensial tənliklərin korrekt həll olunması öyrənilmişdir. Bu məqsədlə əvvəlcə tənliyin baş hissəsinə uyğun tənlik araşdırılmışdır. Baş hissəyə uyğun operatorun $W_2^2(R^n;H)$fəzası ilə $L_2(R^n;H)$fəzası arasında izomorfizm yaratdığı isbat edilmişdir. Aralıq törəmə operatorlarının normaları qiymətləndirilmişdir. Son nəticədə verilmiş tənliyin korrekt həll olunması üçün əmsallarla ifadə olunan kafi şərtlər tapılmışdır.

Açar sözlər: Hilber fəzası, operator, operator-diferensial tənliklər, korrekt həll olunma, izomorfizm, spektr.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВО ВСЕМ ПРОСТРАНСТВЕ

РЕЗЮМЕ

В данной статье исследуется корректная разрешимость одного класса операторно-дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными во всем пространстве R^n . Для этой цели сначала доказывается теорема об изоморфизме оператора главной части уравнения из пространство $W_2^2(R^n;H)$на пространства $L_2(R^n;H)$. Найдена оценки операторов промежуточных производных, используя которых получены достаточные условия для корректной разрешимости уравнения, выраженные коэффициентами уравнения.

Ключевые слова: Гильбертово пространство, оператор, операторно-дифференциальное уравнение, корректная разрешимость, изоморфизм, спектр.

ON CORRECT SOLVABILITY ONE CLASS PARTIAL OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATION SECOND ORDER IN WHOLE SPACE

ABSTRACT

In this paper the correctly solvability one class of operator-differential equation of second order with partial derivative in whole space R^n is investigated. For this is begining theorem about izomorphisme of head part of equation from space $W_2^2(R^n;H)$ to space $L_2(R^n;H)$ is proved. The estimates betwenn derivatives of operators is finding. For this is used sufficiently conditions for correctly solvability of equation which determined with coefficients of equations.

Key words: Hilbert space, operator, operator- differential equation, correctly solvability, izomorphism, spectr.

Tutaq ki, H -separabel Hilbert fəzası, C isə bu fəzada təyin edilmiş öz-özünə qoşma müsbət-müəyyən operatordur.Məlumdur ki, $C^p(p \ge 0)$ operatorunun təyinolunma oblastı H_p $(x,y)_{H_p} = (C^p x, C_y^p)$ skalyar hasilinə nəzərən Hilbert fəzası təşkil edir. Burada $p=0$ olduqda $H_0 = H$ olduğu qəbul edilir.

$L_2(R^n;H)$ilə qiymətləri H fəzasına daxil olan, sanki bütün $x \in R^n$, $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ üçün təyin olunmuş $f(x_1,x_2,...,x_n)$ vektor-funksiyalarından ibarət Hilbert fəzasını işarə edək. Bu fəzada elementin norması

$$\|f\|_{L_2(R^n;H)} = \left(\int_{R^n} \|f(x_1, x_2, ..., x_n)\|_H^2 \, dx_1 dx_2 ... dx_n \right)^{1/2}$$

kimi təyin edilir.

$D(R^n;H)$ ilə R^n fəzasaında təyin edilmiş, kompakt daşıyıcıya malik olan sonsuz diferensiallanan vektor-funksiyalar çoxluğunu işarə edək. Bu çoxluqda elementin normasını

$$\|u\| = \left(\sum_{k=1}^{n} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \right\|_{L_2(R^n,H)} + \|C^2 u\|_{L_2(R;H)}^2 \right)^{1/2}$$

kimi təyin edək. Bu normaya görə $D(R^n;H)$ xətti çoxluğunun qapanmasını $W_2^2(R^n;H)$kimi işarə edək.

H fəzasında aşağıdakı operator-differensial tənliyə baxaq:

$$-\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k^2} + \sum_{m=1}^{n} R_m \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} + Tu(x) + C^2 u(x) = f(x), \ \ x \in R^n \tag{1}$$

Burada $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ və $u(x) = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ qiymətləri sanki bütün $x \in R^n$ üçün H fəzasına daxil olan vektor-funksiyalardır.

Tənliyin əmsallarının aşağıda göstərilən şərtləri ödədiyini fərz edirik.

1) İstənilən $k = 1, 2 ... n$ üçün $a_k > 0$;

2) $C - H$ fəzasında təyin edilmiş öz-özünə qoşma müsbət müəyyən operatordur.

3) $R_k \cdot C^{-1} = Q_k, \ k = 1,2,...n$ operatorları H fəzasında məhdud operatorlardır.

4) $T \cdot C^{-2} = F$ operatoru H fəzasında məhdud operatordur.

Tərif 1. Əgər $f(x) \in L_2(R^n;H)$üçün elə $u(x) \in W_2^2(R^n;H)$funksiyası varsa ki, (1) tənliyini R^n fəzasında sanki hər yerdə ödəsin, onda $u(x)$ funksiyasına (1) tənliyinin requlyar həlli deyilir.

Tərif 2.Əgər istənilən $f(x) \in L_2(R^n;H)$üçün (1) tənliyinin requlyar $u(x) \in W_2^2(R^n;H)$həlli varsa və bu həll üçün

$$\|u\|_{W_2^2(R^n;H)} \le C \cdot \|f\|_{L_2(R^n;H)}$$

qiymətləndirməsi doğru isə, onda (1) tənliyinə korrekt həll oluna bilən tənlik deyilir.

Təqdim olunan işdə (1) tənliyinin korrekt həll oluna bilən olması üçün tənliyin əmsalları ilə ifadə olunan kafi şərtlər tapılmışdır. Qeyd edək ki, $a_k = 1, \ n = 2$ olduqda (1) tənliyi [5] işində baxılmışdır. $a_k = 1, \ n = 2, \ C$ -normal operator olduğu halda oxşar məsələ [6-8] məqalələrində öyrənilmişdir. Xüsusi törəməli yüksək tərtibli operator-differensial tənliklərin birqiymətli, normal və fredholm mənada həll olunan olması məsələləri [1-3] məqalələrində baxılmışdır.

Aşağıdakı işarələri qəbul edək:

$$L_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u = -\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial^2 u(x)}{\partial_k^2} + C^2 u(x), \quad u(x) \in W_2^2(R^n;H)$$

$$L_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u = \sum_{m=1}^{n} R_m \frac{\partial u}{\partial x_k} + Tu, \quad u(x) \in W_2^2(R^n;H)$$

Əvvəlcə

$$L_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=-\sum_{k=1}^{n}a_k\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}+C^2u=f(x),\quad x\in R^n \tag{2}$$

tənliyinin həllolunma məsələsini araşdıraq.

Aşağıdakı teorem doğrudur:

Teorem 1. Tutaq ki, $a_k>0$ və C - öz-özünə qoşma müsbət-müəyyən operatordur. Onda (2) tənliyi korrekt həll olunandır.

İsbatı. $f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ funksiyasının Furye çevirməsini $\tilde f(\xi)\,\tilde f(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ ilə işarə edək.

$$u(x)=u(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{R^n}\hat u(\xi)\,\ell^{-i(x,\xi)}d\xi \tag{3}$$

qəbul edək, burada $\hat u(\xi)=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\,\xi_k^2+C^2\right)^{-1}\tilde f(\xi)$, $(x,\xi)=x_1\xi_1,x_2\,\xi_2+\ldots+x_n\,\xi$.

Göstərə bilərik ki, (3) düsturu ilə təyin olunan $U(x)$ funksiyası R^n-də sanki hər yerdə (1) tənliyini ödəyir. Göstərək ki, $u(x)\in W_2^2(R^n;H)$. Bunun üçün əvvəlcə.

$\dfrac{\partial^2u(x)}{\partial x_k^2}\in L_2(R^n;H)$, $C^2u(x)\in L_2(R^n;H)$ olduğunu göstərək. Planşerel teoreminə görə $\xi^2\hat u(\xi)\in L_2(R^n;H)$ və $C^2\hat u(\xi)\in L_2(R^n;H)$ olduğunu göstərmək kifayətdir.

Aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur:

$$\|\xi_x^2\hat u(\xi)\|_{L_2(R^n;H)}=\left\|\xi_k^2\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\,\xi_k^2+c^2\right)^{-1}\hat f(\xi)\right\|_{L_2(R^n;H)}\le\sup_{\xi\in R^n}\left\|\xi_k^2\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\,\xi_k^2+C^2\right)^{-1}\right\|\cdot\|\hat f(\xi)\|_{L_2(R^n;H)} \tag{4}$$

Digər tərəfdən C operatorunun spektral ayrılış düsturuna görə istənilən $\xi\in R^n$ üçün alarıq:

$$\left\|\xi_k^2\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\,\xi_k^2+c^2\right)^{-1}\right\|=\sup_{\mu\in\sigma(c)}\left|\xi^2\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\,\xi^2+\mu^2\right)^{-1}\right|\le\sup_{\mu\in\sigma(c)}\left|\xi_k^2\left(\xi_k^2\cdot a_k+\mu^2\right)^{-1}\right|\le_k^{-1},\ k=1,2,\ldots n$$

Onda (4) bərabərsizliyindən alarıq ki,

$$\|\xi_k^2\tilde u(\xi)\|_{L_2(R^n;H)}\le a_k^{-1}\|\tilde f(\xi)\|_{L_2(R^n;H)}=a_k^{-1}\|f(x)\|_{L_2(R^n;H)}, \tag{5}$$

başqa sözlə, $\xi^2\tilde u(\xi)\in L_2(R^n;H)$, $k=1,2\ldots n$ alarıq.

Digər tərəfdən

$$\|C^2\tilde u(\xi)\|_{L_2(R^n;H)}=\left\|C^2\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\,\xi_k^2+C^2\right)^{-1}\tilde f(\xi)\right\|_{L_2(R^n;H)}\le\sup_{\xi\in R^n}\left\|C^2\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\,\xi_k^2+C^2\right)^{-1}\right\|\cdot\|\tilde f(\xi)\|_{L_2(R^n;H)}. \tag{6}$$

Spektral ayrılış düsturundan istifadə etməklə istənilən $\xi\in R^n$ üçün alarıq:

$$\left\|C^2\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\,\xi_k^2+C^2\right)^{-1}\right\|\le\sup_{\mu\in\sigma(c)}\left\|\mu^2\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\,\xi_k^2+\mu^2\right)^{-1}\right\|<1,$$

nəticədə (6) bərabərsizliyindən

$$\left\| C^2\, \tilde{u}(\xi) \right\|_{L_2(R^n;H)} \le \| f \|_{L_2(R^n;H)} \tag{7}$$

alırıq. Son nəticədə (5) və (7) bərabərsizliklərindən $u(x) \in W_2^2(R^n;H)$ və

$$\|u\|^2_{W_2^2(R^2;H)} = \sum_{k=1}^{n} \left\| \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k^2} \right\|^2_{L_2(R^n;H)} + \left\| C^2\, u\,(x) \right\|_{L_2(R^n;H)} = \sum_{k=1}^{n} \| \xi_k^2\, u\,(\xi) \|^2_{L_2(R^n;H)} + \left\| C^2\, \hat{u}\,(\xi) \right\|^2_{L_2(R^n;H)} \le \left(a_k^{-2} + 1\right) \| f \|^2_{L_2(R^n;H)}$$

olduğunu alırıq. Bu bərabərsizlik (1) tənliyinin korrekt həll oluna bilən olmasını göstərir. Teorem isbat olundu.

İndi isə aralıq törəmə operatorları adlanan ifadələrin normasının qiymətlən-dirilməsi haqqında aşağıdakı teoremi isbat edək:

Teorem 2. Tutaq ki, $u(x) \in W_2^2(R^n;H)$. Bu halda aşağıdakı bərabərsizliklər doğrudur:

$$\left\| C \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \right\|_{L_2(R^n;H)} \le C_k \left\| L_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u \right\|_{L_2(R^n;H)}, \quad k = 1, 2 \ldots n$$

$$\left\| C^2 u(x) \right\|_{L_2(R^n;H)} \le C_0 \left\| L_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u \right\|_{L_2(R^n;H)}$$

burada $C_k = a_k^{-1}$, $C_0 = 1$, $k = 1, 2, \ldots n$.

İsbatı. Tutaq ki, $u(x) \in W_2^2(R^n;H)$ $L_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u = f$ işarə etsək alarıq:

$$u(x) = \frac{1}{(\pi)^{n/2}} \int_{R^n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k C_k^2 \right)^{-1} \tilde{f}(\xi)\, \ell^{i(x,\xi)}\, d\xi$$

Planşerel teoreminə görə yaza bilərik:

$$\left\| C \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \right\|_{L_2(R^n;H)} = \| \xi_k\, C\tilde{u}(\xi) \|_{L_2(R^n;H)} = \left\| \xi_k \cdot C \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\, \xi_k^2 + C^2 \right)^{-1} \tilde{f}(\xi) \right\|_{L_2(R^n;H)} \le$$
$$= \sup_{\xi \in R^n} \left\| \xi_k\, C \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\, \xi_k^2 + C^2 \right)^{-1} \right\| \cdot \left\| \tilde{f}(\xi) \right\|_{L_2(R^n;H)} \tag{8}$$

İstənilən $\xi \in R^n$ üçün aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur:

$$\left\| \xi_k \cdot C \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\, \xi_k^2 + C^2 \right)^{-1} \right\|_H = \sup_{\mu \in \sigma(c)} \left| \xi_k\, \mu \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\, \xi_k^2 + \mu^2 \right)^{-1} \right| \le \sup_{\mu \in \sigma(c)} \left| \xi_k\, \mu \left(a_k \xi_k^2 + \mu^2 \right)^{-1} \right| \le \sup_{\mu \in \sigma(c)} \left| a_k^{-\frac{1}{2}} \cdot a_k^{\frac{1}{2}}\, \xi_k\, \mu \left(a_k \xi_k^2 + \mu^2 \right)^{-1} \right| \le$$
$$\le a_k^{-\frac{1}{2}} \sup_{\mu \in \sigma(c)} \left| a_k^{\frac{1}{2}}\, \xi_k\, \mu \left(a_k \xi_k^2 + \mu^2 \right)^{-1} \right| \le a_k^{-\frac{1}{2}} \sup_{\mu \in \sigma(c)} \left| \frac{1}{2} \left(a_k \xi_k^2 + \mu^2 \right) \left(a_k \xi_k^2 + \mu^2 \right)^{-1} \right| \le \frac{1}{2} a_k^{-\frac{1}{2}},$$

Nəticədə

$$\left\| C \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\|_{L_2(R^n;H)} \le \frac{1}{2}\, a_k^{-\frac{1}{2}}\, \| f \|_{L_2(R^n;H)} \tag{9}$$

alarıq.

Digər tərəfdən alarıq:

$$\left\| C^2 u(x) \right\|_{L_2(R^n;H)} = \left\| C^2 \tilde{u}(\xi) \right\|_{L_2(R^n;H)} = \left\| C^2 \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k^2 + C^2 \right)^{-1} \tilde{f}(\xi) \right\|_{L_2(R^n;H)} \le \sup_{\xi \in R^n} \left\| C^2 \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k^2 + C^2 \right)^{-1} \right\| \cdot \left\| \tilde{f}(\xi) \right\|_{L_2(R^n;H)} = \tag{10}$$

$$= \sup_{\xi \in R^n} \left\| C^2 \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k^2 + C^2 \right) \right\| \cdot \left\| f(x) \right\|_{L_2(R^n;H)}^2 .$$

C operatorunun spektral ayrılışından istifadə etsək istənilən $\xi \in R^n$ üçün alarıq:

$$\left\| C^2 \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k^2 + C^2 \right)^{-1} \right\| = \sup_{\mu \in \sigma(c)} \left\| \mu^2 \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k^2 + \mu^2 \right)^{-1} \right\| \le 1.$$

Onda (10) bərabərsizliyindən alarıq:

$$\left\| C^2 u(x) \right\|_{L_2(R^n;H)} \le \left\| f \right\|_{L_2(R^n;H)} .$$

Əgər $f(x) = L_0\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right) u(x)$ olduğunu nəzərə alsaq teoremin hökmünün doğru olduğunu alarıq. Teorem isbat olundu.

İndi isə (1) tənliyinin korrekt həll oluna bilməsi haqqında teoremi isbat edək.

Teorem 3.Fərz edək ki, girişdə göstərilən 1). - 4). şərtləri ödənilir, belə ki, Q_k və F operatorları üçün

$$q = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} a_k^{-\frac{1}{2}} \cdot \left\| Q_k \right\| + \left\| F \right\| < 1$$

şərti ödənilir.

Bu halda (1) tənliyi korrekt həll olunandır.

İsbat. (1) tənliyini aşağıdakı şəkildə göstərək:

$$L_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u + L_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u = f(x), \quad x \in R^n$$

burada $f(x) \in L_2(R^n;H)$, $u(x) \in W_2^2(R^n;H)$.

Teorem 1-dən alınır ki, $L_0\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ operatoru $W_2^2(R^n;H)$ fəzasını $L_2(R^n;H)$ fəzasına izomorf inikas etdirir.

Əgər $L_0\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right) u = \omega(x)$ işarə etsək, belə ki, $\omega(x) \in L_2(R^n;H)$, aşağıdakı tənliyi ala bilərik:

$$\omega(x) + L_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \cdot L_0^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \omega(x) = f(x)$$

Bu tənliyi $L_2(R^n;H)$ fəzasında

$$\left[E + L_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \cdot L_0^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \right] \omega(x) = f(x)$$

operator tənliyi şəklində göstərə bilərik.

$L_0\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ operatorunun izomorfizmindən istifadə edərək istənilən $\omega(x) \in L_2(R^n;H)$ üçün alarıq:

$$\left\| L_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) L_0^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\omega(x)\right\|_{L_2(R^n;H)} = \left\| L_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x)\right\|_{L_2(R^n;H)} = \left\| \sum_{k=1}^{n} R_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + F u\right\|_{L_2(R^n;H)} \le \sum_{k=1}^{n} \left\| R_k C^{-1}\right\| \cdot \left\| C\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\|_{L_2(R^n;H)} +$$

$$+\left\| T\cdot C^{-2}\right\| \cdot \left\| C^2 u\right\|_{L_2(R^n;H)} \le \sum_{k=1}^{n}\left\| Q_k\right\| \cdot \left\| C\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\|_{L_2(R^n;H)} + \left\| F C^{-2}\right\| \cdot \left\| C^2 u\right\|_{L_2(R^n;H)}.$$

Aralıq törəmə operatorlarının normalarının qiymətləndirilməsi haqqında Teorem 2-dən istifadə etsək, alarıq:

$$\left\| L_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) L_0^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\|_{L_2(R^n;H)} \le \sum_{k=1}^{n}\left\| Q_k\right\| \cdot \frac{1}{2} a_k^{-1}\left\| L_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u\right\|_{L_2(R^n;H)} +$$

$$+\left\| F\right\| \cdot \left\| L_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\|_{L_2(R^n;H)} = \left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k^{-\frac{1}{2}} \cdot \left\| Q_k\right\| + \left\| F\right\|\right)\left\| L_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u\right\|_{L_2(R^n;H)} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k^{-\frac{1}{2}} \cdot \left\| Q_k\right\| + \left\| F\right\|\right)\left\| \omega(x)\right\|_{L_2(R^n;H)} = q\left\| \omega(x)\right\|_{L_2(R^n;H)}.$$

Teoremin şərtinə görə $q<1$ olduğundan $E+L_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)L_0^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ operatorunun $L_2\left(R^n;H\right)$ fəzasında kəsilməz tərs operatorunun olduğunu alırıq.

Nəticədə

$$\omega(x) = \left[E + L_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) L_0^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]^{-1} f(x)$$

yaxud

$$u(x) = L_0^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[E + L_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) L_0^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]^{-1} f(x)$$

olduğunu alarıq. Buradan isə

$$\left\| u\right\|_{W_2^2(R^n;H)} \le const \left\| f\right\|_{L_2(R^n;H)}$$

olduğunu alarıq. Bu isə (1) tənliyinin korrekt həll oluna bilməsini göstərir.

Teorem 3 isbat olundu.

