Journal of Baku Engineering University *Mathematics and Computer Science*

BAKI MÜHƏNDİSLİK UNİVERSİTETİ

ISSN 2521-635X

Volume 3
Number 1
2019

Journal of Baku Engineering University

MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

Journal is published twice a year
Number-1. June, Number-2. December

An International Journal

http://journal.beu.edu.az

CONTACT ADDRESS

Journal of Baku Engineering University
AZ0102, Khirdalan city, Hasan Aliyev str. 120, Absheron, Baku, Azerbaijan
Tel: 00 994 12 - 349 99 95 Fax: 00 994 12 349-99-90/91

e-mail: *journal@beu.edu.az*
web: *http://journal.qu.edu.az*
facebook: *Journal Of Baku Engineering University*

ISSN 2521-635X

ISSN 2521-635X

Journal of Baku Engineering University

MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

Baku - AZERBAIJAN

Journal of Baku Engineering University

MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

2019. Volume 3, Number 1

CONTENTS

JOURNAL OF BAKU ENGINEERING UNIVERSITY- MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
2019. Volume 3, Number 1 Pages 3-8

UDC 517.95 ; 517.9

GENERALIZATION OF THE CONCEPT OF RESOLVENTS AND ITS SOME APPLICATIONS

E.H.EYVAZOV
Baku State University, Baku / AZERBAIJAN.
ANAS Institute of Mathematics and Mechanics, Baku / AZERBAIJAN.
Baku Engineering University, Khirdalan/ AZERBAIJAN.
email: eyvazovelshad@gmail.com

ABSTARCT

In the paper we introduce an operator valued functions with the values from the space of linear bounded operators acting in some Hilbert space, determined is some domain of a complex plane, possessing some properties of the resolavent of the self-adjoint operator. By means of the generalized resolvent we construct some operator and prove and prove its self-adjointness. Using the properties of the resolvent of the newly constructed self-adjoints operator, the norm of the generalized resolvent is estimated from above. The obtained results are used for proving self-adjointness of some singular differential operators that play important role in quantum mechanics . Note that these self-adjoint operators correspond to self-adjoint extensions of symmetric differential operators with nonzero defect indeed that describe real physical processes.

Key words: generalized resolvent, self-adjointness, symmetric expansion, quantum mechanics.

ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ РЕЗОЛВЕНТЫ И ЕГО НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ

АННОТАЦИЯ

В работе вводится операторозначная функция со значениями из пространства линейных ограниченных операторов действующих в некотором гильбертовом пространстве, определенная в некоторой области комплексной плоскости обладающая некоторыми свойствами резольвенты самосопряженного оператора. С помощью обобщенной резольвенты строится некоторый оператор и доказывается его самосопряженность. Используя свойства резольвенты новопостроенного самосопряженного оператора, оценивается сверху норма обобщенной резольвенты. Полученные результаты применяются для доказательства самосопряженности некоторых сингулярных дифференциальных операторов, которые играют важные роли в квантовой механике. Отметим, что эти самосопряженные операторы соответствуют те самосопряженные расширении симметрических дифференциальных операторов с ненулевыми индексами дефекта, которые описывают реальные физические процессы.

Ключевые слова: обобщенная резольвента, самосопряженность, симметрическое расширение, квантовая механика.