Sonda məqalədə həll edilən məsələnin qoyuluşuna və məsələnin həlli zamanı göstərdiyi köməyə görə elmi rəhbərim professor H.İ.Aslanova öz dərin minnətdarlığımı bildirirəm.

ƏDƏBİYYAT

1. Асланов Г.И. О разрешимости и асимптотическом поведении решений дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Успехи мат. наук, 1993, вып. 4, с. 172 - 173.
2. Асланов Г.И. О разрешимости операторно-дифференциальных уравнений с частными производными в гильбертовом пространстве и некоторых их приме-нениях. Изв. АН Азерб. ССР серия физ. техн. и матем. наук, том XVIII, №4-5, 1997г., с. 9 - 14.
3. Aslanov G. I. Normal solvability of operator-differential equations with partial derivatives in Hillbert space. Proceedings of IMM NAS Azerbaijan, vol. XII, 2000, p. 21-25
4. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения, Мир., 1971, 371 с.

5. Мирзоев С.С. Об одной краевой задачи для операторно-дифференциальных уравнений второго порядка Труды ИММ АН Азерб., 1998, т. 7 (16), с. 154 – 161.
6. Мирзоев С.С., Джафаров И. Дж. О разрешимости одной краевой задачи для операторно-дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных.Матем. заметки, 2012 г., т. 91, №3, с. 470-472.
7. Jafarov I.J. On solvability of one class of partial operator-differential equations,Proceeding of IMM of NAS of Azerbaijan, 2004,vol. 20, p. 57-62.
8. Mirzoev S.S., Jafarov I.J. On solvability of one boundary value problem for second order operator-differential equations, Transactions of NAS of Azerbaijan issue mathematics and mechanics, series physical-technical and mathematics sciences, 2004, vol. 24, No1, p. 177-186.

УДК 517.977.56

ОБ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ НЕГЛАДКОЙ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

К.Б. МАНСИМОВ, М.М. НАСИЯТИ

Институт Систем Управления НАН Азербайджана

Бакинский Государственный Университет

kamilbmansimov@gmail.com, nasiyati_m@mail.ru

АННОТАЦИЯ

Работе исследуется одна линейная двухпараметрическая дискретная задача оптимального управления с негладким критерием качества. Установлены ряд необходимых условий оптимальности первого и второго порядков.

Ключевые слова: задача оптимального управления дискретными системами, необходимое условие оптимальности, особое управление, негладкий функционал.

ON ONE TWOPARAMETRIC LINEAR NOSMOOTH DISCRETE OPTIMAL CONTROL PROBLEM

ABSTRACT

The paper investigates one linear discrete optimal control problem with a nonsmooth quality criterion. A number of necessary conditions for optimality of the first and second orders are established.

Keywords: optimal control problem discrete systems, necessary optimality condition, singular control, nons mooth functional.

XƏTTI HAMAR OLMAYAN BIR DISKRET OPTIMAL IDARƏETMƏ MƏSƏLƏSI HAQQINDA

XÜLASƏ

Məqaqlədə bir xətti hamar olmayan keyfiyyət meyarlı diskret ikiparametrli optimal idarəetmə məsələsi təd-qiq olunmuşdur. Optimallıq üçünbir sıra birinci və ikinci tərtib zəruri şərtlər isbat olunmuşdur.

Açar sözlər: Optimal idarəetmə problemi diskret sistemlər, zəruri optimallik vəziyyəti, tək nəzarət, qeyri-işıqlı funksional.

1. **Введение.**Вработе ставится одна линайная задача оптимального управления описываемая дискретными двухпараметрическими системами при предположении что управляемый процесс является ступенчатой.Рассмотриваемая разностная система уравнений является дискретным аналогом линейного гиперболического уравнения с краевыми условиями Гурса.При этом считается что минимизируемый, терминального типа, функционал является негладкой.Ряд задач оптимального управления дискретными двухпараметрическими системами изучены например вработе [1].

2. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о минимуме терминального функционала

$$S(u)=\sum_{i=1}^{2}\Phi_i\left(z_i\left(t_i, X\right)\right), \tag{2.1}$$

при ограничениях

$$u_i(t,x)\in U_i\subset R^{r_i},\ (t,x)\in D_i,\ i=1,2, \tag{2.2}$$

$$z_i(t+1,\ x+1)=A_i(t,x)z_i(t,x)+B_i(t,x)z_i(t+1,x)+ \\ +C_i(t,x)z_i(t,x+1)+f_i(t,x,u_i(t,x)),\quad i=1,2, \tag{2.3}$$

$$z_1(t_0,x)=\alpha(x),\quad x=x_0,x_0+1,\ldots,X\ ,$$

$$z_1(t,x_0)=\beta_1(t),\quad t=t_0,t_0+1,\ldots,t_1\ ,\ a(x_0)=\beta_1(t_0), \tag{2.4}$$

$$z_2(t_1,x)=G(x)z_1(t_1,x),\quad x=x_0,x_0+1,\ldots,X\ ,$$

$$z_2(t,x_0)=\beta_2(t),\quad t=t_1,t_1+1,\ldots,t_2\ ,\ \beta_2(t_1)=G(x_0)z_1(t_1,x_0).$$

Здесь $\Phi_i(z_i)$, $i=1,2$ – заданные скалярные функции, имеющие производные по направлениям до второго порядка включительно, $A_i(t,x)$, $B_i(t,x)$, $C_i(t,x)$, $i=1,2$ – заданные $(n_i\times n_i)$, $i=1,2$-мерные матричные функции соответственно, $f_i(t,x,u_i)$, $i=1,2$ – заданные n_i, $i=1,2$-мерные вектор-функции непрерывные по совокупности переменных, $G(x)$ – заданная дискретная матричная функция, $\alpha(x)$, $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ – заданные дискретные вектор-функции соответствующих размерностей, U_i, $i=1,2$ заданные непустые и ограниченные множества, $u_i(t,x)$, $i=1,2$ r_i -мерные дискретные вектор-функции, а $\Phi_i(t)$, $i=1,2$ заданные скалярные функции имеющие производные по любому направлению до второго порядка включительно.

Отметим, что от функций $\Phi_i(z_i)$, $i=1,2$ не требуется выполнения условия Липшица.

Пару $u(t,x)=(u_1(t,x),u_2(t,x))$ с вышеперечисленными свойствами назовем допустимым управлением, а $z(t,x)=(z_1(t,x),z_2(t,x))$ – допустимым состоянием.

Здесь будут получены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков в терминах производных по направлениям(см.напр.[2,3]). В случае линейного критерия качества доказано необходимое и достаточное условие оптимальности.

3. Формула приращения и необходимые условия оптимальности. Пусть $(u(t,x),\ z(t,x))$ фиксированный допустимый процесс. Через $(\bar{u}(t,x)=u(t,x)+\Delta u(t,x),\ \bar{z}(t,x)=z(t,x)+\Delta z(t,x))$ обозначим произвольный процесс.

Тогда ясно, что приращение $\Delta z(t,x)$ состояния $z(t,x)$ будет решением следующей задачи:

$$\Delta z_i(t+1,\ x+1)=A_i(t,x)\Delta z_i(t,x)+B_i(t,x)\Delta z_i(t+1,x)+ \\ +C_i(t,x)\Delta z_i(t,x+1)+\left[f_i(t,x,\bar{u}_i(t,x))-f_i(t,x,u_i(t,x))\right],\quad i=1,2, \tag{3.1}$$

$$\Delta z_1(t_0,x)=0,\quad x=x_0,x_0+1,\ldots,X\ ,\Delta z_1(t,x_0)=0,\quad t=t_0,t_0+1,\ldots,t_1, \tag{3.2}$$

$$\Delta z_2(t_1,x)=G(x)\Delta z_1(t_1,x),\quad x=x_0,x_0+1,\ldots,X\ ,$$

$$\Delta z_2(t,x_0)=0,\quad t=t_1,t_1+1,\ldots,t_2.$$

Через $R_i(t,x;\tau,s)$, $i=1,2$ обозначим $(n_i\times n_i), i=1,2$ матричную функцию являющуюся решением матричной разностной системы

$$R_i(t,x;\,\tau-1,s-1)=R_i(t,x;\,\tau,s)A_i(\tau,s)+B_i(\tau-1,s)R_i(t,x;\,\tau-1,s)+ \\ +C_i(\tau,s-1)R_i(t,x;\,\tau,s-1), \tag{3.3}$$

с краевыми условиями

$$\begin{gathered} R_i(t,x;\,\tau-1,x-1)=R_i(t,x;\,\tau,x-1)C_i(\tau,x-1), \\ R_i(t,x;\,t-1,s-1)=R_i(t,x;\,t-1,s)B_i(t-1,s), \\ R_i(t,x;\,t-1,x-1)=E_i\,. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Тогда решение краевой задачи (3.1)-(3.2) по аналогии [1] можно представить в виде

$$\Delta z_1(t,x)=\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_1(t,x;\,\tau,s)\Delta_{\bar{u}_1(\tau,s)}f_1[\tau,s], \tag{3.5}$$

$$\Delta z_2(t,x)=\sum_{\tau=t_1}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_2(t,x;\,\tau,s)\Delta_{v_2(\tau,s)}f_2[\tau,s]+R_2(t,x;\,t_1-1,x-1)z_2(t_1,x)+ \\ +\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[R_2(t,x;\,t_1-1,s-1)-R_2(t,x;\,t-1,s)A_2(t-1,s)\right]\Delta z_2(t_1,s). \tag{3.6}$$

С учетом (3.5) из (3.6) будем иметь:

$$\begin{gathered} \Delta z_2(t,x)=\sum_{\tau=t_1}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_2(t,x;\,\tau,s)\Delta_{v_2(\tau,s)}f_2[\tau,s]+ \\ +\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_2(t,x;\,t_1-1,x-1)G(x)R_1(t_1,x;\,\tau,s)\Delta_{\bar{u}_1(\tau,s)}f_1[\tau,s]+ \\ +\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[R_2(t,x;\,t_1-1,s-1)-R_2(t,x;\,t_1-1,s)A_2(t-1,s)\right]G(s)\times \\ \times\left[\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{\beta=x_0}^{x-1}R_2(t_1,s;\,\tau,\beta)\Delta_{\bar{u}_1(\tau,\beta)}f_1[\tau,\beta]\right]. \end{gathered}$$

Полагая

$$\Omega(t,x;\tau,s)=R_2(t,x;\,t_1-1,x-1)G(x)R_1(t_1,x;\,\tau,s)+ \\ +\sum_{\beta=s+1}^{x-1}\left[R_2(t,x;\,t_1-1,\beta-1)-R_2(t,x;\,t_1-1,\beta)A_2(t_1-1,s)\right]G(\beta)R_1(t_1,\beta;\,\tau,s), \tag{3.7}$$

вышеприведенное представление записывается в виде:

$$\Delta z_2(t,x)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}\Omega(t,x;\,\tau,s)\Delta_{\bar{u}_1(\tau,s)}f_1[\tau,s]+\sum_{\tau=t_1}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_2(t,x;\,\tau,s)\Delta_{\bar{v}_2(\tau,s)}f_2[\tau,s]. \tag{3.8}$$

Отсюда ясно, что

$$\Delta z_1(t_1,X)=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}R_1(t_1,X;\,t,x)\Delta_{\bar{u}_1(t,x)}f_1[t,x], \tag{3.9}$$

$$\Delta z_2(t_2,X)=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Omega(t_2,X;t,x)\Delta_{\bar{u}_1(t,x)}f_1[t,x]+\sum_{\tau=t_0}^{t_2-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}R_2(t_2,X;\tau,s)\Delta_{\bar{u}_2(\tau,s)}f_2[\tau,s].$$

Предположим, что множества

$$f_i(t,x,U_i)=\{\alpha_i\in R^{\gamma_i}:\ \alpha_i=f_i(t,x,v_i),\ v_i\in U\},\ \ i=1,2 \tag{3.10}$$

выпуклы при всех (t,x).

Специальное приращение допустимого управления $u(t,x)=(u_1(t,x),u_2(t,x))'$ определим по формуле

$$\begin{cases}\Delta u_1(t,x;\varepsilon)=v_1(t,x;\varepsilon)-u_1(t,x), & (t,x)\in D_1,\\ \Delta u_2(t,x;\varepsilon)=0, & (t,x)\in D_2.\end{cases} \tag{3.11}$$

Здесь $\varepsilon\in[0,1]$ – произвольное число, а $v_1(t,x;\varepsilon)\in U_1$, $(t,x)\in D_1$ – произвольное допустимое управление такое, что

$$\Delta_{v_1(t,x;\varepsilon)}f_1(t,x)=\varepsilon\,\Delta_{v_1(t,x)}f_1[t,x]. \tag{3.12}$$

(Это возможно в силу выпуклости множества (3.10)).

Через $\Delta z(t,x;\varepsilon)=(\Delta z_1(t,x;\varepsilon),\Delta z_2(t,x;\varepsilon))$ обозначим специальное приращение состояния $z(t,x)=(z_1(t,x),z_2(t,x))$, отвечающее приращению (3.11) управления.

Из представлений (3.9) ясно, что

$$\Delta z_1(t_1,X;\varepsilon)=\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}R_1(t_1,X;t,x)\Delta_{v_1(t,x)}f_1[t,x],$$

$$\Delta z_2(t_2,X;\varepsilon)=\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Omega(t_2,X;t,x)\Delta_{v_1(t,x)}f_1[t,x].$$

Положим

$$\ell_1(v_1)=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}R_1(t_1,X;t,x)\Delta_{v_1(t,x)}f_1[t,x],$$

$$\ell_2(v_2)=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Omega(t_2,X;t,x)\Delta_{v_1(t,x)}f_1[t,x].$$

Вычислим специальное приращение функционала качества с учетом выражений для $\ell_i(v_1)$, $i=1,2$;

$$\Delta S_\varepsilon(u(t,x))=S(u(t,x)+\Delta u(t,x;\varepsilon))-S(u(t,x))=$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\left[\Phi_i(z_i(t_i,X)+\Delta z_i(t_i,X;\varepsilon))-\Phi_i(z_i(t_i,X))\right]=$$

$$=\left[\Phi_1(z_1(t_1,X)+\varepsilon\,\ell_1(v_1))-\Phi_1(z_1(t_1,X))\right]+\left[\Phi_2(z_2(t_2,X)+\varepsilon\,\ell_2(v_1))-\Phi_2(z_1(t_1,X))\right].$$

Отсюда, с учетом на основании формулы из работ, например, [2, 3] имеем:

$$\Delta S_\varepsilon(u(t,x)) = \varepsilon \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \Phi_i(z_i(t_i, X))}{\partial \ell_i(v_1)} + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 \Phi_i(z_i(t_i, X))}{\partial \ell_i(v_1)^2} + o(\varepsilon^2). \tag{3.13}$$

Из разложения (3.13) сразу следует, что

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \Phi_i(z_i(t_i, X))}{\partial \ell_i(v_1)} \geq 0. \tag{3.14}$$

Далее, по аналогии с (3.11) положим

$$\begin{cases} \Delta u_1(t,x;\mu) = 0, \quad (t,x) \in D_1, \\ \Delta u_2(t,x;\mu) = v_2(t,x;\mu) - u_2(t,x), \quad (t,x) \in D_2, \end{cases} \tag{3.15}$$

где $\mu \in [0,1]$ произвольное число, а $v_2(t,x;\varepsilon) \in U_2$, $(t,x) \in D_2$ произвольное число такое, что

$$\Delta_{v_2(t,x;\mu)} f_2[t,x] = \mu \Delta_{v_2(t,x)} f_2[t,x]. \tag{3.16}$$

Здесь $v_2(t,x) \in U$, $(t,x) \in D_2$ – произвольное допустимое управление соответствующее управлению $v_2(t,x;\mu)$.

Через $\Delta z(t,x;\mu) = (\Delta z_1(t,x;\mu), \Delta z_2(t,x;\mu))$ обозначим специальное приращение состояния $z(t,x) = (z_1(t,x), z_2(t,x))$. Из представлений (3.5), (3.8) ясно, что

$$\begin{cases} \Delta z_1(t,x;\mu) = 0, \quad (t,x) \in D_1 \cup (t_1, X), \\ \Delta z_2(t,x) = \mu \sum\limits_{\tau=t_1}^{t-1} \sum\limits_{s=x_0}^{x-1} R_2(t,x;\tau,s) \Delta_{v_2(\tau,s)} f_2[\tau,s]. \end{cases} \tag{3.17}$$

Положим

$$\ell_3(v_2) = \sum_{\tau=t_0}^{t_2-1} \sum_{s=x_0}^{X-1} R_2(t_2, X; \tau, s) \Delta_{v_2(\tau,s)} f_2[\tau,s]$$

и вычислим специальное приращение критерия качества

$$\Delta S_\mu(u(t,x)) = S(u(t,x) + \Delta u(t,x;\mu)) - S(u(t,x)) = \Phi_2(z_2(t_2,X) + \Delta z_2(t_2,X;\mu)) -$$
$$- \Phi_2(z_2(t_2,X)) = \Phi_2(z_2(t_2,X) + \mu \ell_3(v_2)) - \Phi_2(z_2(t_2,X)) =$$
$$= \mu \frac{\partial \Phi_2(z_2(t_2,X))}{\partial \ell_3(v_2)} + \frac{\mu^2}{2} \frac{\partial^2 \Phi_2(z_2(t_2,X))}{\partial \ell_3^2(v_2)} + o(\mu^2). \tag{3.18}$$

При достаточно малых μ из разложения (3.18) следует, что вдоль оптимального процесса $(u(t,x), z(t,x))$

$$\frac{\partial \Phi_2(z_2(t_2,X))}{\partial \ell_3(v_2)} \geq 0. \tag{3.19}$$

Сформулируем результат.

Теорема3.1. Если множества (3.10) выпуклы, то для оптимальности допустимого управления $u(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x))$ в задаче (3.2)-(3.5) необходимо, чтобы выполнялись соотношения (3.19), (3.24) соответственно для всех $v_1(t,x) \in U_1$, $(t,x) \in D_1$ и $v_2(t,x) \in U_2$, $(t,x) \in D_2$.

Дадим понятие особого управления в рассматриваемой задаче.

Определение 3.1. Допустимое управление $u(t,x)=(u_1(t,x),u_2(t,x))$ назовем особым первого порядка управлением в задаче (2.1)-(2.4), если для всех $v_1(t,x)\in U_1$, $(t,x)\in D_1$ и $v_2(t,x)\in U_2$, $(t,x)\in D_2$ выполняются соответственно соотношения

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\Phi_i(z_i(t_i,X))}{\partial\ell_i(v_1)}\equiv 0,$$

$$\frac{\partial\Phi_2(z_2(t_2,X))}{\partial\ell_3(v_2)}=0. \tag{3.20}$$

При выполнении условий (3.20) из разложений (3.13), (3.18) соответственно, следует, что

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2\Phi_i(z_i(t_i,X))}{\partial\ell_i^2(v_1)}\geq 0, \tag{3.21}$$

$$\frac{\partial^2\Phi_2(z_2(t_2,X))}{\partial\ell_3^2(v_2)}\geq 0. \tag{3.22}$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема3.2. Для оптимальности особого, первого порядка управления $u(t,x)=(u_1(t,x),u_2(t,x))$ в задаче (2.1)-(2.4) в случае выпуклости множества (3.10) необходимо, чтобы неравенства (3.21), (3.22) выполнялись соответственно для всех $v_1(t,x)\in U_1$, $(t,x)\in D_1$ и $v_2(t,x)\in U_2$, $(t,x)\in D_2$.

Неравенства (3.21), (3.22) являются необходимыми условиями оптимальности второго порядка в терминах производных по направлениям.

4. Необходимое и достаточное условие оптимальности. Предположим, что в задаче (6)-(9) минимизируемый функционал является линейным, т.е.

$$S(u)=\sum_{i=1}^{2}g_i' z_i(t_i,X), \tag{4.1}$$

где g_i, $i=1,2$ – заданные n_i, $i=1,2$-мерные соответственно, постоянные векторы.

В этом случае приращение критерия качества (27) записывается в виде

$$\Delta S(u)=\sum_{i=1}^{2}g_i'\,\Delta z_i(t_i,X).$$

Учитывая представления (2.5)-(2.8), отсюда будем иметь:

$$\Delta S(u)=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}g_1' R_1(t_1,X,t,x)\Delta_{\bar u_1(t,x)}f_1[t,x]+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}g_2'\,\Omega(t_2,X,t,x)\Delta_{\bar u_1(t,x)}f_1[t,x]+$$
$$+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}g_2' R_2(t_2,X;\,t,x)\Delta_{\bar u_2(t,x)}f_2[t,x]=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\left[g_1' R_1(t_1,X;t,x)+g_2'\,\Omega_1(t_2,X,t,x)\right]\times$$
$$\times\Delta_{\bar u_1(t,x)}f_1[t,x]+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}g_2' R_2(t_2,X;\,t,x)\Delta_{\bar u_2(t,x)}f_2[t,x].$$

Положим

$$H_i(t,x,u_i,\psi_i)=\psi_i' f_i(t,x,u_i),\ \ i=1,2,$$

$$\psi_1(t,x)=-R_1'(t_1,X;t,x)g_1-\Omega_1'(t_2,X,t,x)g_2,$$

$$\psi_2(t,x)=-R_2'(t_2,X;t,x)g_2. \tag{4.2}$$

Тогда формула приращения записывается в виде

$$\begin{aligned}\Delta S(u)=&-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Delta_{\bar{u}_1(t,x)}H_1\left(t,x,z_1^0(t,x),u_1^0(t,x),\psi_1^0(t,x)\right)-\\&-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Delta_{\bar{u}_2(t,x)}H_2\left(t,x,z_2^0(t,x),u_2^0(t,x),\psi_2^0(t,x)\right).\end{aligned} \tag{4.3}$$

При помощи формулы приращения (4.3) рассуждениями, аналогичными например из [1], доказывается

Теорема 4.1. *Для оптимальности допустимого управления* $(u(t,x),z(t,x))$ в задаче (2.1)-(2.4), (4.1) необходимо и достаточно, чтобы неравенство

$$\begin{aligned}&\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Delta_{v_1(t,x)}H_1(t,x,z_1(t,x),u_1(t,x),\psi_1(t,x))\le 0\ ,\\&\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Delta_{v_2(t,x)}H_2(t,x,z_2(t,x),u_2(t,x),\psi_2(t,x))\le 0\end{aligned} \tag{4.4}$$

выполнялись соответственно для всех $v_1(t,x)\in U_1$, $(t,x)\in D_1$, $v_2(t,x)\in U_2$, $(t,x)\in D_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку. Изд-во БГУ, 2013, 151 с.
2. Демьянов В.Ф.Минимакс: Дифференцируемость по направлениям. Изд-во ЛГУ, Л-д. 1974, 120 с.
3. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квази-дифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990, 432 с.

JOURNAL OF BAKU ENGINEERING UNIVERSITY- MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
2018. Volume 2, Number 2 *Pages 99-107*

УДК 517.977

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ТОЧКИ РАВНОВЕСИЯ ПО НЭШУ В МИНИМАКСНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ ГУРСА-ДАРБУ

Г.Ш. РАМАЗАНОВА

Бакинский Государственный Университет

Институт Систем Управления НАН Азербайджана

АННОТАЦИЯ

Рассматривается задача оптимального управления более чем при двух участниках, описываемая системой нелинейных гиперболических уравнений с краевыми условиями Гурса, а также многоточечными негладкими функционалами качества типа максимум. Получены необходимые условия существования точки равновесия по Нэшу типа принципа максимума Понтрягина.

Ключевые слова: Задача на минимакс, система Гурса-Дарбу, принцип максимума, аналог уравнения Эйлера, аналог условия Лежандра-Клебша, точка равновесия по Нэшу.

NECESSARY CONDITIONS FOR THE EXISTENCE OF A BALANCE POINT AT NESH IN THE MINIMAX CONTROL PROBLEM OF GURSAT-DARBUX SYSTEM

ANNOTATION

An optimal control problem with more than two participants is considered, which is described by a system of nonlinear hyperbolic equations with Goursat boundary conditions, as well as multipoint nonsmooth quality functionals of the maximum type. The necessary conditions for the existence of a Nash equilibrium of the type of the Pontryagins maximum principle are obtained.

Keywords: minimax problem, Goursat-Darboux system, maximum principle, analog of the Euler equation, analog of the Legendre-Klebsch condition, Nash equilibrium point.

QURSA-DARBU SİSTEMLİ MİNİMAKS MƏSƏLƏSİNDƏ NEŞ MƏNADA TARAZLIQ NÖQTƏSİNİN OLMASI HAQQINDA ZƏRURİ ŞƏRTLƏR

XÜLASƏ

Məqalədə Qursa sərhəd şərtli, qeyri-xətli hiperbolik tip tənliklərlə təsvir olunmuş, maksimum tipli çoxnöqtəli hamar olmayan keyfiyyət meyyarlı, ikidən çox iştirakçı olan optimal idarəetmə məsələsinə baxılmışdır. Neş mənada tarazlıq nöqtəsinin varlığı haqqında Pontryaginin maksimum prinsipi formasında zəruri şərtlər alınmışdır.

Açar sözlər: minimax problemi, Goursat-Darboux sistemi, maksimum prinsip, Euler tənlikinin analogu, Legendre-Klebsch vəziyyətinin analogu, Naş balansı nöqtəsi.

1. Введение. Развитие математической теории оптимального управления системами с распределенными параметрами начиналась с изучения оптимизационных задач для управляемых систем Гурса-Дарбу.

Для задач оптимизации системы Гурса-Дарбу А.И. Егоровым были получены, одним из первых, в классе распределенных систем необходимые условия оптимальности типа принципа максимума Понтрягина (см. [1, 2]). Впоследствии вопросы вывода и исследования необходимых условий оптимальности типа принципа максимумаПонтрягина для задач оптимального управления системами Гурса-Дарбу при различных предположениях рассматривались в работах [3-11] и др. (см. обзоры [7, 11-14]).

В последние годы большое внимание уделяется исследованию некоторых задач оптимального управления негладкими системами (с недифференцируемыми правыми частями уравнений связи или же функции качества по вектору состояния) (см. напр. [15-19]).

Обзор соответствующих работ имеется, например, в [15-19] и др.

В данной статье рассматривается одна задача оптимального управления для нелинейной управляемой системы Гурса-Дарбу более чем при двух участниках с негладкими многоточечными критериями качества.

Получены различные необходимые условия существования точки равновесия по Нэшу в форме принципа максимума Понтрягина. Изучены отдельные частные случаи. Получены различные необходимые условия оптимальности первого порядка.

2. Постановка задачи. Пусть управляемая система описывается системой нелинейных гиперболических уравнений

$$z_{tx} = f\left(t,x,z,z_t,z_x,u_1,u_2,u_3,\ldots,u_m,y\right), \tag{1}$$

с краевыми условиями Гурса

$$\begin{aligned} z(t_0,x,y) &= a(x,y), \quad x\in[x_0,x_1],\\ z(t,x_0,y) &= b(t,y), \quad t\in[t_0,t_1], \end{aligned} \tag{2}$$

$$a(x_0,y)=b(t_0,y).$$

Здесь $f\left(t,x,z,z_t,z_x,u,y\right)$ – заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по $\left(z,z_t,z_x\right)$, $y\in Y\subset R^m$ – параметр из некоторого ограниченного и замкнутого множества $Y\subset R^m$, $a(x,y)$, $b(t,y)$ – заданные непрерывные вектор-функции по совокупности переменных вместе с $a_x(x,y)$, $b_t(t,y)$, $u_i=u_i(t,x)$, $i=\overline{1,m}$ – r-мерная управляющая функция удовлетворяющая условию

$$u_i(t,x)\in U_i\subset R^r,\ (t,x)\in D=[t_0,t_1]\times[x_0,x_1],\ i=\overline{1,m},$$

где U_i заданное ограниченое множество.

Следуя, например, [6, с. 1158] вектор-функцию $u_i(t,x)$ назовем допустимым управлением, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $u_i(t,x)$ непрерывна на D за исключением, может быть, конечного числа линий, где допускаются разрывы первого рода.
2) Каждая линия разрыва $u_i(t,x)$ кусочно-непрерывна и ее пересечение с любой прямой, параллельной сторонам прямоугольника D, состоит из конечного числа точек или отрезков.

При выполнении этих условий каждому допустимому управлению $u_i(t,x)$ соответствует непрерывное решение $z(t,x)$ системы (3)-(4) причем, производные $z_t(t,x)$, $z_x(t,x)$ могут иметь разрывы первого рода лишь на характеристиках уравнения (1), параллельных координатным осям.

Пусть заданы функционалы

$$S_j(u_1,u_2,...,u_m)=\max_{y\in Y}\varphi_j\left(z(T_1,X_1),z(T_2,X_2),...,z(T_k,X_k),y\right),\ j=\overline{1,n}, \tag{3}$$

где $\varphi_j(z_1,z_2,...,z_k,y)$ -заданная непрерывно дифференцируемая по $(z_1,z_2,...,z_k)$ в $R^{k\cdot n}\times R^m$ скалярная функция, а $z(T_i,X_i)$, $i=\overline{1,n}$ $(t_0<T_1<T_2<...<T_k\le t_1,\ x_0<X_1<X_2<...<X_k\le x_1)$, з $i=\overline{1,k}$ заданные точки.

Допустим, что управление $u_j(t,x)$ находится в распоряжении j-го лица (игрока P_j), причем каждый игрок P_j стремится минимизировать функционал $S_j(u_1,u_2,...,u_m)$.

Следуя например работам [20-22] введем

Определение. Набор допустимых управлений $(u_1^o,u_2^o,...,u_m^o)$ назовем почкой равновесия по Нэшу для задачи (1)-(3) (игра (1)-(3)) если для каждого j, $j=\overline{1,m}$ выполняется соотношение

$$S_j(u_1^o,u_2^o,...,u_m^o)=\min_{u_j\in U_j}S_j(u_1^o,u_2^o,...,y_{j-1}^o,u_j,u_{j+1}^o,...,u_m^o). \tag{4}$$

Ниже доказывается ряд необходимых условий существования точки равновесия по Нэшу для игры (1)-(3).

Задачи аналогичные рассматриваемой задаче (1)-(3) в случае обыкновенных динамических систем с гладким критерием качества рассматривались например в работах [21, 22].

3. Основные результаты. В дальнейщем с,читаем, что в задаче (1)-(3) существует управление $u_j^o(t,x)$, соответствующее семейству решений $\{z^o(t,x;\,y),\ y\in Y\}$ краевой задачи (1)-(2).

Введем в рассмотрение множества максимумов [16,18]

$$Y_{0j}=\{y\in Y:\ \varphi_j(z^o(T_1,X_1,y),...,z^o(T_k,X_k,y),\ y)\}=\max_{\bar y\in Y}\varphi_j(z^o(T_1,X_1,\bar y),...,z^o(T_k,X_k,\bar y),\ \bar y).$$

Можно показать, что Y_{0j} есть ограниченное и замкнутое множество [18].

Пусть $(\theta,\xi)\in[t_0,t_1)\times[x_0,x_1)$, $(\theta,\xi)\ne(T_i,X_i)$, $i=\overline{1,k}$ произвольная точка непрерывности управления $u_j^o(t,x)$, а $\varepsilon>0$ достаточно малое произвольное число.

Через

$$\bar u_j(t,x;\varepsilon)=u_j^o(t,x)+\Delta u_j(t,x;\varepsilon)=\begin{cases}v_j,\ (t,x)\in D_\varepsilon=[\theta,\theta+\varepsilon)\times[\xi,\xi+\varepsilon),\\ u_j^o(t,x),\quad (t,x)\in D\setminus D_\varepsilon\end{cases} \tag{5}$$

определим «возмущенное управление».

Вычислим специальное приращение функционала $S_j(u_1^o,u_2^o,...,u_{j-1}^o,u_j,u_{j+1}^o,...,u_m^o)$.

Через $\bar z(t,x;y,\varepsilon)=z^o(t,x;y)+\Delta z(t,x;y,\varepsilon)$ обозначим «возмущенный» вектор состояния $z(t,x;y)$.

Из (3)-(4) ясно, что $\Delta z(t,x,y;\varepsilon)$ является решением линеаризованной задачи

$$\begin{aligned}\Delta z_{tx}(t,x,y;\varepsilon)= f_z(t,x,y)\Delta z(t,x,y;\varepsilon)+ f_{z_t}(t,x,y)\Delta z_t(t,x,y;\varepsilon)+\\ + f_{z_x}(t,x,y)\Delta z_x(t,x,y;\varepsilon)+\Delta_{\bar u_j(t,x)} f(t,x,y)+\Delta_{\bar u_j(t,x)} f_z(t,x,y)\Delta z(t,x,y)+\\ +\Delta_{\bar u_j(t,x)} f_{z_t}(t,x,y)\Delta z_t(t,x,y)+\Delta_{\bar u_j(t,x)} f_{z_x}(t,x,y)\Delta z_x(t,x,y)+\\ +o_1(\|\Delta z(t,x,y;\varepsilon)\|+\|\Delta z_t(t,x,y;\varepsilon)\|+\|\Delta z_x(t,x,y;\varepsilon)\|),\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}&\Delta z(t_0,x,y;\varepsilon)=0,\ x\in[x_0,x_1],\\ &\Delta z(t,x_0,y;\varepsilon)=0,\ t\in[t_0,t_1].\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь и в дальнейшем используются обозначения типа

$$f_z(t,x,y)\equiv f_z\big(t,x,z^o(t,x,y),z_t^o(t,x,y),z_x^o(t,x,y),u_1^o(t,x),\ldots,u_m^o(t,x),y\big),$$

$$f_{z_t}(t,x,y)\equiv f_{z_t}\big(t,x,z^o(t,x,y),z_t^o(t,x,y),z_x^o(t,x,y),u_1^o(t,x),\ldots,u_m^o(t,x),y\big),$$

$$f_{z_x}(t,x,y)\equiv f_{z_x}\big(t,x,z^o(t,x,y),z_t^o(t,x,y),z_x^o(t,x,y),u_1^o(t,x),\ldots,u_m^o(t,x),y\big),$$

$$\begin{aligned}\Delta_{\bar u_j(t,x)} f(t,x,y)\equiv\\ \equiv f\big(t,x,z^o(t,x,y),z_t^o(t,x,y),z_x^o(t,x,y),u_1^o(t,x),\ldots u_{j-1}^o(t,x),\bar u_j(t,x),u_{j+1}^o(t,x),\ldots,u_m^o(t,x),y\big)-\\ - f\big(t,x,z^o(t,x,y),z_t^o(t,x,y),z_x^o(t,x,y),u_1^o(t,x),\ldots u_{j-1}^o(t,x),\bar u_j(t,x),u_{j+1}^o(t,x),\ldots,u_m^o(t,x),y\big),\end{aligned}$$

а величина $o_1(\cdot)$ определяется из разложения

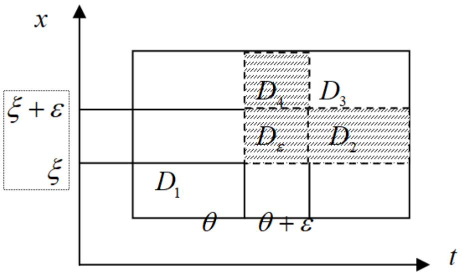
$$\begin{aligned}f\big(t,x,\bar z(t,x,y),\bar z_t(t,x,y),\bar z_x(t,x,y),u_1^o(t,x),\ldots u_{j-1}^o(t,x),\bar u_j(t,x;\varepsilon),u_{j+1}^o(t,x),\ldots,u_m^o(t,x)\big)-\\ - f\big(t,x,z^o(t,x,y),z_t^o(t,x,y),z_x^o(t,x,y),u_1^o(t,x),\ldots u_{j-1}^o(t,x),\bar u_j(t,x),u_{j+1}^o(t,x),\ldots,u_m^o(t,x)\big)=\\ = f_z\big(t,x,z^o(t,x,y),z_t^o(t,x,y),z_x^o(t,x,y),u_1^o(t,x),\ldots u_{j-1}^o(t,x),\bar u_j(t,x),u_{j+1}^o(t,x),\ldots,u_m^o(t,x)\big)\Delta z(t,x,y)+\\ + f_{z_t}\big(t,x,z^o(t,x,y),z_t^o(t,x,y),z_x^o(t,x,y),u_1^o(t,x),\ldots u_{j-1}^o(t,x),\bar u_j(t,x),u_{j+1}^o(t,x),\ldots,u_m^o(t,x)\big)\Delta z_t(t,x,y)+\\ + f_{z_x}\big(t,x,z^o(t,x,y),z_t^o(t,x,y),z_x^o(t,x,y),u_1^o(t,x),\ldots u_{j-1}^o(t,x),\bar u_j(t,x),u_{j+1}^o(t,x),\ldots,u_m^o(t,x)\big)\Delta z_x(t,x,y)+\\ +o_1(\|\Delta z(t,x,y)\|+\|\Delta z_t(t,x,y)\|+\|\Delta z_x(t,x,y)\|).\end{aligned}$$

Из оценок, установленных в работах, например, [4-7] и др. следует, что

$$\begin{aligned}&\|\Delta z(t,x,y;\varepsilon)\|\le\begin{cases}0, & (t,x)\in D_1,\\ L\varepsilon^2, & (t,x)\in D_\varepsilon\cup D_2\cup D_3\cup D_4,\end{cases}\\ &\|\Delta z_t(t,x,y;\varepsilon)\|\le\begin{cases}0, & (t,x)\in D_1,\\ L\varepsilon, & (t,x)\in D_\varepsilon\cup D_2\cup D_4,\\ L\varepsilon^2, & (t,x)\in D_3,\end{cases}\\ &\|\Delta z_x(t,x,y;\varepsilon)\|\le\begin{cases}0, & (t,x)\in D_1,\\ L\varepsilon, & (t,x)\in D_\varepsilon\cup D_2\cup D_4,\\ L\varepsilon^2, & (t,x)\in D_3,\end{cases}\end{aligned} \tag{8}$$

где D_ε, D_1, D_2, D_3, D_4 – подмножества прямоугольника D изображенные на рисунке 1.

Рисунок 1.