ÜMUMILƏŞMIŞ REZOLVENT ANLAYIŞI VƏ ONUN TƏTBIQLƏRI

XÜLASƏ

İşdə kompleks müstəvinin müəyyən bir oblastında təyin olunmuş və öz-özünə qoşma operatorun rezolventasının bəzi xassələrini ödəyən, qiymətləri müəyyən bir Hilbert fəzasında təsir edən xətti məhdud operatorlar fəzasından olan operator qiymətli funksiya daxil olunur. Ümumiləşmiş rezolventanın köməyi ilə yeni bir operator qurulur və onun öz-özünə qoşmalığı isbat olunur. Bu yeni qurulmuş öz-özünə qoşma operatorun rezolventasının xassələrindən istifadə edilərək ümumiləşmiş rezolventanın norması yuxarıdan qiymətləndirilir. Alınan nəticələr kvant mexanikasında mühüm rol oynayan bəzi sinqulyar diferensial operatorların öz-özünə qoşmalığını isbat etmək üçün tətbiq edilir. Qeyd edək ki, bu öz-özünə qoşma operatorlar defekt indeksləri sıfır olmayan simmetrik diferensial operatorların o öz-özünə qoşma genişlənmələridir ki, onlar real fiziki prosesləri təsvir edir.

Açar sözlər: ümumiləşmiş rezolventa, öz-özünə qoşmalıq, simmetrik genişlənmə, kvant mexanikası.

1.Introduction

Denote by $\sigma(A)$ a spectrum of the self-adjoint operator A, acting in Hilbert space H. We have the following

Conjecture 1.1(see. [1, p.9]). *For any complex number* λ *and for any elements from the domain of definition* $D(A)$ *of the operator* A *the following inequality is valid*

$$dist(\lambda, \sigma(A))\|u\| \le \|(A-\lambda E)u\|, \text{ (1.1)}$$

where E *- is a unit operator,* $\|\cdot\|$ *-is the norm in Hilbert space* H *and*

$$dist(\lambda, \sigma(A)) = \inf_{\mu\in\sigma(A)}|\lambda-\mu|.$$

This conjecture plays an important role in spectral theory of self-adjoint operator for two reasons. Frist of all, this conjecture allows to localize the spectrum of the self-adjoint operator, secondly, by means of the quasimode one can find approximate eigenvalues of this operator. Recall that the normed element u_ε (i.e. $\|u_\varepsilon\|=1$) from the domain of definition of the operator A is said to be a quasimode if $\|(A-\lambda E)u_\varepsilon\| \le \varepsilon$, where ε is a positive number. From inequality (1.1) it follows that if u_ε is a quasimode of the complex number λ, then

$$dist(\lambda, \sigma(A)) \le \varepsilon,$$

i.e. the number λ is in the ε vicinity of the spectrum A.

Note that theory of quasimode plays an important part when studying surface superconductivity in super-conductive materials of II kind (see, [1-4]). The greatest lower bound of the spectrum of the magnetic Sihrodinger operator can be estimated by means of quasimode (see., [5-8]).

If we put $g=(A-\lambda E)u$, then from (1.1) we get:

$$\|R_\lambda g\| \le \frac{1}{dist(\lambda, \sigma(A))}\|g\|.$$

Hence we have

$$\|R_\lambda\| \le \frac{1}{dist(\lambda, \sigma(A))}, \text{ (1.2)}$$

where the number λ belongs to the resolvent set $\rho(A)$, $R_\lambda = (A-\lambda E)^{-1}$ is the resolvent of the self –adjont operator A. It is known that the resolvent R_λ of the self-adjoint operator A, in addition to property (1.2) has the following properties as well.

1) For any number λ and μ from the resolvent set $\rho(A)$ the following Hilbert relation (see., [9,p. 136]) is valid:

$$R_\mu - R_\lambda = (\mu-\lambda)R_\mu R_\lambda.$$

2) For any number λ from the resolvent set $\rho(A)$ the following equality (see., [9,p. 138]) is valid:

$$(R_\lambda)^* = R_{\bar{\lambda}},$$

where $\bar{\lambda}$ is a comples number adjoint to λ, $(R_\lambda)^*$ is an operator adjoint to R_λ.

The goal of the paper is to introduce an operator-valued function (we call it a generalized resolvent with the values from the space of linear bounded operators acting in some Hilbetr space, determined in some domain of the complex plane, proceeding from properties 1) and 2) of the resolvent of the self-adjoint operator. By means of the generalized resolvent to construct a family of operators determined in a complex plane, to prove independence of their domain of definition of the argument, to estimate the norm of the generalized resolvent and to use the obtained results for proving self-adjointness of some singular differential operators that play an important part in quantum mechanics.