Используя оценки (3.4), на основе формулы об интегральном представлении решений линейных гиперболических уравнений с нулевыми краевыми условиями, (см. напр. [13, с. 71; 24, с. 118]) представления решения краевой задачи (3.2)-(3.3) записывается в виде:

$$\Delta z(t,x,y;\varepsilon)=\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} R(t,x;\,\tau,s,y)\Delta_{\bar u_j(\tau,s;\varepsilon)} f(\tau,s,y)ds\,d\tau+o(\varepsilon;\,t,x).$$

Отсюда по теореме о среднем следует, что

$$\Delta z(T_i,X_i,y;\,\varepsilon)=\varepsilon^2\,R(T_i,X_i;\,\theta,\xi,y)\alpha_i(\theta,\xi)\Delta_{v_j} f(\theta,\xi,y)+o(\varepsilon^2). \tag{9}$$

Здесь $\alpha_i(t,x)$-характеристическая функция области $[t_0,T_i]\times[x_0,X_i]$, а $R(t,x;\tau,s,y)$ − $(n\times n)$ матричная функция Римана, линеаризованной системы, являющаяся решением двумерного интегрального уравнения Вольтерра с одномерными слагаемыми [24, 10].

$$\begin{gathered}R(t,x;\,\tau,s,y)=E+\int_{\tau}^{t}\int_{s}^{x} R(t,x;\,\alpha,\beta,y)\,f_z(\alpha,\beta,y)d\alpha\,d\beta+\\+\int_{\tau}^{t} R(t,x;\,\alpha,s,y)\,f_{z_s}(\alpha,s,y)d\alpha+\int_{s}^{x} R(t,x;\,\tau,\beta,y)\,f_{z_\tau}(\tau,\beta,y)d\beta.\end{gathered} \tag{10}$$

Тогда используя свойства функций типа максимум, (см. напр. [16, 23]) при помощи (9) специальное приращение функционала $S_j\left(u_1^o,u_2^o,\ldots,y_{j-1}^o,y_j,y_{j+1}^o,\ldots,u_m^o\right)$ представляется в виде

$$\begin{gathered}\Delta_\varepsilon S_j\left(u_1^o,u_2^o,\ldots,u_m^o\right)=S_j\left(u_1^o,u_2^o,\ldots,u_{j-1}^o,u_j^o+\Delta u_j(t,x;\varepsilon);\ldots,u_m^o\right)-S_j\left(u_1^o,u_2^o,\ldots,u_{j-1}^o,u_j^o,\ldots,u_m^o\right)=\\=\varepsilon^2\max_{y\in Y_{0j}}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(\theta,\xi)\frac{\partial\varphi_j'\left(z^o(T_1,X_1,y),\ldots,z^o(T_k,X_k,y),y\right)}{\partial z_i}R(T_i,X_i;\,\theta,\xi,y)\times\\\times\Delta_{v_j} f(\theta,\xi,y)+o(\varepsilon^2).\end{gathered} \tag{10}$$

Полагая

$$\delta^1 S_j\left(u_j^o;\,\theta,\xi,v_j,y\right)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(\theta,\xi)\frac{\partial\varphi_j'\left(z^o(T_1,X_1,y),\ldots,z^o(T_k,X_k,y),y\right)}{\partial z_i}R(T_i,X_i;\,\theta,\xi,y)\Delta_{v_j} f(\theta,\xi,y) \tag{11}$$

специальное разложение (10)функционала качества записывается в виде

$$\Delta_\varepsilon S_j\left(u_1^o,u_2^o,\ldots,u_m^o\right)=\varepsilon^2\max_{y\in Y_{0j}}\delta^1 S_j\left(u_j^o;\,\theta,\xi,v_j,y\right)+o(\varepsilon^2).$$

Через K_j обозначим множество непрерывных функций $g_j(y)$, отрицательных на Y_{0j}: $K_j=\{g_j(y):\ g_j(y)<0,\ y\in Y_{0j}\}$.

Из условий гладкости, наложенные на данные задачи (1)-(4), функция $\delta^1 S_j(u;\ \theta,\xi,v_j,y)$ непрерывна по y. Кроме того, она не принадлежит множеству K_j. Поскольку в противном случае, не выполнялось бы условие оптимальности $\Delta_\varepsilon S_j(u_1^0,u_1^0,...,u^0{}_m)\geq 0$, при достаточно малых $\varepsilon>0$.

Ясно, что множество K_j выпукло. Поскольку $\delta^1 S_j(u_j^o;\ \theta,\xi,v_j,y)$ не принадлежит K_j, то по теореме об отделимости выпуклых множеств найдется линейный непрерывный функционал $L\in C^*(Y_0)$ такой, что

$$L\left(\delta^1 S_j\left(u_j^o;\ \theta,\xi,v_j,y\right)\right)\geq L_j\left(g_j(y)\right) \tag{12}$$

выполнялось для всех $g_j(y)\in K_j$.

Можно показать, что (см. [18, с. 1385]) $L_j\geq 0$. Далее, используя теорему об общем виде линейного функционала, (см. напр. [25, с. 436]), из неравенства (3.9), получаем, что существует некоторая мера $\mu_j(y)$, сосредоточенная на множестве Y_{0j}, что

$$L\left(\delta^1 S_j\left(u_j^o;\ \theta,\xi,v_j,y\right)\right)=\int\limits_{Y_0}\delta^1 S_j\left(u_j^o;\ \theta,\xi,v_j,y\right)d\left(\mu_j(y)\right)\geq 0 \tag{13}$$

Из соотношения $L_j\geq 0$ следует, что $\mu_j(y)\geq 0$.

Положим

$$\begin{gathered}\psi_j^o(\theta,\xi,y)=\\ =-\sum_{i=1}^{k}R'(T_i,X_i;\ \theta,\xi,y)\frac{\partial\varphi_j\left(z(T_1,X_1,y),...,z^o(T_k,X_k,y),y\right)}{\partial y}\alpha_i(\theta,\xi),\end{gathered} \tag{14}$$

$$H\left(\theta,\xi,z,z_\theta,z_\xi,u_1^o,...,u_m^o,\psi_j^o\right)=\psi_j^{o'}\ f\left(\theta,\xi,z,z_\theta,\xi_\theta,u_1^{\,0},u^0{}_2,...,u_m{}^o,y\right).$$

Тогда соотношение (3.10) записывается в виде

$$\begin{gathered}\int\limits_{Y_{0j}}H\left(\theta,\xi,z^o(\theta,\xi,y),z_\theta^o(\theta,\xi,y),z_\xi^o(\theta,\xi,y),u_1^o(\theta,\xi),...,u_m^o(\theta,\xi),\psi_j^o(\theta,\xi,y),y\right)d\mu_j(y)=\\ =\max_{v_j\in U_j}\int\limits_{Y_{0j}}H\left(\theta,\xi,\ z^o(\theta,\xi,y),z_\theta^o(\theta,\xi,y),z_\xi^o(\theta,\xi,y),u_1^o(\theta,\xi),...,u_{j-1}^o(\theta,\xi),v_j,\right.\\ \left.u_{j+1}^o(\theta,\xi),...,u_m^o(\theta,\xi),\psi_j^o(\theta,\xi,y),y\right)d\mu_j(y),\quad j=\overline{1,m}.\end{gathered} \tag{15}$$

Здесь $\mu_j(y)$ – некоторая неотрицательная мера сосредоточенная на множестве Y_{0j}. Далее, используя (3.6) показывается, что вектор-функция $\psi_j(\theta,\xi,y)$, определенная формулой (3.11), является решением задачи

$$\begin{gathered}\psi_j^o(\theta,\xi,y)=-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(\theta,\xi)\frac{\partial\varphi_j'\left(z^o(T_1,X_1,y),...,z^o(T_k,X_k,y),y\right)}{\partial z_i}+\\ +\int\limits_\theta^{t_1}\int\limits_\xi^{x_1}H_z\left(\tau,s,z^o(\tau,s,y),z_\tau^o(\tau,s,y),z_s^o(\tau,s,y),u_1^o(\tau,s),...,u_j^o(\tau,s),\psi_j^o(\tau,s,y),y\right)d\tau\, ds+\\ +\int\limits_\theta^{t_1}H_{z_s}\left(\tau,\xi,z(\tau,\xi,y),z_\tau^o(\tau,\xi,y),z_s^o(\tau,\xi,y),u_1^o(\tau,\xi),...,u_j^o(\tau,\xi),\psi_j^o(\tau,\xi,y),y\right)d\tau+\\ +\int\limits_\xi^{x_1}H_{z_\tau}\left(\theta,s,z^o(\theta,s,y),z_\tau^o(\theta,s,y),z_s^o(\theta,s,y),u_1^o(\theta,s),...,u_j^o(\theta,s),\psi_j^o(\theta,s,y),y\right)ds.\end{gathered} \tag{16}$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 3.1. При каждом $j=\overline{1,m}$ для точки равновесия по Нэшу $u_j^o(t,x)$ в задаче (2.1)-(2.4)с необходимостью выполняется условие (15), при всех $(\theta,\xi)\in[t_0,t_1)\times[x_0,x_1)$.

Теорема 3.1 является достаточно общим необходимым условием оптимальности первого порядка.

Замечание 3.1. Заметим, что $\mu_j(y)$ зависит, вообще говоря, от θ, ξ, v_j. Но, как отмечено в [18, с. 1386], с помощью многоточечной игольчатой вариации можно показать, что $\mu(y)$ можно выбирать не зависящей от θ, ξ, v_j.

Теперь предположим, что вектор-функция $f(t,x,z,z_t,z_x,u_1,u_2,...,u_m,y)$ непрерывно дифференцируема также по вектору управления u_j, а множества U_j, $j=\overline{1,m}$ выпуклые.

Тогда при помощи теоремы 3.1 доказывается

Теорема 3.2. При сделанных предположениях для того чтобы совокупность $(u_1^o,u_2^o,...,u_m^o)$ была точкой равновесия по Нэшу необходимо, чтобы при каждом $j=1,2,...,m$ условие

$$\int_{Y_0}\frac{\partial H'(t,x,z^o(t,x,y),z_t^o(t,x,y),z_x^o(t,x,y),u_1^o(t,x),u_2^o(t,x),...,u_j^o(t,x),\psi_j^o(t,x,y),y)}{\partial u}u_j^o(t,x)d\mu_j(y)=$$

$$=\max_{v_j\in U_j}\int_{Y_0}\frac{\partial H'(t,x,z^o(t,x,y),z_t^o(t,x,y),z_x^o(t,x,y),u_1^o(t,x),u_2^o(t,x),...,u_j^o(t,x),\psi_j^o(t,x,y),y)}{\partial u}v_j\,d\mu_j(y) \qquad (17)$$

выполнялось для всех $(\theta,\xi)\in[t_0,t_1)\times[x_0,x_1)$, где $\mu_j(y)$ – некоторая неотрицательная мера, сосредоточенная на множестве Y_0, $\psi_j^o(t,x,y)$ – решение сопряженной системы (16).

Наконец рассмотрим случай открытой области управления. Имеет место

Теорема 3.3. Если множества U_j открытые, то для точки равновесия $(u_1^o,u_2^o,...,u_m^o)$ по Нэшу выполняются соотношения

$$\int_{Y_0}\frac{\partial H(t,x,z^o(t,x,y),z_t^o(t,x,y),z_x^o(t,x,y),u_1^o(t,x),u_2^o(t,x),...,u_m^o(t,x),\psi_j^o(t,x,y),y)}{\partial u_j}d\mu(y)=0 \qquad (18)$$

Соотношение (3.15) есть аналог уравнения Эйлера в рассматриваемой задаче.

Следствие 3.1. Если правая часть системы уравнений не зависит от y, то для того чтобы точка $(u_1^o,u_2^o,...,u_m^o)$ была точкой равновесия по Нэшу в рассматриваемой задаче необходимо, чтобыпри каждом для почти всех $(t,x)\in D$ выполнялось аналог уравнения Эйлера

$$\frac{\partial H(t,x,z^o(t,x,y),z_t^o(t,x,y),z_x^o(t,x),u_1^o(t,x),...,u_m^o(t,x),\psi_j^o(t,x))}{\partial u_j}=0, \qquad (19)$$

где $\psi_j^o(t,x)$ является решением сопряженной системы

$$\psi_j^o(t,x)=\int_t^{t_1}\int_x^{x_1}\frac{\partial H(\tau,s,z^o(\tau,s),z_\tau^o(\tau,s),z_s^o(\tau,s),u_1^o(\tau,s),u_2^o(\tau,s),...,u_m^o(\tau,s),\psi_j^o(\tau,s))}{\partial z}d\tau\,ds+$$

$$+\int_t^{t_1}\frac{\partial H(\tau,s,z^o(\tau,s),z_\tau^o(\tau,s),z_s^o(\tau,s),u_1^o(\tau,s),u_2^o(\tau,s),...,u_m^o(\tau,s),\psi_j^o(\tau,s))}{\partial z_x}d\tau+$$

$$+\int_x^{x_1}\frac{\partial H\left(\tau,s,z^o(\tau,s),z_\tau^o(\tau,s),z_s^o(\tau,s),u_1^o(\tau,s),u_2^o(\tau,s),...,u_m^o(\tau,s),\psi_j^o(\tau,s)\right)}{\partial z_t}ds-$$

$$-\int_{Y_0}\alpha_i(t,x)\frac{\partial\varphi_j\left(z^o(T_1,X_1,y),...,z^o(T_k,X_k,y),y\right)}{\partial a_i}d\mu_j(y).$$

Следствие 3.2. Оптимальные управления ,то есть точка равновесия поНэшу, в задаче (2.1)-(2.4) с открытой областью U удовлетворяют при почти всех $(t,x)\in D$ неравенству

$$\int_{Y_0}w_j'\frac{\partial^2 H\left(t,x,z^o(t,x,y),z_t^o(t,x,y),z_x^o(t,x),u_1^o(t,x),u_2^o(t,x),...,u_m^o(t,x),\psi_j^o(t,x),y\right)}{\partial u_j^2}w_j\,d\mu_j(y)\le 0 \qquad (20)$$

при каждом для всех $w_j\in R^r$.

Соотнощение (19) есть аналог уравнения Эйлера, а неравенство (20) есть аналог условия Лежандра-Клебша, в рассматриваемой игровой здаче в процессах описываемые нелинейными системами Гурса-Дарбу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров А.И. Об оптимальном управлении процессами в некоторых системах с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика. 1964, № 5, с. 613-623.
2. Егоров А.И. Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами и некоторые задачи теории инвариантности // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965, т. 29, № 6, с. 1205-1260.
3. Ахмедов К.Т., Ахиев С.С. Необходимые условия оптимальности для некоторых задач теории оптимального управления // Докл. АН Азерб. ССР. 1972, т. 28, № 5, с. 12-16.
4. Плотников В.И., Сумин В.И. Оптимизация объектов с распределенными параметрами, описываемых системами Гурса-Дарбу // Журн. Вычисл. матем. и мат. физики. 1972, № 1, с. 61-67.
5. Срочко В.А. Условия оптимальности типа принципа максимума в системах Гурса-Дарбу // Сиб. Матем. журн. 1984, № 2, с. 56-65.
6. Ащепков Л.Т., Васильев О.В. Об оптимальности особых управлений в системах Гурса-Дарбу // Журн. Вычисл. математики и мат. физики. 1975, т. 15, № 5, с. 1157-1167.
7. Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А. Методы оптимизации и их приложения. Часть 2. Новосибирск. Наука, 1990, 151 с.
8. Васильев О.В. Об одном алгоритме оптимизации в системах Гурса-Дарбу // Проблемы оптимального управления. Минск. 1991, с. 264-277.
9. Гасанов К.К. Принцип максимума для процессов с распределенными параметрами и запаздывающими аргументами // Дифференц. уравнения. 1973, № 4, с. 743-746.
10. Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности особых процессов в задачах оптимального управлениия // Автореф. дисс. на соиск. уч. степени д-ра физ.-мат. наук. Баку, 43 с.
11. Сумин В.И. Функциональные Вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Часть 1. Вольтерровы уравнения и управляемые начально-краевые задачи. Нижний Новгород. Изд-во ННГУ. 1992, 110 с.
12. Меликов Т.К. Особые в классическом смысле управления в системах Гурса-Дарбу // Баку. Изд-во «ЭЛМ», 2003, 96 с.
13. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса-Дарбу. Баку, Изд-во «ЭЛМ», 2010, 360 с.
14. Срочко В.А. Вариационный принцип максимума и методы линеаризации в задачах оптимального управления. Иркутск. Изд-во ИГУ, 1989, 160 с.
15. Демьянов В.Ф., Виноградова Т.К., Никулина В.Н. и др. Негладкие задачи теории оптимизации и управления. Л. Изд-во Ленингр. ун-та. 1982, 324 с.

16. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М. Наука. 1990, 432 с.
17. Demyanov V.F., Nikulina V.N., Shablinskaya I.R. Quasidifferentiable problems in optimal control // Intern. Institute for applied systems analysis. A-2361. Luxenburg. Austria. 12 p.
18. Альсевич В.В. Необходимые условия оптимальности для минимаксных задач оптимизации // Дифференц. уравнения. 1976, № 8, с. 1384-1391.
19. Демьянов В.Ф., Никулина В.Н., Шаблинская И.Р. Задача оптимального управления с негладкими дифференциальными связями // Дифференц. уравнения. 1985, № 8, с. 1324-1330.
20. Нэш Дж.Ф. Бескоалиционные игры. В сб. Матричные игры. М. Физматлит. 1961, с. 205-221.
21. Карвовский Г.С., Кузнецов А.Д. Принцип максимума в теории дифференциальных игр N-лиц. Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1966, №6, с. 13-16.
22. Гороховик В.В. К теории дифференциального игр нескольких лиц // Дифференц. уравнения. 1972, № 3, с. 424-434.
23. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. М. Наука, 1972, 368 с.
24. Ахиев С.С., Ахмедов К.Т. Об интегральном представлении решений некоторых систем дифференциальных уравнений // Изв. АН Азерб. ССР. Сер.физ.-техн.и матем.наук. 1973, № 2, с. 116-120.
25. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М. ИЛ., 1962, 681 с.

JOURNAL OF BAKU ENGINEERING UNIVERSITY- MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
2018. Volume 2, Number 2 *Pages 108-114*

UOT: 002.

İNTERNETDƏ ÜNVANLAŞDIRMA(TCP/IP PROTOKOLU)

Rüfanə İBRAHİMLİ Əzim qızı
Azərbaycan Dövlət Texnologiya Universiteti
rufaneibrahimli02220@gmail.com
r.ibrahimli@uteca.edu.az

XÜLASƏ

Məqalədə internet protokolları,onların iş prinsipləri, əsas xüsusiyyətləri, TCP/İP komponentləri, onların nəzarət sahəsi, istifadə ünvanları, protokolların təyinatı, dinamik və statik İP adresləri şərh olunmuşdur. Qeyd edilmişdir ki, TCP / IP protokolları İnternetdə bir neçə ara şəbəkələr, şlüzlər və marşrutlaşdırıcılar vasitəsilə kompüterlər arası marşrut tapmağa məsuliyyət daşıyır və bu marşrutlar boyunca məlumat bloklarının ehtibarlı köçürülməsini təmin edən vasitədir.

Açar sözlər: IP – Internet protocol. TCP – Transmission Control Protocol –Məlumatların ötürülməsini idarəedən protokol. OCI-Object Content Information. UDP-İstifadəçi Datagram Protokolu. HTTP – HyperText Transfer Protocol – Hipermətin ötürən protokol

ИНТЕРНЕТ-ИДЕНТИФИКАЦИЯ (ПРОТОКОЛ TCP / IP)

РЕЗЮМЕ

В статье описываются интернет-протоколы, их принципы работы, основные функции, компоненты TCP / IP, область управления, адреса использования, назначение протоколов, динамические и статические IP-адреса. Было отмечено, что протоколы TCP / IP отвечают за поиск межкомпьютерных маршрутов в Интернете через несколько промежуточных сетей, шлюзов и маршрутизаторов и являются инструментом, обеспечивающим передачу информационных блоков по этим маршрутам.

Ключевые слова: IP - интернет-протокол.TCP - протокол управления передачей.OCI - Протокол управления содержимым объекта.UDP - протокол дейтаграмм пользователя.HTTP - протокол передачи гипертекста - протокол передачи гипертекста.

INTERNET IDENTIFICATION (TCP / IP PROTOCOL)

ABSTRACT

The article describes Internet protocols, their principles of operation, basic functions, TCP / IP components, management scope, usage addresses, protocol assignment, dynamic and static IP addresses. It was noted that TCP / IP protocols are responsible for searching intercomputer routes on the Internet through several intermediate networks, gateways and routers and are a tool that ensures the transmission of information blocks on these routes.

Key words: IP -Internet protocol. TCP-Transmission Control Protocol-protocol providing data transmission. OCI – Object Content Information.UDP - User Datagram Protocol. HTTP – Hyper Text Transfer Protocol.

Giriş

Protokol- müxtəlif qovşaqlarda eyni səviyyədə şəbəkə komponentləri ilə mübadilə edən xəbərlərin ardıcıllığını və formatını təyin edən qaydalardır. Sadə dildə desək, protokol şəbəkədə kompüterlərin bir-biri ilə ünsiyyət dilidir.[1, s.388.]

Yəni, müxtəlif tipli, müxtəlif əməliyyat sistemli kompüterlərin ünsiyəti nəticəsində ortaya uyğunluq problemi çıxır. Bu problemi aradan qaldırmaq məqsədi ilə informasiya mübadiləsinin təşkili üçün vahid qaydalar, yəni vahid standart (protokol) işlənmişdir.Bu protokolda TCP/İP protokoludur.