2. Formulation and proof of the main result.

By $L(H)$ we denote a space of linear bounded operators acting in Hilbert space H.

Definition 2.1. The operator-valued function $f(z)$ determined in some domain Ω of the complex plane C, with the values from the space $L(H)$ satisfying the conditions:

$i)$ for arbitrary elements z_1 and z_2 from the domain Ω

$$f(z_2) - f(z_1) = (z_2 - z_1) f(z_2) f(z_1);$$

$ii)$ for some value $z = z_0 \in \Omega$ the operator $f(z_0)$ has an inverse operator $f^{-1}(z_0)$ (generally speaking, unbounded);

$iii)$ there exists a complex number μ from the domain Ω such that $\bar{\mu} \in \Omega$ and $f^*(\mu) = f(\bar{\mu})$, is called a generalized resolvent.

Theorem 2.2. *Let $f(z)$ be a generalized resolvent determined is some domain Ω of a complex plane. Then the followings are valid:*

$a)$ *at each point z of the domain Ω there exists an inverse operator $f^{-1}(z)$;*

$b)$ *the domain of definition of the operators $A(z) = f^{-1}(z) + zE$ is independent of z;*

$c)$ *the family of operators $A(z)$ is independent of z;*

$d)$ *the operator $A \equiv A(z)$ is closed and its domain of definition is everywhere dense in H;*

$e)$ *the operator A is self-adjoint;*

$f)$ *the following inequality is valid*

$$\|f(z)\| \leq \frac{1}{dist(\lambda, \sigma(A))}.$$

P**roof.** The existence of the inverse operator $f^{-1}(z_0)$ follows from condition $ii)$. Let z be an arbitrary element from Ω, that differs from z_0. Show that from the equality $f(z)h = 0$ it follows $h = 0$. From condition $i)$ we have

$$f(z_0)h - f(z)h = (z_0 - z) f(z_0) f(z)h. \quad (2.1)$$

As condition $i)$ yields that the operator, $f(z)$ and $f(z_0)$ are permulational, then from (2.1) it follows that $f(z_0)h = 0$. According to condition $ii)$ hence it follows that $h = 0$. Consequently, for any element z from the domain Ω there exists an inverse operator $f^{-1}(z)$.

We now prove that the domain of definition $D(A(z))$ of the family of operators

$$A(z) = f^{-1}(z) + zE \quad (z \in \Omega)$$

is independent of z. Let z_1 and z_2 be arbitrary complex numbers from the domain Ω, and $g \in D(A(z_1))$. Then these exists an element φ from space H such that $g = f(z_1)\varphi$. From condition $i)$ we have

$$g = f(z_1)\varphi = f(z_2)[\varphi + (z_1 - z_2)f(z_1)\varphi] = f(z_2)\psi, \quad (2.2)$$

where $\psi = \varphi + (z_1 - z_2)f(z_1)\varphi$. From (2.2)it follows that $g \in D(A(z_2))$. So , we proved that any element entering into the set $D(A(z_1))$, enters into the set $D(A(z_2))$ as well, i.e.

$$D(A(z_1)) \subset D(A(z_2)). \quad (2.3)$$

From equivalence of the numbers z_1 and z_2 it follows that the inverse imbedding is valid as well

$$D(A(z_1)) \subset D(A(z_2)). \quad (2.4)$$

From comparison of (2.3) and (2.4) we get

$$D(A(z_1)) = D(A(z_2)),$$

i.e. the domain of definition of the family of operators $A(z)$ *is independent of* z.