TCP / IP (Şəbəkə İdarəetmə Protokolu / İnternet Protokolu) İnternet və digər oxşar şəbəkələr üçün istifadə olunan şəbəkə protokolu yığımıdır (məsələn, bu protokol LAN-da istifadə olunur). TCP / IP müddəti iki protokolu - Transmission Control Protocol (TCP) və İnternet Protokolu (IP) adlarını təmin edir. TCP / IP tək bir proqram deyildir, çünki bir çox istifadəçi səhvən inanır. Əksinə, TCP / IP bir şəbəkə üzərində məlumat ötürmək üçün nəzərdə tutulmuş birbaşa əlaqəli protokolların bütün ailəsinə aiddir və eyni zamanda şəbəkənin vəziyyəti haqqında məlumat verir. TCP / IP şəbəkənin bir proqram komponentidir. TCP /IP ailənin hər bir hissəsi xüsusi bir vəzifəni yerinə yetirir: e-poçt göndərmək, uzaq giriş xidmətlərinin göstərilməsi, fayl göndərilməsi, marşrutlaşdırma mesajları və şəbəkə uğursuzluqlarını idarə etmək.

TCP / IP protokollarıİnternetdə bir neçə ara şəbəkələr, şlüzlər və marşrutlaşdırıcılar vasitəsilə bir kompüterdən digərinə marşrut tapmağa məsuliyyət daşıyır və bu marşrutlar boyunca məlumat bloklarının ehtibarlı köçürülməsinitəmin edir [2].

TCP / IP adı iki ən mühüm protokoldan gəlir:

IP (İnternet Protokolu) - məlumat paketini node-dan node-a ötürməkdən məsuliyyət daşıyır. IP hər bir paketin dörd baytlı təyinat ünvanı (IP ünvanı) əsasında göndərilir..

TCP (ötürülən idarəetmə protokolu) - müştəridən serverə məlumatların **ehtibarlı**çatdırılmasına məsuliyyət daşıyır. Məlumatlar ara şəbəkədə itə bilər. TCP/İP protokolusəhvləri və ya itkin məlumatları aşkar etmək imkanına malikdir. Nəticədə, məlumatların doğru və tam qəbul ediləcəyi qədər bir təkrar ötürmə tələb etmək qabiliyyətinə malikdir..

TCP / IP protokolunun əsas xüsusiyyətləri aşağıdakılardır.

- Tanınmış istifadəçi xidmətləri üçün istifadə olunan yüksək səviyyəli standart protokollar.
- Proqram və avadanlıqlardan asılı olmayaraq standartları inkişaf etdirmək və dəyişdirmək imkanını yaradan açıq protokol standartları;
- unikal ünvanlaşma sistemi;
- istifadə olunan fiziki kommunikasiya kanalından müstəqillik;

TCP / IP protokolu istifadəsinin prinsipi OSI modelində olduğu kimi eynidir, yuxarı səviyyəli məlumatlar aşağı səviyyəli paketlərə daxil edilir.Paket yuxarıdan aşağıya doğru hərəkət edərsə,hər səviyyədə xidmət məlumatı bir başlıq və ehtimal ki, bu paketə əlavə olunur (mesajın sonunda yerləşdirilən məlumat). Bu proses encapsulation adlanır. Xidmət məlumatı uzaq bir kompüterdə eyni səviyyədə bir obyekt üçün nəzərdə tutulub. Onun formatı və təyinatı bu səviyyənin protokolları ilə müəyyən edilir.

Bu dəfəpaket aşağıdan yuxarı qalxarsa,xidmət məlumatı başlıq və məlumatlara bölünür. Əvvəlcə paket başlığı analiz edilir sonra xidmət məlumatları ayrılır və ona uyğun olaraq məlumat yüksək səviyyəli obyektlərdən birinə yönəldilir. Yüksək səviyyə öz növbəsində bu məlumatları təhlil edir və onları bir başlıq və məlumatlara bölür sonra başlıq təhlil edilir və yüksək səviyyəli xidmət məlumatlarına ayrılır. Bu proses bütün xidmət məlumatlarından azad olan istifadəçi məlumatları tətbiq səviyyəsinə çatdırana qədər yenidən təkrarlanır.Ancaq paket tətbiq səviyyəsinə çatmır. Xüsusilə, əgər kompüter göndərici və alıcı arasında yolda ara stansiya kimi işləyirsə, obyektin müvafiq səviyyədə xidmət məlumatını təhlil edərkən, bu səviyyədə paketin ona ünvanlanmadığını müəyyənləşdirir. Nəticədə obyekt paketin yönləndirilməsi üçün zəruri tədbirlər görəcək həmin ünvana göndərə bilər və ya səhv mesajla göndərənə qayıdır. Amma bir və ya digər şəkildə məlumatların yuxarı səviyyəyə çatdırılması həyata keçirilməyəcək.

TCP /IP həmçinin digər iki əsas İnternet FTP və Telnet tətbiqləri ilə yaxından əlaqələndirilir. Nəhayət, İnternetin bir sıra əsas konsepsiyalarının bilikləri, bu sistemin mürəkkəbliyinin dərəcəsini tam olaraq qiymətləndirməyə kömək edəcək, eyni zamanda, daxili yanma mühərrikinin işləməsi ideyası avtomobilin qurğusuna hörmət hiss etməyinizə kömək edir.

TCP / IP şəbəkə üzrə məlumat kommunikasiya protokollarının ailənin adıdır. Protokol, istehsal olunmuş avadanlıq və proqram təminatının uyğunluğunu təmin etmək üçün bütün şirkətlərə uyğun olmalıdır,bu protokolun bir sıra qaydalardır. Bu qaydalar, TCP / IP çalışan bir Digital Equipment maşınının TCP / IP ilə çalışan bir Compaq PC ilə ünsiyyət qurmasını təmin edir. Bütün sistemin işləməsi üçün müəyyən standartlar təqib olunarsa, proqramın və ya proqramın istehsalçısı olan kimsənin əhəmiyyəti yoxdur. Açıq sistem ideologiyası standart avadanlıq və proqramlardan istifadə edir.

Protokol, bir tətbiqin başqa bir ünsiyyət ilə necə əlaqə qurduğunu müəyyənləşdirir. Bu proqram linki dialoqa bənzəyir: "Mən sizə bu məlumatı göndərirəm, sonra məni göndərir, sonra onu göndərirəm. Bütün bitləri əlavə etmək və ümumi nəticəni geri verməliyəm və probleminiz varsa, mənə göndərin müvafiq mesaj. " Protokol, paketin müxtəlif hissələrinin məlumatın ötürülməsini necə idarə etdiyini müəyyənləşdirir. Protokol, paketin e-poçt mesajı, xəbər qrupu məqaləsi və ya xidmət mesajı olub olmadığını göstərir. Protokol standartları, gözlənilən gözlənilməz hallar nəzərə alınmaqla tərtib edilir. Protokol həmçinin səhvlərin idarə edilməsi qaydalarını da əhatə edir.

TCP / IP-nin istifadəsi qlobal İnternet ilə məhdudlaşmır. Dünyada ən çox istifadə edilən şəbəkə protokolları həm böyük korporativ şəbəkələrdə və həm də az sayda kompüter ilə yerli şəbəkələrdə istifadə olunur.Qeyd edildiyi kimi, TCP / IP bir protokol deyil, ailəsi. Niyə TCP / IP termini istifadə edirsiniz, baxmayaraq ki, bu TCP və ya IP-dən başqa xidmətə aiddir? Şəbəkə protokollarının bütün ailənini müzakirə edərkən adətən ümumi adı istifadə olunur. Ancaq bəzi istifadəçilər, TCP / IP-yə istinadən, ailənin protokollarının yalnız bir hissəsini nəzərə alırlar: onlar dialoqdakı digər tərəfin nə olduğunu başa düşdüyünü güman edirlər.

Əslində söhbət mövzusuna daha dəqiqlik gətirmək üçün xidmətlərin hər birini adından çağırmaq daha xeyirlidir.

TCP / IP komponentləri

TCP / IP-yə daxil olan müxtəlif xidmətlər və onların funksiyaları yerinə yetirilən tapşırıq növlərinə görə təsnif edilə bilər. Aşağıdakı protokol qruplarının təsviri və onların məqsədi.

Nəqliyyat protokolu iki maşın arasında məlumat ötürülməsini nəzarət edir.

- TCP (Transmissiya İdarəetmə Protokolu). Kompüterlərin göndərilməsi və qəbul edilməsi arasında məntiqi bir əlaqə əsasında məlumat ötürülməsini dəstəkləyən bir protokol.
- UDP (İstifadəçi Datagram Protokolu). Mantıksal bir əlaqə yaratmadan məlumatların ötürülməsini dəstəkləyən bir protokol. Bu, alıcı və göndəricinin kompüterləri arasında əvvəllər əlaqə yaratmadan məlumatların göndərilməsini nəzərdə tutur. Bu mesajın heç bir mövcud olmadığı təqdirdə heç bir zəmanət olmadığı zaman, bəzi ünvana poçt göndərməklə bir analoq çəkə bilərsiniz. (İki maşın həm İnternetə bağlıdır, həm də mantıksal bir əlaqə vasitəsilə bir-biri ilə ünsiyyət etməyəcəklər.)

Routing protokolları məlumatın ünvanlanmasını idarə edir və təyinatın ən yaxşı yolunu müəyyən edir. Onlar həmçinin böyük mesajları bir neçə qısa mesaja bölə bilərlər ki, bu da ardıcıl ötürülən və təyinatlı kompüterdə vahid bir vahid halına gətirilir.

- IP (İnternet Protokolu). Həqiqi məlumat ötürülməsini təmin edir.
- ICMP (Internet Control Message Protocol). IP-lərin statusu mesajlarını, məsələn, marşrutları təsir edən şəbəkə donanımında olan səhvlər və dəyişikliklər.
- RIP (Routing İnformasiya Protokolu). Bir mesajı çatdırmaq üçün ən yaxşı marşrutu müəyyən edən bir neçə protokoldan biri.
- OSPF (Open Shortest Path First). Marşrutları müəyyən etmək üçün alternativ protokol.
  Şəbəkə ünvanı dəstəyi, unikal ədəd və adı olan bir maşın müəyyən etmək üçün bir yoldur.
- ARP (Ünvanlı Çözünürlük Protokolu).
  Ağdakı maşınların unikal ədədi ünvanlarını müəyyən edir.
- DNS (Domain Name System). Nömrələrin ünvanlarını maşın adı ilə təyin edir.
- RARP (Adres Çözünürlük Protokolunu Geri Qayıt). Ağdakı maşınların ünvanlarını müəyyən edir, ancaq ARP-nin tərsinə.

Ərizə xidmətləri bir istifadəçi (və ya kompüter) müxtəlif xidmətlərə çıxış əldə etmək üçün istifadə etdiyi proqramlardır. (Daha ətraflı məlumat üçün, bu bölmənin sonrakı "TCP / IP Proqramlar" a baxın.)

- BOOTP (Önyükleme Protokolu), serverdən ilk önyükleme məlumatını oxuyaraq şəbəkə maşınını çəkir.
- FTP (Fayl Aktarımı Protokolu) kompüterlər arasında faylları ötürür.
- TELNET sistemə uzaqdan terminalın girişi təmin edir, yəni bir kompüter istifadəçisi başqa bir kompütere qoşula və uzaq bir maşın klaviaturasında çalışır kimi hiss edə bilər.

Gateway protokolları marşrutlaşdırma mesajlarını və şəbəkə statusu məlumatlarını şəbəkə vasitəsilə, habelə lokal şəbəkələr üçün proses məlumatlarını ötürməyə kömək edir. (Gateway protokolları haqqında daha ətraflı məlumat üçün bu bölmənin sonrakı "Gateway Protokolları" na baxın.)

- EGP (Xarici Gateway Protokolu) xarici şəbəkələr üçün marşrut məlumatını ötürmək üçün istifadə olunur.
- GGP (Gateway-to-Gateway Protokolu) şifrələr arasında marşrutlaşdırma məlumatlarını ötürmək üçün istifadə olunur.
- Daxili şəbəkələr üçün marşrutlaşdırma məlumatlarını ötürmək üçün IGP (Daxili Gateway Protokolu) istifadə olunur.

Digər protokollar yuxarıda göstərilən kateqoriyalara daxil deyil, şəbəkədə mühüm rol oynayır.

- NFS (Şəbəkə Fayl Sistemi), uzaq bir kompüterdə yerli maşında olduğu kimi dizin və faylları istifadə etməyə imkan verir.
- NIS (Şəbəkə İnformasiya Xidməti) şəbəkə üzərində birdən çox kompüter istifadəçiləri haqqında məlumat saxlayır və parolların daxil olmasını asanlaşdırır.
- RPC (Remote Procedure Call) uzaqdan tətbiq olunan proqramların sadə və effektiv bir şəkildə ünsiyyət qurmasına imkan verir.
- SMTP (Simple Mail Transfer Protocol) elektron poçtu maşınlar arasında ötürən bir protokoldur. SMTP, ch haqqında daha ətraflı müzakirə olunur. 13 "İnternetdə e-poçt necə işləyir?"
- SNMP (Simple Network Management Protocol) şəbəkə və onunla əlaqəli qurğuların vəziyyəti barədə mesajlar göndərən bir idarəetmə protokudur.

TCP protokolu xəbərləri porsiyalara bölür.Xəbəri ünvana çatdırmaq üçün onu ünvanlaşdırmaq lazımdır.**TCP/IP** protokolunda 3 tip ünvandan istifadə edilir: **lokal(**aparat ünvanı da adlanır), **IP**(internet Protocol) ünvan və işarə domen adlanır. **DNS** (Domain Name System) **[3].** İnternet şəbəkəsinə qoşulmuş hər bir kompüter unikal ünvana malikdir.İnternetdə verilənlərin ötürülməsi üçün rəqəm IP və işarə tipli ünvanlardan istifadə edilir. Şəbəkə səviyyəsində paketlər IP ünvanlar vasitəsi ilə ötürülür. IP ünvanlar bir-birindən nöqtə ilə ayrılan və okted adlanan 4 ədəddən ibarətdir. Hər bir ədəd 255-i aşmamalıdır.Məsələn, 104.24.74.190 hər hansı bir kompüterin IP ünvanı ola bildiyi halda, 104.258.76.185 isə IP ünvanı ola bilməz. Hər hansı müəssisədə ofisdə şirkətdə kompüter internetə qoşulmaq üçün mütləq İP ünvanı olmalıdır. IP ünvanlar soldan sağa oxunur.Ünvanın 1-ci hissəsi şəbəkənin, 2-ci hissəsi isə qovsağın nömrəsini təyin edir. Şəbəkə nömrəsi xüsusi internet mərkəzinin **İnterNIC** (Internet Network Information Center) zəmanəti ilə təyin edilir.Başlanğıc ünvan marşrutizatora kompüterin hansı şəbəkəyə aid olduğunu göstərir.Rəqəm ünvanı kompüterlərin mübadiləsi zamanı istifadə olunur.İnsanlar arasında çox zaman işarə tipli ünvanlarından istifadə olunur. Onagörə də şəbəkədə kompüterlərə adlar mənsub edilir. İnternetdə kompüterlərin ünvanı DNS(Domain Name System) adlanan adların domen sistemindən istifadə olunur. DNS internetdə işlənmə prosesində istifadəçilərin işini asanlaşdırılır. İnternet adları DNS serveri vasitəsilə rəqəm formasında ifadə olunan həqiqi ünvanlara çevrilir. Həmin ünvanlara IP ünvanları deyilir. DNS serveri əks çevirməni də, yəni IP ünvanını domen adına çevirməni də aparır. Bu zaman kompüterə müraciət edərkən qovşağın rəqəm ünvanlarını Protokolların təyinatı:

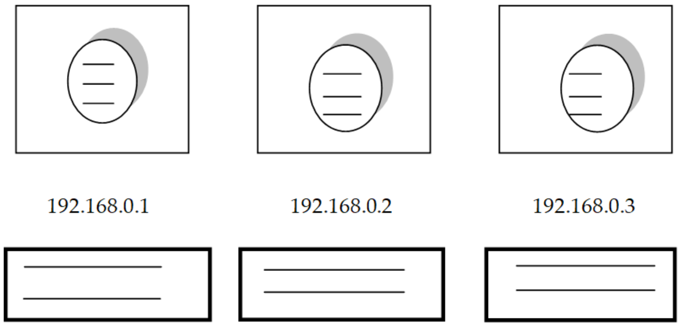
Protokolun adı	**Açılışı**	**Təyinatı**
HTTP	Hyper Text Transfer Protocol	Hiber mətnin ötürülməsi protokolu
FTP	File Transfer Protocol	Faylların ötürülməsi protokolu
SMTP	Simple Mail Transfer protocol	Elektron məktubların ötürülməsinin sadə protokolu
POP3	Post Office Protocol-3	Elektron məktubların alınması protokolu
NNTP	News Net transfer Protocol	Telekonfrans protokolu

İP ünvan nədir? İP - kompüteri şəbəkədə tanıdan, müəyyən edən bir mənalı unikal nömrədir. İP-ünvan dörd oktetdən (rəqəmdən) ibarət, nöqtələrlə ayrılmış rəqəmlər toplumudur. Misal üçün 194.67.67.97 (sonuncu rəqəmdən sonra nöqtə qoyulmur). Cədvəl 2.7**[4].**

Belə ünvanın açılışı soldan sağa doğru aparılır. Birinci rəqəm – internet şəbəkədə mövcud olan ən iri şəbəkənin nömrəsidir. Ikinci və üçüncü rəqəmlər şəbəkənin ayrı-ayrı sahələrini misal üçün: regional və ya lokal şəbəkə olmasını göstərir. Sonuncu rəqəm isə, qoşulmuş kompüterin öz nömrəsini əks etdirir.

Hər bir rəqəm 0-dan 255-ə qədər intervalda mövcud ola bilər, bu isə kompüter dili ilə desək həcmi 1 bayt və ya 8 bit olan məlumatlar tutumuna uyğunluq təşkil edir. Beləliklə İP ünvan 4 bayt və 32 bitdən ibarətdir. Əgər sadə hesablamalar aparsaq, bir baytın köməyi ilə 2(8)=256 variant göndərmək mümkünsə, onda 4 baytın köməyi ilə 2(32)=4 milyard variant göndərmək olar, bu o deməkdir ki, eyni vaxtda internet şəbəkəsinə 4 milyard istifadəçi qoşmaq olar. Ancaq müasir tendensiyanı, internet istifadəçilərin sürətli artımını nəzərə alsaq, o cümlədən nəzərə alsaq ki, müasir texnologiyalar imkan verir ki, internetə nəinki kompüter, eləcə simsiz smartfonlar, telefonlar, planşetlər, televizorlar hətta belə soyuducular qoşulsun, onda ünvanlar məkanı istər-istəməz daralır və sıxlıq yaranır. Buna görə də ünvanlar məkanının genişləndirilməsi məsələsi ortaya çıxır ki , bu da interneti 128 bitli İP-ünvana keçirtmək zərurətini ortaya çıxardır.

Birləşdirilmiş kompüterlərin İP ünvanları



İP ünvan təyinatı

Hər hansı bir kompüter istər noutbooklar istərsədə PC kompüter şəbəkənin müxtəlif qurğuları ilə ünsiyyət qurması üçün, mütləq bir IP ünvanı olmalıdır. İki cür IP ünvanı vardır.Dinamik və ya statik İP ünvanı. Belə desək nədirstatik və dinamik İP və aralarındakı fərqlər nələrdir?

IP ünvanı və ya nömrə bir kompüterin belə desək şəxsiyyətidir.İP ünvanı İnternetə qoşulmaq üçün cihazları birləşdirən ünvanların sayıdır.

Hər hansı kompüteri yandırıb istər noutbook olsun istər PC-si olsun hər dəfə internətə daxil olduğunuzda İP ünvanı sistem tərəfindən avtomatik olaraq cihaziniza verilir. Bundan əlavə İnternetə daxil olduğunuz zaman hər bir cihaz üçün İP ünvanları statik və dinamik, yəni sabit və dəyişən olur. Umümiyyətlə evlərdə istifadə olunan İP ünvani dinamik tiplidir. Şirkətlərdə offislərdə hər hansı müəssisələrdə istifadə olunan İP ünvan statik tipli olur.Hər hansı internet xidməti provayderi (Aztelekom,Telnet,Azedunet və s.)olan müəssələrdə şirkətlərdə kompüterə uzaqdan daxil olduğunuz zaman İP ünvanı statik olmalıdır.Hər zaman internet xidmət təminatçısından statik əlaqə üçün bir İP ünvanı qorunur və eyni İP ünvanina daimi olaraq bağlıdır.