For proving statement $c)$ we use the formula

$$f(z_2) - f(z_1) = (z_2 - z_1)f(z_2)f(z_1),$$

where z_1 and z_2 are arbitrary complex numbers from the domain Ω. From this relation we get :

$$f^{-1}(z_1) - f^{-1}(z_2) = (z_2 - z_1)E. \quad (2.5)$$

According to the definition of the operator $A(z)$, from equality (2.5) we have

$$A(z_2) - A(z_1) = f^{-1}(z_2) + z_2E - \left[f^{-1}(z_1) + z_1E\right] =$$
$$= f^{-1}(z_2) - f^{-1}(z_1) + (z_2 - z_1)E = 0.$$

Hence, taking into account arbitrariness of the numbers z_1 and z_2, we get statement $c)$. We denote the general value of the family of operators $A(z)$ by A. We prove $d)$. From statement $c)$ it follows that $A = A(\mu) = f^{-1}(\mu) + \mu E$, where μ is a complex number that participates in condition $iii)$. Denote by $D(A)$ as usual, the domain of definition of the operator A, by $R(f(\mu))$ the range of values of the operator $f(\mu)$, by $[R(f(\mu))]^{\perp}$ - an orthogonal supplement to $R(f(\mu))$. Show that the kernel

$$Ker(f^*(\mu)) = \{h \in H : f^*(\mu)h = 0\}$$

of the operator $f^*(\mu)$ consists only of the element 0. Assume that $h \in Ker(f^*(\mu))$. Then condition $iii)$ yields that $h \in Ker(f(\overline{\mu}))$. From statement $a)$ it follows that $Ker(f(\overline{\mu})) = \{0\}$. Consequently, $Ker(f^*(\mu)) = \{0\}$. From the equality

$$[R(f(\mu))]^{\perp} = Ker(f^*(\mu))$$

It follows that the range of value of the operator $f(\mu)$ is everywhere dense in H. Hence and from the equality $A = f^{-1}(\mu) + \mu E$ it follows that the range of values of the operator A is everywhere dense in H. Since $f(\mu)$ is closed and $f^{-1}(\mu)$ exists, then $f^{-1}(\mu)$ is also closed. Consequently, the operator A is closed as well. By the same token, statement $d)$ is proved.

Prove statement $e)$. Let the complex number μ satisfy the condition $iii)$. Using statement $c)$ and the known facts from functional analysis, we get the equality

$$A^* = A^*(\mu) = \left[f^{-1}(\mu) + \mu E\right]^* = \left[f^{-1}(\mu)\right]^* + (\mu E)^* =$$

$$\left[f^*(\mu)\right]^{-1} + \overline{\mu}E = \left[f(\overline{\mu})\right]^{-1} + \overline{\mu}E = A(\overline{\mu}) = A.$$

By the same token we proved statement $e)$.

Using the definition of the operators $A \equiv A(z) = f^{-1}(z) + zE$ and $R_z = (A - zE)^{-1}$ and applying estimation (1.2), we get the proof of statement $f)$ of the theorem.

The Theorem is proved.

3. Applications

Example . The case when the potential is concentrated on the plane .

Applying the successive approximations method it is easy to prove that for any function $\varphi(x)$ from $L_2(R^3)$ the equation

$$\psi(x_1;x_2;0;z) = -\frac{1}{4\pi}\int_{R^3} \frac{e^{-z\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+y_3^2}}}{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+y_3^2}}\varphi(y_1;y_2;y_3)dy_1dy_2dy_3 +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{R^2} \frac{e^{-z\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}}}{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}}\psi(y_1;y_2;0;z)dy_1dy_2$$

for sufficiently large real z has a unique solution from $L_2(R^3)$. Hence it follows that there exists a sufficiently large positive M such that the integral operator $f(z)$ with the kernel

$$G(x_1;x_2;x_3;z) = \frac{e^{-z\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+x_3^2}}}{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+x_3^2}}$$

in the domain $\Omega = C \setminus [-M, +\infty)$ of the complex plane satisfies the theorem conditions. This means that the operator A acting by the rules