Dinamik İP adresi

İnternetə hər dəfə qoşulduğunuzda mövcud olan VPN saytları tərəfindən tanınan boş IP ünvanlarına verilən addır.. Dinamik IP nömrəsi hər kəs tərəfindən paylaşıla bilməz və heç bir şəkildə bölüşdürülə bilməz. Buna görə, IP sorğu prosesində kompüterinizin bütün məlumatlarını IP nömrəsi ilə əldə edə bilərsiniz.

Statik İP adresi

Statik IP ünvanı, daha böyük, offislər,müəssisələr şirkətlər tərəfindən üstünlük verilən IP növüdür. Dinamik IP-də İnternetə hər dəfə qoşulduğumuda müxtəlif IP nömrələri ilə qarşılaşırıq,ancaq statik İP ünvaninda belə deyil. IP nömrəniz həmişə sabitdir. Onların kompüterlərinə uzaq olmağı istəyən şirkətlər üçün, statik IP bu səbəbdən çox vacibdir. Statik IP və Dinamik IP ünvanları arasında fərq qoyan ən vacib xüsusiyyətdir. Statik bir IP ünvanı ilə kompüterinizi FTP server və ya veb server kimi istifadə edə bilərsiniz və kompüterinizə istənilən yerdə uzaq PC kompüterlər ilə daxil ola bilərsiniz. Bu, işlərini uzaqdan aparmaq idarəetmək istəyən məşğulluq proqramı olan insanlar üçün çox faydalıdır. Statik İP hər hansi müəssisədə şirkətdə offislərdə internet xidməti olan provayder vasitəsiylə internetə bağlana bilir. Dinamik IP isə evdələrdə daha çox istifadə olunur və sizin bağlı olduğunuz modem vasitəsiylə internetə qoşula bilirsiz. Belə desək xususilədə, internet üzərindən kompüter, server və ya kameraya çıxış təmin etmək üçün ən optimal variant statik IP-nin istifadəsi daha vacibdir və bu mənada böyük rahatlıq təmin edir.

Statik IP istifadə sahələri;

- *oyun server,*
- *web - domain adı xidməti,*
- *e-poçt server, uzaq masaüstü idarə edilməsi,*
- *FTP xidməti,*
- *video konfrans,*
- *ərizə.*

Statik IP ünvanı üçün ayrıca bir tələb lazımdır statik İP unvanin nömrəsini hər hansi şirkətdə müəssisədə,ofisslərdə İT şöbəsindən olan administratorlar təyin edir və statik İP DHCP adalan server vasitəsiylə paylanılır. Statik İP ünvani nömrəsi təyin olunmadıqda əks halda kompüterinizə dinamik bir IP nömrəsi veriləcəkdir.

ƏDƏBİYYAT

1. ƏLİZADƏ M.N, SALMANOVA M.Ə, ABBASOVA X.E, ORUCOVA M. Ş. SEYİDZADƏ E. V."İNFORMATİKA", Dərslik, "BİLİK" nəşriyyatı, BAKI 2015
2. Л.В. Воробьев, А.В. Давыдов, Л.П. Щербина "Системы и сети передачи информации". Москва, Academia, 2009 г.
3. Б. Д. Кудряшов. "Теория информации" – Санкт-Петербург, Питер, 2009 г.
4. В.С. Сергеенко, В.В. Баринов. СЖАТИЕ данных, речи, звука и изображений в телекоммуникационных системах. Москва 2011.
5. http://www.onurunurlu.com/dosyalar/agsistemleriyonlendirme/tcpip.pdf

UOT:002.

KOMPÜTER TEXNOLOGİYALARININ LİNGVİSTİK ARAŞDIRMALARDA VƏ XARİCİ DİLİN ÖYRƏNİLMƏSİNDƏ TƏTBİQİ

Aynurə ƏLƏKBƏROVA, Günel BAYRAMOVA

Bakı Mühəndislik Universiteti

aelekberova@beu.edu.az, gbayramova@beu.edu.az

XÜLASƏ

Koqnitiv neyrotexnologiyalar, kompüter lingvistikası, eləcə də neyrolinqvistika bu gün koqnitiv psixologiya sahəsini daha da inkişaf etdirərək, yeni istiqamətlərin yaranmasına səbəb olmuşdur. Bu istiqamətlər son illərdə daha da genişlənərək, yeni modellərin, terminlərin və elm sahələrinin yaranmasına şərait yaratmışdır.

Qədim zamanlardan insanlar həmişə dağların, çayların, meşələrin görünməyən tərəfində nələrin olduğunu öyrənmək istəmiş, oraya gedib çatmağın xəyalını qurmuşdu. Keçmişdə belə araşdırmaların nəticəsində yeni torpaqlar kəşf olunmuş, xəritələr yaranmış və bir çox şəhərlər salınmışdır.

Bugün isə, alimlərin tədqiqat sahələrindən biri, bizə ən yaxım olmasına baxmayaraq, öz sirli dünyasını bizdən gizli saxlayan, planetlimiz qədər fundamental olan bir obyekti araşdırmaqdır. Bu obyekt – insan beynidir. Ümumi çəkisi təqribən 1400 qram olan bu "qara qutu" inanılmaz gücə, yaddaşa və emal sürətinə malikdir.

Bu məqalədə beyinin öyrənmə prosesi zamanı və xarici dilin mənimsənməsi zamanı insane beynindəki neyronların hansı mərhələlərdən keçdiyi konkret bir misal üzərindən araşdırılıb analiz edilmişdir. Linqvistika sahəsində, kompüter texnologiyalarının geniş tətbiqi, kompüter əsaslı tərcümə proqramlarının, lüğətlərin, dil öyrədici oyunların yaradılmasına və sürətlə yayılmasına şərait yaratmışdır.

Açar sözlər: kompüter texnologiyalari, insan beyni, neyron, xarici dil.

THE USE OF COMPUTER TECHNOLOGIES IN LINGUISTIC STUDIES ON THE EXAMPLE OF FOREIGN LANGUAGE LEARNING

ABSTRACT

Cognitive neurotechnologies, computer linguistics, and neurolinguistics have caused changes in today's cognitive psychology. These branches have transformed into more sophisticated and topical areas in recent years and have given rise to new models, terminology, and scientific areas.

Since ancient times, people have always wanted to know what's happening on the other side of the mountains, rivers, and forests, and have dreamed of going there. In the past, as a result of these studies, new lands were discovered, maps were created, and cities were built. Today, scientists are investigating the object that is even more fundamental than our planet, the mystery of all the universe, the closest to us, but keeping its dark world far from us. This object is brain. This "black box" with a total weight of about 1400 grams has incredible power and processing speed. The stagesthat neurons in the brain of a learner pass during learning process have been analyzed over the process of mastering the foreign language. The extensive use of computer technology in the linguistic field has led to the creation and rapid dissemination of machine learning-based translation programs, vocabulary, and games on language-learning.

Key words: computer technology, human brain, the neuron, foreign language.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ЛИНГВИСТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ НА ПРИМЕРЕ ИЗУЧЕНИЯ ИНОСТРАННЫХ ЯЗЫКОВ

РЕЗЮМЕ

Когнитивные нейротехнологии, компьютерная лингвистика и нейролингвистика вызвали изменения в современной когнитивной психологии. Эти отрасли превратились в более сложные и актуальные области в последние годы и породили новые модели, терминологию и научные течения.

С древних времен люди всегда хотели знать, что происходит на другой стороне гор, рек и лесов, и мечтали побывать там. В прошлом в результате этихисследований, были открыты новые земли, были созданы карты, и были построены города. Сегодня ученые исследуют объект, который даже более фундаментален, чем наша планета, тайна всей вселенной, который к нам ближе всего, но держит нас на расстоянии от своего тёмного мира. Этот объект - мозг. Это «черный ящик» с общим весом около 1400 грамм обладает невероятной мощностью и скоростью обработки. Этапы, которые проходят нейроны в мозгу учащегося в процессе обучения, были проанализированы в процессе овладения иностранным языком. Широкое использование компьютерных технологий в лингвистической сфере привело к созданию и быстрому распространению программ машинного обучения, лексики и игр по изучению языка.

Ключевые слова: компьютерные технологии, мозг человека, нейроны, иностранные языки.

Giriş

İnsanın unikal verbal (şifahi) ünsiyyət qabiliyyəti onu digər canlılardan fərqləndirərək, mürəkkəb və abstrakt anlayışları asanlıqla digər insanlara ötürməyə imkan verir. İnsanlar həyatlarında və təhsillərindəuğur qazanmaq, karyera əldə emək, başqa bir ölkəyə köçmək və ya sadəcə olaraq bir dili və onun istifadəçilərinin mədəniyyətini sevdikləri üçün xarici dili öyrənirlər. Bununla yanaşı, hər hansı bir dilin öyrənilməsi, ağıl və beynin inkişafı üçün olduqca faydalı hesab olunur. Maraqlıdır ki, bir xarici dilə mükəmməl yiyələnməkdənsə, bir neçə dili orta səviyyədə bilməkdaha əhəmiyyətlidir.Yeni dillərin öyrənilməsi zamanı beyində baş verən dəyişikliklər, bu zaman insan beynindəki neyronların düzülmə mərhələləri, hansı dillərin öyrənilməsinin beyin inkişafına daha çox təsir etməsi kimi problemlərin araşdırılması böyük əhəmiyyət kəsb edir.Məqalədə xarici dilin öyrənilməsi zamanı insan beyni neyronlarının tədqiqi və analizi aparılmaqla əldə edilən müəyyən qarşılaşdırılmalar göstərilmişdir.

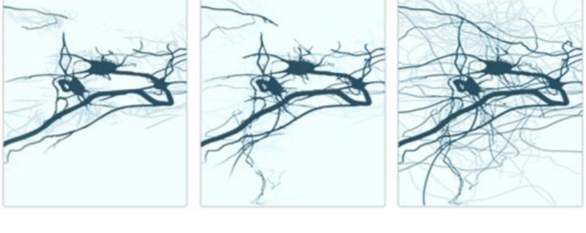
Süni intellekt aləmindəki son araşdırmaların nəticəsinə əsasən, yaşlanmağa başlayan insan beyninin intellekt səviyyəsində baş verən dəyişikliklər müxtəlif insanlarda müxtəlif xarakterlidir. Məsələn, idmançıların maksimum nəticə göstərə biləcəkləri ortalama yaş dövrü 20 hesab olunsa da, müəyyən vaxtdan sonra bu imkanlar xeyli aşağı düşür. İnsan intellekti isə özünün tam formalaşma nöqtəsinə nisbətən gec yaşlarda çatır. Bəzi mənbələr insan intellektinin maksumum dərəcəsinin məktəb və universitet yaşlarına təsadüf etdiyini, bəziləri isə bu dönəmin məhz 40-50 yaşlar arasında olduğunu deyirlər. Ümumiyyətlə, intellektin öyrənilməsi məsələsi, fransız psixoloqu Alfred Bine tərəfindən 1900-cu illərdə öyrənmə prosesində əziyyət çəkən uşaqların üzərində aparılan elmi diaqnostikadan başlanmışdır[1].Həmin dövrdə psixoloqları yalnız intellekti ölçmə problemi maraqlandırırdı.Alfred Bine öz həmkarı T. Simon ilə birlikdə uşaqların qabiliyyətlərini müəyyənləşdirmək üçün, hal-hazırda Bine-Simon şkalası adlanan testi hazırladı. Bu test sonradan Bine və Simon tərəfindən dəfələrlə təkmilləşdirildi. İngilis psixoloqu, faktor analizinin müəllifi Çarlz Spearman 1904-cü ildə uşaqların qabiliyyətlərini müəyyənləşdirmək üçün ümumi intellekt ideyasını təklif etdi. Sonralar, 1983-cü ildə Harvard Universitetinin professoru Hovard Qardnerin çoxtərəfli intellekt nəzəriyyəsi İQ səviyyəsinin ölçülməsinin çox məhdud olduğunu göstərməklə yanaşı, 8 müxtəlif intellekt növünün mövcudluğunu sübut etdi. Bu intellekt növlərinin hamısının eyni anda bir insanda olması və onların inkişaf səviyyəsinin müxtəlif dövrlərdə fərqli şəraitə uyğun olaraq dəyişə bilməsi göstərildi[2]. Məsələn, Şiniçi Suzukiyapon sripkaçısıdır. O, uşaqlarin musiqi təhsili üçün yeni üsul təklif etdirmişdir. Bu üsul, yeni doğulmuş körpəyə bir yaşına qədər hər gün müəyyən klassik melodiyaları mütəmadi olaraq dinlətmək və onda klassik musiqiyə qarşı meyl oyatmağa əsaslanır. İki yaşında onlar musiqi alətləri ilə tanış olur, 6-10 yaşlarında isə Vivaldi, Motsart kimi bəstəkarların əsərlərini ifa etməyi öyrənirlər. Suzuki musiqi intellektini necə inkişaf etdirməyin yollarından birini göstərdi, bəs digər intellekt növlərini inkişaf etdirməyi təhsildə necə tətbiq etmək olar?O cümlədən, lingvistik intellektin rəngarəngliyi beynimizdəki neyronları necə dəyişir?Doğrudur, dil dərslərində mətnlərin öyrənilməsi və tərcüməsi, söz oyunları,imla və inşaların yazılması kimi metodlar lingvistik intellektin yüksəldilməsinə xidmət edir. Bunların sırasına xarici dillərin öyrənilməsi də daxildir. Sübut olunmuşdur ki, xarici dillərin öyrənilməsi,insan beynində yeni neyronların yaranmasına səbəb olur, beynin qipokapm hissəsindəki beyin kütləsinin artımına müsbət təsir edir,insanın dünyagörüşünün formalaşmasında önəmli rol oynayır, məlumatın beyin tərəfindən alınıb emal olunmasına və öyrənmə prosesinin yüngülləşdirilməsinə şərait yaradır [3].

Maraqlıdır, bəs beynimiz nə vaxt daha yaxşı inkişaf edir: iki vəya daha çox dili orta səviyyədə biləndə, yoxsa bir dili mükəmməl öyrənmiş olduqda?

İki dili eyni səviyyədə bilən insanlar bilinqvalar, sadəcə bir dili mükəmməl səviyyədə bilənlər isə monolinqvalar adlanır. Yudit Krol (Judith Kroll) öz eksperimentlərində bildirmişdir ki, yalnız bir dildən istifadə etsələr də, bilinqvalar avtomatik olaraq beynin hər iki dilə cavabdeh olan hissələrini aktivləşdirə bilir. Bəzi alimlərin fikirlərinə görə, məhz bu mexanizm bilinqvaları monolinqvalarla müqayisədə idarəedici funksiyaları inkişaf etdirərək üstün koqnitiv elastiklik qabiliyyətləri nümayiş etdirdiklərinə görə fərqləndirir[4].Nitqin deyilişini (məqsədyönlü nitq), həmçinin musiqi hərəki mərkəzini və nitqin intonasiya mərkəzini sol yarımkürənin aşağı alın qırışığının arxa hissəsində yerləşən **Broka hərəki** nitq mərkəzi idarə edir. Nitqin eşitmə mərkəzi isə **Vernike mərkəzi** adlanır. O, beyin qabığında sol yarımkürənin yuxarı gicgah qırışığının arxa sahəsində yerləşir[5].

Ana bətnindəki uşağın beyin kütləsinin bünövrəsi, dölün ilk həftələrində qoyulur və uşağın beyin inkişafının 70%-i ana bətnində olarkən baş verir. Körpəliyə bu inkişafın 15 faizi, məktəbəqədər dövrə isə digər 15 faizi düşür. Beləliklə, 6 yaşa qədər beyin strukturunun formalaşması yekunlaşır. Lakin neyronların inkişafı və beyin kütləsinin böyümə prosesi hələ davam edir. Anadan yeni doğulmuş körpənin beynindəki neyronlar müstəqil şəkildə fəaliyyət göstərsələr də, beynin əsas işi - ilk 3 il ərzində beyin hissələri arasındakı bağların(sinapsların) möhkəmləndirilməsi olur. Bu vaxt ərzində körpənin beynindəki neyronlar 1 saniyədə 2 milyona qədər yeni bağlantı – sinaps – qurur. Beynin inkişaf müddətində sinapslar mürəkkəbləşib budaqlanaraq ağacşəkilli bir formaya çevrilir (şəkil 1). Buna görə də beynin ən aktiv periodu 0-3 yaş dönəminə təsadüf edir. İnsan beynində 100 milyarddan çox neyron var. Onların hər biri digər neyronlarla sinapslar vasitəsilə əlaqə qurur və bu sinapsların sayı 10 minə qədər ola bilir. Alimlərin hesablamalarına görə, beyin qabığındakı sinapsları saymaq üçün bizə 32 milyon il lazımdır! Beyindəki prosesləri süni neyron şəbəkəsi vasitəsilə iləmodelləşdirmək və hər hansı bir əməliyyatı yerinə yetirmələri üçün modeli öyrətmək lazımdır. Burada, obyektlərin dəqiq tanınmasıyla yanaşı, insan səsinin digər lazımsız səs-küydən ayrılaraq düzgün emal edilməsi və ötürülməsidə böyük əhəmiyyət kəsb edir.

Şəkil 1. Öyrənmə prosesində beyin neyronunun inkişaf mərhələləri

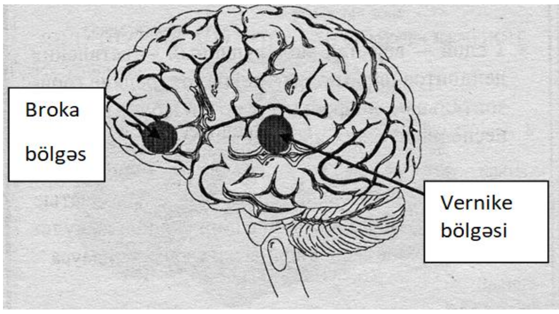


Beyindəki qavrama prosesinin sadələşdirilmiş halını aşağıdakı addımlarla göstərmək olar:

1. Reseptorlar vasitəsilə məlumatların əldə edilməsi əvvəlki təcrübələrlə (orijinalla)müqayisə edilir;
2. Əgər əlaqə yoxdursa, bu səs-küydür və ona görə də qəbul edilmir. Əgər əlaqəli bir şey varsa, bu zaman faktların (orijinallardan birinin) tanınması baş verir;
3. Fakt əhəmiyyətlidirsə, biz onu xatırlayırıq, yaxud ümumiləşdiririk. Sonra bu fakta uyğun hərəkət edirik. Məsələn, danışırıq (cavab veririk) və ya kodu yazırıq (yaddaşımıza yazırıq);
4. Yadda qalan və təhlil edilmiş məlumatların həcmini azaltmaq üçün o ümumiləşdirilir;
5. Xülasə edildikdən sonra, məlumatlar yenə əlaqələndirilir və təhlil edilir[6].

Linqvistik, musiqi, məntiqi-riyazi və ya hər hansı digər intellektual qabiliyyətlər müxtəlif yollarla aktivləşdirilir.Biz sadə bir təlim prosesi zamanı beyində nə baş verdiyinə nəzər saldıq. Əgər dil öyrənmə ilə bağlı danışırıqsa, bu proses beyinin sol yarımkürəsində - Perisylvian bölgəsində lokalizə olunur. Amma araşdırmaların nəticələrinə görə bu prosesdə hər iki yarımkürənin neyronları iştirak edir.Bu sahənin ön hissəsi - Broka mərkəzi, əsasən qrammatika və sintaksis üçün məsuliyyət daşıyır, arxa - Vernike mərkəzi isə sözlərin səsləndirilməsini anlamağa kömək edir. Məsələn, bir adamın Broka mərkəzində zədələnmə varsa, o danışa bilməyəcək və yaxud Vernike mərkəzi zədələnərsə, artıq eşitdiklərini anlamayacaq (şəkil 2)

Şəkil 2. Beyində nitq zonası



Bir dil necə qavranılırvə yadda qalır ?