$$A\psi(x) = -\Delta\psi(x) + \delta(x_3 = 0)\psi(x)$$

with domain of definition

$$D(A) = \{\psi(x) \in L_2(R^3) \cap C(R^3): \quad -\Delta\psi(x) + \delta(x_3 = 0)\psi(x) \in L_2(R^3)\}$$

is a self-adjoint operator in space $L_2(R^3)$. (Here $x = (x_1; x_2; x_3) \in R^3$, Δ is a Laplace operator , $\delta(x_3 = 0)$ is Dirac's function concentrated on the plane $x_3 = 0$). Note that the operator A is one of the self-adjoint extensions of the symmetric operator B acting by the rules $B\psi(x) = -\Delta\psi(x)$ with domain of definition

$$D(B) = \{\psi(x) \in L_2(R^3): \quad \psi(x_1; x_2; 0) = 0, \quad -\Delta\psi(x) \in L_2(R^3)\}$$

with deficiency index (∞, ∞) (see., [10]).

REFERENCES

1. S. Fournais, B. Helffer. Spectral methods in surface superconductivity, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 77, Birkhauser Boston Inc., Boston, MA, 2010.
2. D. Saint-James, G. Sarma, E.J. Thomas. Type II Superconductivity, Pergamon, Oxford 1969.
3. M. Tinkham. Introduction to Superconductivity. McGraw–Hill Inc., New York, 1975.
4. M. Del Pino , P. L. Felmer , P. S Ternberg , Boundary concentration for eigenvalue problems related to the onset of superconductivity, Comm. Math. Phys., Vol. 210, pp. 413–446, 2000.
5. N. Raymond, Bound states of the magnetic Schrödinger operator, preprint, 2016, available at https:// blogperso.univ-rennes1.fr/nicolas.raymond/public/Magnetic-Book.pdf.
6. B. Helffer, Y. A. Kordyukov. Eigenvalue estimates for a three-dimensional magnetic Schrödinger operator, Asymptotic Analysis, Vol. 82,p. 65–89, 2013.
7. J.-P. Miqueu, Eigenstates of the Neumann magnetic Laplacian with vanishing magnetic field, Ann. Henri Poincaré, vol. 19, no. 7, pp. 2021–2068, 2018.
8. N. Ueki. Asymptotics of the infimum of the spectrum of Schr¨odinger operators with magnetic fields, J. Math. Kyoto Univ. Vol. 37, No.4, p. 615–638, 1998.
9. N.I. Akhiezer, I.M. Glazman. Teoriya lineynkh operatorov v gilbertovom prostranstve,: vol 1, «Visha shkola», 1977(in Russian).
10. E.H. Eyvazov. Opisanie vsex samosopryajyonnıx rasshireniy operatora Schredingera s sinqulyarnım potensialom, Uch. Zapiski AQU , Voprosı prikladnoy matematiki i kibernetiki, № 1, p.112-115, 1978 (in Russian).

JOURNAL OF BAKU ENGINEERING UNIVERSITY- MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
2019. Volume 3, Number 1 *Pages 9-17*

UDC 517.95

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ К РЕШЕНИЮ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕРЕГУЛЯРНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Э.А. ГАСЫМОВ
Бакинский Государственный Университет
Баку, АЗЕРБАЙДЖАН
gasymov-elmagha@rambler.ru

РЕЗЮМЕ

В работе рассматривается смешанная задача для эллиптических и гиперболических уравнений с нерегулярными граничными условиями. В таких случаях для «произвольной» функции $y = f(x)$, $x \in [a,b]$ классическая формула разложения Брикгофа–Тамаркина по вычетам функции Грина спектральной задачи отсутствует и для получения этой формулой разложения некоторые авторы на функции $y = f(x)$ налагают дополнительные однородные граничные ограничения (условия (c)), которым может и не удовлетворять решение рассматриваемой смешанной задачи.