Bu məqamda dili yadda saxlamaq mexanizmi haqqında da bəhs etmək zəruridir. Hollandiyada Maks Plank Psixolinqvistika İnstitutunun direktoru Uilyam Levelt gündəlik işlənən sözləri yadda saxlama və onlardan istifadə etmə zamanı üç əsas sistemi təsvir etmişdir:

1) *leksik, 2) sintaksis və 3)fonetik.*

Birincisi, leksik sistem yalnız biz bir şey demək istədiyimizdə aktivləşir və sözlərə görə deyil, onların mənalarının izahına görə məsuliyyət daşıyır. Buna görə bir söz tapmaq istəyərkən əvvəlcə o sözün mənası duyğu orqanları vasitəsilə birbaşa duyulur.

Sintaksis sistemi danışılan dilin sintaksis qaydalarını (fellərin, halların birləşməsi) mənaya tətbiq edir. Bu, insanlar arasında çox işlənən "dilin ucunda" ifadəsi üçün məsuliyyət daşıyan mərkəzdir, sözü bildiyimizdən əminik, lakin hələ də onu xatırlaya bilmirik.Həmin an sözün mənası bilinir və sintaksis sistem o sözün aid olduğu dilin söz formalarından ibarət söz seçimini işə salır.

Nəhayət, üçüncü mərkəz - fonetik sistem - səslərin mənalara tətbiqidir. Bu sistem işə düşəndə sözün tələffüzü baş verir.Bəzən bir sözü unutduğumuz zaman onu səslər vasitəsilə xatırlamağa çalışırıq, məsələn "s" səsi ilə başlayır, yaxud içində "z" səsi var və s. Xatırladığımız səsləri toplayıb sözləri tapmağa çalışırıq.

Yəni, üç mövzu var: mənalar, onlarla əlaqəli səslər və ana dili qaydaları. Hər üç mövzudan biri digəri ilə qarşılıqlı əlaqədədir.İndi bizə xarici dilin niyə ana dilimiz kimi asan mənimsənilməməsi daha aydın olur. Dil yalnız bir söz vahidi deyil və onun bütün hissələri (mənası, forması, səsləri) beynin müxtəlif yerlərində saxlanılır. Bir xarici dil öyrənməklə biz əslində üç fərqli dil sistemini öyrənirik.Bu həmçinin dil öyrənilməsində birtərəfli yanaşmanın-ya yalnız qrammatika, ya da yalnız danışıq üzərindən dilin mənimsənilməsinin niyə işə yaramadığını aydın şəkildə izah edir.

Levelt həmçinin hesab edir ki, yaş irəlilədikcə bizim dil öyrənmə qabiliyyətimiz və sürətimiz azalmır, sadəcə öyrəndiyimiz dilin beynimizdə olan üç sistemində məlumatlar və birləşmələr artdığından mövcud məlumatı beyində işləyib hazırlamaq üçün daha çox vaxt tələb olunur.

Onun bu fikrini bilinqvalar üzərində aparılan təcrübələr də təsdiq edir. Onların bir sözü tələffüz etmə sürəti adətən bir dildə sərbəst danışanlardan daha yavaş olur.Lakin sürət, bu vəziyyətdə nisbi bir konsepsiya olduğu üçün, bizim bir saniyədə 10-15 hecadan ibarət 2-3 söz qura bildiyimizi və hər hansı bir mənanı ifadə etmək üçün uyğun gələn bir söz tapmağa ortalama 0,071 saniyə sərf etdiyimizi nəzərə alsaq, bilinqvalar dərk etmə prosesində insanlar heç də digər insanlardan yavaşdüşünmürlər[7].

Hazırda öyrənilməkdə olan dillər və dil qrupları

Dillərin roman, german, slavyan və digər dil qruplarına bölündüyü məlumdur. Bakıda hal-hazırda öyrənilməsinə ən çox tələbat duyulan dilləri qruplarına görə ayırıb onların mürəkkəblik dərəcəsinə nəzər salaraq bu nəticəyə gəlmək olar ki, eyni qrupdan olan dillərin və qarmmatikası asan mənimsənilən dillərin öyrənilməsinəüstünlük verilir. Məsələn, tələbata uyğun olaraq**rus dili**(slavyan dili qrupunun şərq bölməsinə aiddir.Buna ən yaxın olan isə belarus və ukrayna dilidir.Bu qrupun bütün üzvləri təxminən eyni qrammatika, söz və yazı sisteminə malikdir), **ingilis dili(**German qrupuna aiddir,dilin öyrənilməsi heç bir xüsusi problem yaratmır, çünki heç bir hal kateqoriyası, sözlərin koordinasiyası və cinsiyyət anlayışı yoxdur. İngilis dilində sözlərin tələffüzü və yazılışında əhəmiyyətli fərqlər, qaydasız fellərin istifadə edilməsi və s. bu kimi məqamlar olsa da, olduqca asan qrammatikaya malikdir. Beynəlxalq aləmdə istənilən ölkədə təhsil alma imkanları yaradır),**alman dili(**müasir texnologiyalar sahəsində ən vacib dillərdən biridir. Alman dilinin qrammatikasının çətin mənimsənildiyi isə danılmazdır. Bu dili bəzi millətlər bir neçə səbəbə görə öyrənməkdə çətinlik çəkirlər, məsələn, fellər cümlənin sonunda işlənir, heç bir sözönu yoxdur, onun əvəzinə qoşmadan istifadə olunur və s.), **ispan dili** (roman qrupuna aiddir, kifayət qədər sadə bir qrammatikaya malikdir, həm İspaniyada həm Latın Amerikası və Meksikada istifadə olunur), **italyan dili** (Halların olmaması və sadə tələffüzü onun geniş sahələrdə populyarlığını quruyub saxlayır. Bununla yanaşı həm də memarlıq, dizayn və moda sahələrində fəal şəkildə istifadə olunması da bu dilə marağı artırır), **fransız dili** (bir neçə sözü ingilis dilində olan sözlərə bənzəyir, ona görə onu da sadə hesab edirlər, fransızlar 18-ci əsrdə xüsusi populyarlıq əldə etmişlər, elə bu gün də bu populyarlığı qoruyub saxlayırlar. Bu dil, beynəlxalq dillər sırasına daxildir, həmçinin incəsənət və moda dillərindən biridir), **çin dili** (heroqliflərin yazılışında ən kiçik cızıq belə yazıda çatdırılan məlumatın mənasında ciddi dəyişikliyə səbəb ola bilir.Çin dilində ən sadə öyrənilə bilən sistem onun qrammatikası, ən çətini isə tələffüzü olduğu hesab olunur.Bu dildə tələffüz zamanı tonlar tez-tez dəyişdiyindən, intonasiyaya xüsusi diqqət yetirmək lazımdır), **yapon dili** (heroqliflərin oxşar mürəkkəb sistemi mövcuddur. Bu dilin fərqi ondadır ki, hər birinin öz əlifbası olan üç yazı sistemi var) kimi dilləri öyrənmək və ya öyrənməmək hər kəs üçün fərdi bir məsələdir, lakin qərar verməzdən əvvəl bu xarici dil lehinə bir neçə mühüm arqumentlə tanış olmaq lazımdır.

Son vaxtlar daha geniş tələbat olan **Azərbaycan dili**- Altay dilləri ailəsinin türk dilləri şöbəsinin Oğuz sinfinin Qərb qrupuna daxildir. Azərbaycan dilini öyrənmək bəzi xarici vətəndaşlara sadə, bəzilərinə isə çətin görünə bilər. Hal – hazırda rus dilli əhali azərbaycan dilini öyrənmək üçün dil kurslarına müraciət edir.Dilimizdə hərflər və səslər latın əlifbasından olduğundan, Roman və German qrupu dillərində danışanlar Azərbaycan dilini mənimsəyərkən bir o qədər çətinliklə üzləşmirlər. Öyrənmə prosesini asanlaşdıran bir digər xüsusiyyət isə cins kateqoriyasının olmamasıdır. Bu o deməkdir ki, sözlərin sonundakı şəxs şəkilçiləri cinslərə görə fərqlənmir və hər iki cinsdə eynidir. Alman və fransız dillərində isə hətta artikl belə cinslərə görə dəyişir. Bir digər sadə cəhəti isə odur ki, Azərbaycan dilində bir sözün içərisində həm cəm, həm mənsubiyyət, həm də hal şəkilçisi işlənə bilir. Məsələn, "kitab-lar-ınız-dan" sözündə bunu asanlıqla görmək mümkündür. İngilis dilində isə bu sözü üç söz əvəz edir: "from your books". Bu xüsusiyyəttə biz koreya ve yapon dillərində də rast gələ bilərik.

Dilləri öyrənmək beyin həcminin artmasına səbəb olur

Xarici dil öyrənərkən insanın beyni sözün əsl mənasında böyüyür.Daha dəqiq desək, onun ayrı-ayrı bölgələri - hipokampus və serebral korteksin bəzi hissələri inkişaf edir. Professional tərcüməçilərin beyinlərinin araşdırma nəticələrini dərc edən tədqiqatçılar, ən azı üç ay bir dilin dərindən öyrənilməsi ilə məşğul olanlar arasında boz maddənin həcminin artdığını və xüsusi araşdırma iştirakçılarının daha çox səy göstərdiyini müşahidə etmişlər. Bunlarin nəticəsində, boz maddənin həmin tərcüməçilərdə daha çox nəzərə çarpacaq dərəcədə artması müşahidə olunmuşdur[8].

Xarici dillər insanları"Alzheimer sindromu"ndan qoruyur

Bilinqvalarda "Alzheimer sindromu"nun başlamasının təqribən 5 il gecikdiyi deyilir. Neyro-psixoloqlar komandası bu nəticəyə gəlməzdən əvvəl həmin sindroma yoluxmuş insanlar arasında kimlərin xarici dilləri bilib-bilmədiyini ayırd etmişlər. Onları iki qrupa bölüb tədqiqat apardıqdan sonra, birinci qrupda demensiyanın ikinci kateqoriyadan təxminən 5,1 il daha gec başladığını aşkar etmişlər.

Hələ əvvəllər həkimlər belə hesab edirdilər ki, beyni davamlı inkişaf etdirən işlərlə məşğul etmək (buraya riyazi məsələlər, davamlı oynanan məntiq oyunları və s. daxildir) Alzheimer sindromunun güclənməsinin sürətini azaldır. Bu sözügedən tədqiqat da elə məhz həmin hipotezin təsdiqi oldu. Onu da qeyd etmək lazımdır ki, dil öyrənilməsinin göstərdiyi profilaktik təsir bu xəstəliyin müalicəsi üçün istənilən dərman vasitələrindən daha güclüdür [9].

İki və daha çox dil bilən insanların yaxşı musiqi duymaq qabiliyyəti olur

Xarici dil öyrənmək, beynin özü üçün daha əvvəl izolyasiya edərək və məhdudlaşdıraraq işləmədiyi səslərin bolluğunu aşkar etməsinə səbəb olur. Çin dilini öyrənən bir avropalı, "s" səsi olduğunu düşündüyü şeyin, əslində üç fərqli səs olduğunu öyrənəndə çox təəccüblənir. Rusca öyrənən bir çinli, cümlədə intonasiya dəyişikliklərinin zənginliyi sayəsində, bu dilin çin dilinin heca və ton müxtəlifliyi ilə qarşılaşdırıla biləcəyinin şahidi olur.Xarici dilibilən şəxs səsləri daha yaxşı tanıyır və daha sonra musiqi alətlərinin mənimsənilməsində daha çox uğurlar əldə edir. Deməli, biz öz musiqi bacarıqlarımız üçün eşitmə orqanlarımızla yanaşı, beynimizə dəborcluyuq, çünki səslərin tanınmasında bilavasitə beyin iştirak edir[10].

Dilçilər bir neçə tapşırığı eyni anda yerine yetirmək bacarıqları ilə fərqlənirlər

Bir neçə dili mənimsəmiş şəxslər bir neçə tapşırıq arasında asanlıqla keçid yarada və eyni zamanda bir çox müxtəlif problemləri həll edə bilirlər.Bundan əlavə, onlar, gözlənilməz dəyişikliklərə daha sürətlə və asanlıqla uyğunlaşmağı bacarırlar. Bu həqiqəti təsbit edən araşdırmanın müəllifləri müxtəlif təcrübələr aparmışlar. Nəticə gözlənildiyi kimi olmuşdur, gənclər məntiqi problemləri 45-50 və daha artıq yaşı olanlara nisbətən daha yaxşı həll ediblər. Bununla yanaşı, iki dilli olanlar gənc, yetkin və yaşlılar arasında elə də ciddi bir fərq ortaya qoymasalar da, yaşlı olan iki dilli insanların eyni anda çox sayda qarışıq tapşırığı həll etmək bacarıqlarını qoruyubsaxladıqları diqqəti cəlb edib. Təbii ki, tədqiqatçılar, insanların bu qabiliyyətlərə malik olmaları üçün, onların uşaq yaşlarından dilləri öyrənməyə başlamalarının çox vacib olduğunu qeyd edirlər[11].

Dillər yaddaşı gücləndirir

Çoxdilli bir mühitdə böyüyən uşaqlar, kiçik yaşlarından yalnız ana dilini eşidən uşaqlardan daha yaxşı yaddaşa sahibdirlər.Üstəlik, tədqiqatçılar tərəfindən müəyyən edilmişdir ki, bir qayda olaraq, bu uşaqlar beyinlərində sərbəst saya bilirlər, daha yaxşı oxu qabiliyyətləri və digər bacarıqları ilə digər uşaqlardan seçilirlər. İki dil bilən uşaqlar, həmçinin, hər hansı bir obyektin və hadisələrin ardıcıllığını daha yaxşı xatırlayırlar. Onlar əvvəlcədən gördükləri bir yeri yadda saxlamaq və bir işin yerinə yetirilməsi üçün görüləcək işlərin siyahısını beyinlərində saxlamaq bacarıqları ilə fərqlənirlər.Bu fərq ilk 5-7 il ərzində özünü göstərir və bir ömür boyu davam edir [12].

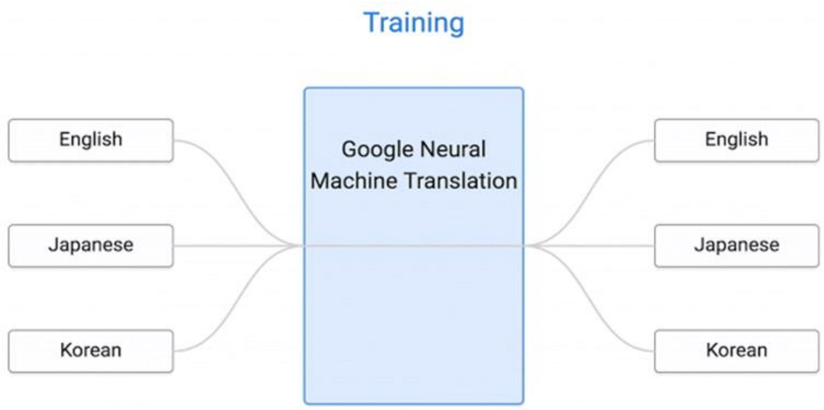
İki dil bilən insanlar fikirlərini daha yaxşı cəmləyə bilirlər

Cəmiyyət, adətən, çox dil bilən insanları fikirləri dağınıq, beyinləri daim nə iləsə məşğul elm adamları kimi təsəvvür edir, halbuki bu stereotip həqiqətdən olduqca uzaqdır. Bunun əksinə, onlar önəmli bir hadisənin eyni zamanda həm qaynağını, həm də onun detallarını həssas bir şəkildə incələyə bilirlər. Məsələn, iki dili bilən insanlar əsas ideyanı çox tez qavrayırlar və bununla yanaşı həmin ideyanın detallarını da ayırd edə bilirlər. Multikultural mühitdə yaşayaraq bir xarici dil öyrənən ali təhsilsiz insanlar haqqında danışırıqsa, onların öz ana dilindəki söz ehtiyatı xarici dildə bildiklərindən daha məhdud olur. Ancaq çox dil bilən insanlar, istənilən halda, ana dilinin məntiqini, xüsusilə qrammatika və söz-formalaşdırma üsullarını daha yaxşı dərk edən bir anlayışa sahibdirlər[13].

Kompüter lüğətlərinin dil öyrənmədə istifadəsi

Müasir kompüter texnologiyalarının inkişafı biznes, maliyə, marketing, reklam, elm, təhsil və kütləvi informasiya vasitələrinin də sürətli inkişafına bilavasitə təsir edir. Yeni texnologiyaların tətbiqi ilə xarici dillərin öyrənilməsi prosesinin səmərəliliyinin artırılması üçün həm proqram təminatından, həm də yeni avadanlıq növlərindən geniş istifadə olunur. Təbii ki, dil öyrənmə prosesində lüğətlərin istifadəsi labüddür. Hansı lüğətləri tanıdıqlarına dair dil öyrənmək istəyənlər arasında sorğu keçirilsəydi,sözsüz ki, "Google Translate" cavabı birinci yeri tutardı. Tərcümə proqramı hesab edilən "Google Translate"baza səviyyəsi olan dil öyrənənlər üçün bir vaxtlar tövsiyyə olunmurdu. Çünki, izahlı lüğət hesab edilmədiyi üçün tərcüməçi yerinə öyrədici Longman, Oxford və Macmillan lüğətləri məsləhət görülürdü. Bu tip lüğətlərdə sözlərin sinonimləri, antonimləri, sözönülərlə istifadəsi və digər geniş qaydalar izah edilir. Məlumdur ki, hal-hazırda "Google Translate" proqramının gündəlik tərcümə bazasında təxminən 140 milyarddan ibarətsöz ehtiyatından istifadə olunur[14].Mətnlərin tərcüməsində 103 dildən və maşınlı neyrotərcümə metodundan istifadə edilir.

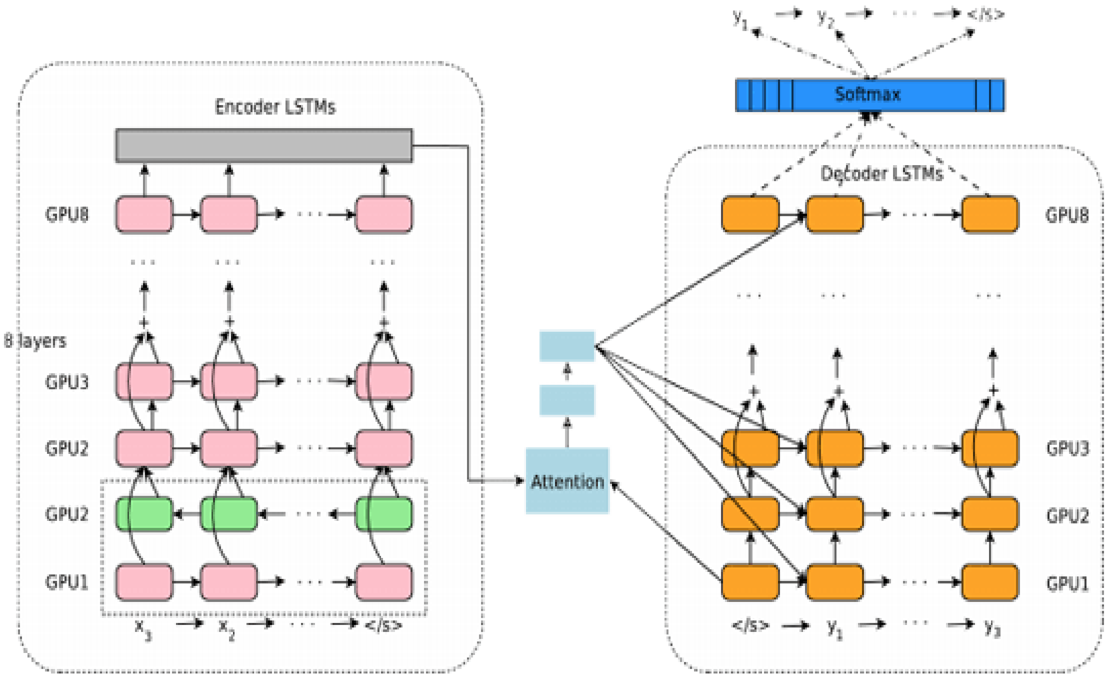
Şəkil 3. Dilin maşınlı tərcüməsi



Neyron şəbəkəsindən öncəki tərcümə metodunda sözlərin qrammatik qarşılığını nəzərə alaraq proqram onları olduğu kimi tərcümə edirdi.Hal-hazırda sözün tərcüməsini verən, bir neçə sinonimini sıralayan, hətta səsləndirilməsini də dəstəkləyən "Google Translate" mətnlərin tərcümə keyfiyyətini daha da artırmışdır.Google Maşınlı Neyrotərcümə (Google Neural Machine Translation) əsasında iki istiqamətli rekurrent neyron şəbəkələri durur.Rekurrent o deməkdir ki, sistem sözün mənasını bir öncəki sözlərin sırasına uyğun tapır. Neyron şəbəkənin iki istiqamətli olması isə onun analiz və sintez edə bilmə qabiliyyətini göstərir. Hər bir axın vektor analizi aparan səkkiz təbəqədən ibarətdir. Birinci axın cümləni məna elementlərinə bölərək analiz edir, ikinci isə tərcümənin ən yaxın məna ehtimalını hesablayır. Neyron sistemlərində ən kiçik element sözün özü deyil, onun fraqmentləri hesab olunur və bu sistemdə Google Maşınlı Neyrotərcümə otuz iki min belə fraqment istifadə edir. Onu da qeyd etmək lazımdır ki, neyron şəbəkəli tərcümələrin insan tərcüməsinə ən yaxın olduğu aşkar edilmişdir (şəkil 4).