В настоящей работе на решение смешанной задачи, не налагая дополнительные однородные граничные ограничения вида (c), с помощью метода конечного интегрального преобразования получается аналитическое представление решения рассматриваемой смешанной задачи.

Ключевые слова: конечное интегральное преобразование, не регулярные граничные условия.

SONLU İNTEQRAL ÇEVİRMƏ METODUNUN ELLİPTİK VƏ HİPERBOLİK TƏNLİKLƏR ÜÇÜN QEYRİ-REQULYAR SƏRHƏD ŞƏRTLİ QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN HƏLLİNƏ TƏTBİQİ

XÜLASƏ

Məqalədə elliptik və hiperbolik tənliklər üçün qeyri-requlyar sərhəd şərtli qarışıq məsələyə baxılır. Belə halda "ixtiyari" $y = f(x),\ x \in [a,b]$ funksiyası üçün uyğun spektral məsələnin Grin funksiyasının çıxıqları üzrə Brikhof –Tamarkinin klassikayrılış düsturu öz gücündə qalmır.

Bəzi müəlliflərbu ayrılış düsturunu almaq üçün $y = f(x)$ funksiyasının sərhəd qiymətlərinin üzərinə bircins məhdudiyyətlər qoyurlar ki, ((c)-şərtləri), baxılan qarışıq məsələnin həlli bu şərtləri ödəməyədə bilər.

İşdə qarışıq məsələnin həllinin sərhəd qiymətlərinin üzrərinə əlavə (c) şəkilli bircins məhdudiyyətlər qoymadan sonlu inteqral çevirmə metodunun tətbiqi ilə baxılan qarışıq məsələnin həllinin anlatik ifadəsi alınır.

Açar sözlər: sonlu inteqral çevirmə, qeyri-requlyar sərhəd şərtləri.

APPLICATION OF FINITE INTEQRAL TRANSFORMATION METHOD FOR ELLIPTIC AND HIPERBOLIK EQUATIONS TO THE SOLUTION OF A MEXED PROBLEM ÜITH NON-REQULYAR BOUNDARY CONDITIONS

ABSTARCT

In the paper we consider a mixed problem for elliptic and hyperbolic equations with irregular boundary conditions. In such cases for an "arbitrary" function $y = f(x)$, $x \in [a,b]$ the classic Brikhoff –Tamarkin expansion formula on residue of the Green function of a spectral problem cloes not exist and for obtaining this expansion formula some authors impose on the function $y = f(x) \in C^k([a,b])$ additional homogeneous restrictions (condition (e)) that might not satisfy the solution of the considered mixed problem.

In the present paper, not imposing additional boundary restrictions of the form © on the solution of the mixed problem, by means of the finite integral transformation method we obtain analytic representation of the solutions of the consider mixed problem.

Keywords: finite inteqral transformation, non-requlyar boundary conditions.

При решении смешанных задач для дифференциальных уравнений в частных производных с нерегулярными граничными условиями (которых называем условиями (A)), в [6] при гиперболическом случае формально применяя интегральное преобразование Лапласа к смешанную задачу получается соответствующая спектральная задача. В таких случаях для «произвольной» функции $y = f(x),\ x \in [a,b]$ классическая формула разложения Брикгофа [2]- Тамаркина [3]-Наймарка [4]-Расулова [5] повычетом [1] функции Грина спектральной задачи, вообще говоря, отсутствует. В [6] на функции $y = f(x) \in C^k([a,b])$ добавляя дополнительные однородные граничные ограничения вида

$$E_l(f) \equiv \sum_{s=0}^{k} \left(\alpha_{ls} f^{(s)}(a) + \beta_{ls} f^{(s)}(b)\right) = 0,\ l = 1,\dots,m,\ (\textit{условия}(c)),$$