Beləliklə, aydın olur ki, xarici dilin öyrənilməsinə yeni kompüter texnologiyalarının müsbət təsiri danılmazdır. Süni intellektin ən aktual sahəsi olan maşınlı tərcümənin istifadə etdiyi modellər, müasir lüğətlərin və kompüter tərcümə proqramlarının tərkib hissəsidir. Süni intellektin banisinin təbii intellekt, yəni insan beyni olduğunu nəzərə alsaq, əminliklə deyə bilərik ki, xarici dil öyrənməklə biz, lingvistik texnologiyaları daha da təkmilləşdirə bilərik. Belə ki, öyrənmə zamanı yaranan ciddi tələbatlar bizi buna sövq edəcəkdir. Bir çox tədqiqatçıların apardığı təcrübələrə əsasən deyə bilərik ki, kompüterlərin müasir proqram təminatı xarici dil öyrənənlərə rahat ünsiyyət və sərbəstlik verərək, onların daxili motivasiyalarını artırır və yaş məhdudiyyətini aradan qaldırır. Bu isə öz növbəsində gənc, orta və yaşlı təbəqəni xarici dil öyrənmənin heç də imkansız və gec olmadığına inandırır.

Şəkil4. Maşınlı tərcümə prosesi



Buradan da hər kəs üçün nəinki xarici dili, hətta istənilən elm sahəsini istənilən yerdə həyatı boyu öyrənməyə şərait yaranır.

ƏDƏBİYYAT

[1] https://inosmi.ru/world/20150403/227268423.html

[2] Prof.Dr.Vasif Nəbiyev, Yapay Zeka İnsan- Bilgisayar Etkilşimi, Seçkin Yayıncılık, Ankara, 2012, s.27.

[3] https://infourok.ru/news/primenenie-teorii-mnozhestvennogo-intellekta-52.html

[4] http://indigo-centre.ru/blog/kak-izuchenie-yazyika-vliyaet-na-mozg

[5] "Normal Fiziologiya", A.M. Məmmədov, K.V. Sudakov, Təbib Nəşriyyatı, Bakı, 2011, s. 255

[6] https://habr.com/ru/post/436160/

[7] https://corp.lingualeo.com/ru/2017/07/10/kak-izuchenie-yazyika-vliyaet-na-mozg/

[8]J. Mårtensson et al. «Growth of language-related brain areas after foreign language learning». NeuroImage, 2012.

[9] https://special.theoryandpractice.ru/language

[10] J. Krizman et al. «Subcortical encoding of sound is enhanced in bilinguals and relates to executive function advantages». Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2012.

[11] B. Goldet al. «Lifelong Bilingualism Maintains Neural Efficiency for Cognitive Control in Aging». The Journal of Neuroscience, 2013.

[12] J. Morales et al. «Working memory development in monolingual and bilingual children». Journal of Experimental Child Psychology, 2013.

[13] E. Bialystok, F. Craik «Cognitive and Linguistic Processing in the Bilingual Mind». International Journal of Bilingualism, December, 2014.

[14] https://ai.googleblog.com/2016/11/zero-shot-translation-with-googles.html

[15] https://www.cossa.ru/trends/196086/

INSTRUCTIONS FOR AUTHORS

1. "The Baku Engineering University Mathematics and Computer Science" accepts original unpublished articles and reviews in the research field of the author.
2. Articles are accepted in English.
3. File format should be compatible with **Microsoft Word** and must be sent to the electronic mail (**journal@beu.edu.az**) of the Journal. The submitted article should follow the following format:
- Article title, author's name and surname
- The name of workplace
- Mail address
- Abstract and key words
4. The title of the article should be in each of the three languages of the abstract and should be centred on the page and in bold capitals before each summary.
5. **The abstract** should be written in **9 point** type size, between **100** and **150** words. The abstract should be written in the language of the text and in two more languages given above. The abstracts of the article written in each of the three languages should correspond to one another. The keywords should be written in two more languages besides the language of the article and should be at least three words.
6. .**UDC** and **PACS** index should be used in the article.
7. The article must consist of the followings:
- Introduction
- Research method and research
- Discussion of research method and its results
- In case the reference is in Russian it must be given in the Latin alphabet with the original language shown in brackets.
8. **Figures, pictures, graphics and tables** must be of publishing quality and inside the text. Figures, pictures and graphics should be captioned underneath, tables should be captioned above.
9. **References** should be given in square brackets in the text and listed according to the order inside the text at the end of the article. In order to cite the same reference twice or more, the appropriate pages should be given while keeping the numerical order. For example: [7, p.15].

Information about each of the given references should be full, clear and accurate. The bibliographic description of the reference should be cited according to its type (monograph, textbook, scientific research paper and etc.) While citing to scientific research articles, materials of symposiums, conferences and other popular scientific events, the name of the article, lecture or paper should be given.

Samples:

a) ***Article:*** Demukhamedova S.D., Aliyeva İ.N., Godjayev N.M.. *Spatial and electronic structure af monomerrik and dimeric conapeetes of carnosine üith zinc,* Journal of structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010

b) ***Book:*** Christie ohn Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles*. Fourth Edition, Prentice Hall, p.386-398, 2002

c) ***Conference paper:*** Sadychov F.S., Aydın C., Ahmedov A.İ.. Appligation of Information – Commu-nication Technologies in Science and education. II International Conference.”*Higher Twist Effects In Photon- Proton Collisions”, Bakı, 01-03 Noyabr, 2007, ss 384-391*
References should be in 9-point type size.

10. The margins sizes of the page: - Top 2.8 cm. bottom 2.8 cm. left 2.5 cm, right 2.5 cm. The article main text should be written in Palatino Linotype 11 point type size single-spaced. Paragraph spacing should be 6 point.
11. The maximum number of pages for an article should not exceed 15 pages
12. The decision to publish a given article is made through the following procedures:
- The article is sent to at least to experts.
- The article is sent back to the author to make amendments upon the recommendations of referees.
- After author makes amendments upon the recommendations of referees the article can be sent for the publication by the Editorial Board of the journal.

YAZI VƏ NƏŞR QAYDALARI

1. "Journal of Baku Engineering University- Riyaziyyat və kompüter elmləri" - əvvəllər nəşr olunmamış orijinal əsərləri və müəllifin tədqiqat sahəsi üzrə yazılmış icmal məqalələri qəbul edir.
2. Məqalələr İngilis dilində qəbul edilir.
3. Yazılar **Microsoft Word** yazı proqramında, (**journal@beu.edu.az**) ünvanına göndərilməlidir. Göndərilən məqalələrdə aşağıdakılara nəzərə alınmalıdır:

- Məqalənin başlığı, müəllifin adı, soyadı,
- İş yeri,
- Elektron ünvanı,
- Xülasə və açar sözlər.

4. **Məqalədə başlıq hər xülasədən əvvəl** ortada, qara və böyük hərflə xülasələrin yazıldığı hər üç dildə olmalıdır.
5. **Xülasə** 100-150 söz aralığında olmaqla, 9 punto yazı tipi böyüklüyündə, məqalənin yazıldığı dildə və bundan əlavə yuxarıda göstərilən iki dildə olmalıdır. Məqalənin hər üç dildə yazılmış xülasəsi bir-birinin eyni olmalıdır. Açar sözlər uyğun xülasələrin sonunda onun yazıldığı dildə verilməklə ən azı üç sözdən ibarət olmalıdır.
6. Məqalədə UOT və PACS kodları göstərilməlidir.
7. Məqalə aşağıdakılardan ibarət olmalıdır:

- Giriş,
- Tədqiqat metodu
- Tədqiqat işinin müzakirəsi və onun nəticələri,
- İstinad ədəbiyyatı rus dilində olduğu halda orjinal dili mötərzə içərisində göstərməklə yalnız Latın əlifbası ilə verilməlidir.

8. **Şəkil**, **rəsm**, **qrafik** və **cədvəllər** çapda düzgün, aydın çıxacaq vəziyyətdə və mətn içərisində olmalıdır. Şəkil, rəsm və qrafiklərin yazıları onların altında yazılmalıdır. Cədvəllərdə başlıq cədvəlin üstündə yazılmalıdır.
9. **Mənbələr** mətn içərisində kvadrat mötərizə daxilində göstərilməklə məqalənin sonunda mətn daxilindəki sıra ilə düzülməlidir. Eyni mənbəyə iki və daha cox istinad edildikdə əvvəlki sıra sayı saxlanmaqla müvafiq səhifələr göstərilməlidir. Məsələn: [7,səh.15].

Ədəbiyyat siyahısında verilən hər bir istinad haqqında məlumat tam və dəqiq olmalıdır. İstinad olunan mənbənin biblioqrafik təsviri onun növündən (monoqrafiya, dərslik, elmi məqalə və s.) asılı olaraq verilməlidir. Elmi məqalələrə, simpozium, konfrans, və digər nüfuzlu elmi tədbirlərin materiallarına və ya tezislərinə istinad edərkən məqalənin, məruzənin və ya tezisin adı göstərilməlidir.

Nümunələr:

a) ***Məqalə:*** Demukhamedova S.D., Aliyeva İ.N., Godjayev N.M.. *Spatial and electronic structure af monomeric and dimeric complexes of carnosine with zinc,* Journal of structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010

b) ***Kitab:*** Christie ohn Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles*. Fourth Edition, Prentice Hall, 2002

c) ***Konfrans:*** Sadychov F.S., Aydın C., Ahmedov A.İ.. Appligation of Information-Communication Technologies in Science and education. II International Conference. *"Higher Twist Effects In Photon- Proton Collisions", Bakı, 01-03 Noyabr, 2007, ss 384-391*

Mənbələr 9 punto yazı tipi böyüklüyündə olmalıdır.

10. **Səhifə ölçüləri:** üstdən 2.8 sm, altdan 2.8 sm, soldan 2.5 sm və sağdan 2.5 sm olmalıdır. Mətn 11 punto yazı tipi böyüklüyündə, **Palatino Linotype** yazı tipi ilə və tək simvol aralığında yazılmalıdır. Paraqraflar arasında 6 punto yazı tipi aralığında məsafə olmalıdır.
11. Orijinal tədqiqat əsərlərinin tam mətni bir qayda olaraq 15 səhifədən artıq olmamalıdır.
12. Məqalənin nəşrə təqdimi aşağıdakı qaydada aparılır:

- Hər məqallə ən azı iki ekspertə göndərilir.
- Ekspertlərin tövsiyələrini nəzərə almaq üçün məqalə müəllifə göndərilir.
- Məqalə, ekspertlərin tənqidi qeydləri müəllif tərəfindən nəzərə alındıqdan sonra Jurnalın Redaksiya Heyəti tərəfindən çapa təqdim oluna bilər.

YAZIM KURALLARI

1. "Journal of Baku Engineering University- Matematik ve Bilgisayar Bilimleri" önceler yayımlanmamış orijinal çalışmaları ve yazarın kendi araştırma alanın-da yazılmış derleme makaleleri kabul etmektedir.
2. Makaleler İngilizce kabul edilir.
3. Makaleler Microsoft Word yazı programında, (**journal@beu.edu.az**) adresine gönderilmelidir. Gönderilen makalelerde şunlar dikkate alınmalıdır:

- Makalenin başlığı, yazarın adı, soyadı,
- İş yeri,
- E-posta adresi,
- Özet ve anahtar kelimeler.

4. **Özet** 100-150 kelime arasında olup 9 font büyüklüğünde, makalenin yazıldığı dilde ve yukarıda belirtilen iki dilde olmalıdır. Makalenin her üç dilde yazılmış özeti birbirinin aynı olmalıdır. Anahtar kelimeler uygun özetin sonunda onun yazıldığı dilde verilmekle en az üç sözcükten oluşmalıdır.
5. Makalede UOT ve PACS tipli kodlar gösterilmelidir.
6. Makale şunlardan oluşmalıdır:

- Giriş,
- Araştırma yöntemi
- Araştırma
- Tartışma ve sonuçlar,
- İstinat Edebiyatı Rusça olduğu halde orjinal dili parantez içerisinde göstermekle yalnız Latin alfabesi ile verilmelidir.

7. **Şekil, Resim, Grafik** ve **Tablolar** baskıda düzgün çıkacak nitelikte ve metin içerisinde olmalıdır. Şekil, Resim ve grafiklerin yazıları onların alt kısımda yer almalıdır. Tablolarda ise başlık, tablonun üst kısmında bulunmalıdır.
8. **Kullanılan kaynaklar**, metin dâhilinde köşeli parantez içerisinde numaralandırılmalı, aynı sırayla metin sonunda gösterilmelidir. Aynı kaynaklara tekrar başvurulduğunda sıra muhafaza edilmelidir. Örneğin: [7,seh.15].

Referans verilen her bir kaynağın künyesi tam ve kesin olmalıdır. Referans gösterilen kaynağın türü de eserin türüne (monografi, derslik, ilmî makale vs.) uygun olarak verilmelidir. İlmi makalelere, sempozyum, ve konferanslara müracaat ederken makalenin, bildirinin veya bildiri özetlerinin adı da gösterilmelidir.

Örnekler:

a) ***Makale:*** Demukhamedova S.D., Aliyeva İ.N., Godjayev N.M.. *Spatial and Electronic Structure of Monomerik and Dimeric Conapeetes of Carnosine Üith Zinc,* Journal of Structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010

b) ***Kitap:*** Christie ohn Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles*. Fourth Edition, Prentice Hall, p.386-398, 2002

c) ***Kongre:*** Sadychov F.S., Aydın C., Ahmedov A.İ. Appligation of Information-Communication Technologies in Science and education. II International Conference. "*Higher Twist Effects In Photon- Proton Collisions", Bakı, 01-03 Noyabr, 2007, ss 384-391*

Kaynakların büyüklüğü 9 punto olmalıdır.

9. **Sayfa ölçüleri**; üst: 2.8 cm, alt: 2.8 cm, sol: 2.5 cm, sağ: 2.5 cm şeklinde olmalıdır. Metin 11 punto büyüklükte **Palatino Linotype** fontu ile ve tek aralıkta yazılmalıdır. Paragraflar arasında 6 puntoluk yazı mesafesinde olmalıdır.
10. Orijinal araştırma eserlerinin tam metni 15 sayfadan fazla olmamalıdır.
11. Makaleler dergi editör kurulunun kararı ile yayımlanır. Editörler makaleyi düzeltme için yazara geri gönderilebilir.
12. Makalenin yayına sunuşu aşağıdaki şekilde yapılır:

- Her makale en az iki uzmana gönderilir.
- Uzmanların tavsiyelerini dikkate almak için makale yazara gönderilir.
- Makale, uzmanların eleştirel notları yazar tarafından dikkate alındıktan sonra Derginin Yayın Kurulu tarafından yayına sunulabilir.

13. Azerbaycan dışından gönderilen ve yayımlanacak olan makaleler için,(derginin kendilerine gonderilmesi zamani posta karşılığı) 30 ABD Doları veya karşılığı TL, T.C. Ziraat Bankası/Üsküdar-İstanbul 0403 0050 5917 No'lu hesaba yatırılmalı ve makbuzu üniversitemize fakslanmalıdır.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. «Journal of Baku Engineering University» - Математики и информатики публикует оригинальные, научные статьи из области исследования автора и ранее не опубликованные.

2. Статьи принимаются на английском языке.

3. Рукописи должны быть набраны согласно программы **Microsoft Word** и отправлены на электронный адрес (**journal@beu.edu.az**). Отправляемые статьи должны учитывать следующие правила:

- Название статьи, имя и фамилия авторов
- Место работы
- Электронный адрес
- Аннотация и ключевые слова

4. **Заглавие статьи** пишется для каждой аннотации заглавными буквами, жирными буквами и располагается по центру. Заглавие и аннотации должны быть представлены на трех языках.

5. **Аннотация**, написанная на языке представленной статьи, должна содержать 100-150 слов, набранных шрифтом 9 punto. Кроме того, представляются аннотации на двух других выше указанных языках, перевод которых соответствует содержанию оригинала. Ключевые слова должны быть представлены после каждой аннотации на его языке и содержать не менее 3-х слов.

6. В статье должны быть указаны коды UOT и PACS.

7. Представленные статьи должны содержать:

- Введение
- Метод исследования
- Обсуждение результатов исследования и выводов.
- Если ссылаются на работу на русском языке, тогда оригинальный язык указывается в скобках, а ссылка дается только на латинском алфавите.

8. **Рисунки, картинки, графики и таблицы** должны быть четко выполнены и размещены внутри статьи. Подписи к рисункам размещаются под рисунком, картинкой или графиком. Название таблицы пишется над таблицей.

9. **Ссылки** на источники даются в тексте цифрой в квадратных скобках и располагаются в конце статьи в порядке цитирования в тексте. Если на один и тот же источник ссылаются два и более раз, необходимо указать соответствующую страницу, сохраняя порядковый номер цитирования. Например: [7, стр.15]. Библиографическое описание ссылаемой литературы должно быть проведено с учетом типа источника (монография, учебник, научная статья и др.). При ссылке на научную статью, материалы симпозиума, конференции или других значимых научных мероприятий должны быть указаны название статьи, доклада или тезиса.

Например:

a) ***Статья:*** Demukhamedova S.D., Aliyeva I.N., Godjayev N.M. *Spatial and electronic structure of monomeric and dimeric complexes of carnosine with zinc*, Journal of Structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010

b) ***Книга:*** Christie on Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles.* Fourth Edition, Prentice Hall, 2002

c) ***Конференция:*** Sadychov F.S, Fydin C,Ahmedov A.I. Appligation of Information-Communication Nechnologies in Science and education. II International Conference. *"Higher Twist Effects In Photon-Proton Collision",* Bakı,01-03 Noyabr, 2007, ss.384-391

Список цитированной литературы набирается шрифтом 9 punto.

10. **Размеры страницы:** сверху 2.8 см, снизу 2.8 см, слева 2.5 и справа 2.5. Текст печатается шрифтом **Palatino Linotype**, размер шрифта 11 punto, интервал-одинарный. Параграфы должны быть разделены расстоянием, соответствующим интервалу 6 punto.

11. Полный объем оригинальной статьи, как правило, не должен превышать 15 страниц.

12. Представление статьи к печати производится в ниже указанном порядке:

- Каждая статья посылается не менее двум экспертам.
- Статья посылается автору для учета замечаний экспертов.
- Статья, после того, как автор учел замечания экспертов, редакционной коллегией журнала может быть рекомендована к печати.