(α_{ls}, β_{ls}-некоторые числа;*k,m*-натуральные числа) для $f(x)$ получается классичес-кая формула разложения Брикгофа - Тамаркина и используясь этой формулой решается рассматриваемая смешанная задача. Для применимости этой схематически априорно должно быть предположено, что искомое решение $u(x,t)$ в любой момент времени t, должно удовлетворять *и* заданным нерегулярным граничным условиям (А) и дополнительно при любом $t > 0$ по x должно удовлетворять однородным граничным условиям (с). А если при постановке смешанной задачи априорно предполагать, что решение $u(x,t)$ рассматриваемой смешанной задачи удовлетворяет и нерегулярным граничным условиям (А) и в любой момент времени $t > 0$ по $x \in [a,b]$ удовлетворяет однородным граничным условиям (с), то такая постановка смешанной задачи некорректно.

В настоящей работе на решение смешанной задачи не налогая дополнительные однородные граничные ограничения вида (с), с помощью метода конечного интегрального преобразования решается смешанная задаче с нерегулярными граничными условиями.

Для простаты записи, обсуждений и доступности широких круг читателей сказанные объясняем на следующих модельных смешанных задачах для эллиптических и гиперболических уравнений с нерегулярными граничными условиями.

Постановка задачи. Найти решение эллиптического уравнения

$$a^{-2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x,t), \quad 0 < x < 1,\ 0 < t \le T,\ (1.1)$$

или гиперболического уравнения

$$a^{-2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x,t), \quad 0 < x < 1,\ 0 < t \le T,\ (1.2)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{aligned} &u\big|_{x=0} + \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{x=1} = \mu_1(t), \\ &\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=1} = \mu_2(t),\ 0 < t \le T, \end{aligned} \qquad (2)$$

и начальным условиям

$$\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k}\bigg|_{t=0} = f_k(x),\ 0 < x < 1,\quad k = 0,1,\ (3)$$

где $F(x,t), \mu_j(t), f_k(x)$ − известные непрерывные функции в $[0,1]\times[0,T]$; $a(a>0), \; T(T>0)$ некоторые положительные числа; $u\equiv u_k(x,t), (k=1,2)$ искомое классическое решение, соответственно.

Решение. Пусть задача $(1.k), (k=1,2),$ (2),(3) имеет классическое решение $u\equiv u_k(x,t)$.Применяя конечное интегральное преобразование

$$K\varphi \equiv \int_0^t e^{-\lambda\tau}\varphi(\tau)d\tau, \; (\lambda - \text{комплексный параметр}) \quad (4)$$

к $(1.k), (k=1,2),$ (2) с учетом (3), соответственно, имеем

$$\left(a^{-2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\lambda^2\right)\int_0^t e^{-\lambda\tau}u(x,\tau)d\tau = -e^{-\lambda t}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\lambda u(x,t)\right)+ \\ + f_1(x)+\lambda f_0(x)+\int_0^t e^{-\lambda\tau}F(x,\tau)d\tau, \quad x\in(0,1), \; t\in(0,T], \quad (5.1)$$

$$\left(a^{-2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\lambda^2\right)\int_0^t e^{-\lambda\tau}u(x,\tau)d\tau = e^{-\lambda t}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\lambda u(x,t)\right)- \\ - f_1(x)-\lambda f_0(x)+\int_0^t e^{-\lambda\tau}F(x,\tau)d\tau, \quad x\in(0,1), \; t\in(0,T], \quad (5.2)$$

$$\int_0^t e^{-\lambda\tau}u(x,\tau)d\tau\Big|_{x=0}+\lambda\int_0^t e^{-\lambda\tau}u(x,\tau)d\tau\Big|_{x=1}=\int_0^t e^{-\lambda\tau}\mu_1(\tau)d\tau+f_0(1)-e^{-\lambda t}u(1,t),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t e^{-\lambda\tau}u(x,\tau)d\tau\Big|_{x=1}=\int_0^t e^{-\lambda\tau}\mu_2(\tau)d\tau, \quad 0<t\le T. \quad (6)$$

Задачу (5.к),(6) называем параметрической задачей, соответствующая задачам (1.к),(2),(3), где $k=1,2.$ Для решения задачи (5.к),(6), сначала решаем соответствующую неоднородную спектральную задачу

$$\left(a^{-2}\frac{d^2}{dx^2}+\lambda^2\right)y=\psi(x), \quad x\in(0,1), \quad (7.1)$$

$$\left(a^{-2}\frac{d^2}{dx^2}-\lambda^2\right)y=\psi(x), \quad x\in(0,1), \quad (7.2)$$

$$V_1(y)\equiv y\big|_{x=0}+\lambda y\big|_{x=1}=\gamma_1, \\ V_2(y)\equiv \frac{dy}{dx}\Big|_{x=1}=\gamma_2, \quad (8)$$

где γ_1,γ_2 − некоторые числа, $\psi(x)\in C([0,1])$.

Система фундаментальных частных решений однородного уравнения, соответствующая (7.к), будет

$$y_{11}(x,\lambda)=e^{-i\lambda ax}, \quad y_{12}(x,\lambda)=e^{i\lambda ax}, \; i\equiv\sqrt{-1}, \; \textit{при} \;\; k=1, \\ y_{21}(x,\lambda)=e^{-\lambda ax}, \quad y_{22}(x,\lambda)=e^{\lambda ax} \quad \textit{при} \;\; k=2.$$

Знаменатель функции Грина задачи (7.к), (8) будет

$$\Delta_1(\lambda) = ia\lambda\sigma_1(\lambda), \quad \sigma_1(\lambda) \equiv e^{ia\lambda} + 2\lambda + e^{-ia\lambda}, \quad (\text{\textit{при}}\ \ k=1), \tag{9.1}$$

$$\Delta_2(\lambda) = a\lambda\sigma_2(\lambda), \quad \sigma_2(\lambda) \equiv e^{a\lambda} + 2\lambda + e^{-a\lambda}, \quad (\text{\textit{при}}\ \ k=2). \tag{9.2}$$

Фундаментальное решение уравнения (7.к) будет

при $k=1$:

$$P_1(x,\xi,\lambda) = \frac{ai}{2\lambda}\begin{cases} y_{11}(\xi,\lambda)y_{12}(x,\lambda), & \text{\textit{при}}\ 0 \le x \le \xi \le 1, \\ y_{12}(\xi,\lambda)y_{11}(x,\lambda), & \text{\textit{при}}\ 0 \le \xi \le x \le 1, \end{cases}$$
$$\text{\textit{при}}\ \operatorname{Im}\lambda \le 0,$$

$$P_1(x,\xi,\lambda) = -\frac{ai}{2\lambda}\begin{cases} y_{12}(\xi,\lambda)y_{11}(x,\lambda), & \text{\textit{при}}\ 0 \le x \le \xi \le 1, \\ y_{11}(\xi,\lambda)y_{12}(x,\lambda), & \text{\textit{при}}\ 0 \le \xi \le x \le 1, \end{cases}$$
$$\text{\textit{при}}\ \operatorname{Im}\lambda > 0,$$

при $k=2$:

$$P_2(x,\xi,\lambda) = \frac{a}{2\lambda}\begin{cases} y_{22}(\xi,\lambda)y_{21}(x,\lambda), & \text{\textit{при}}\ 0 \le x \le \xi \le 1, \\ y_{21}(\xi,\lambda)y_{22}(x,\lambda), & \text{\textit{при}}\ 0 \le \xi \le x \le 1, \end{cases}$$
$$\text{\textit{при}}\operatorname{Re}\lambda \le 0,$$

$$P_2(x,\xi,\lambda) = -\frac{a}{2\lambda}\begin{cases} y_{21}(\xi,\lambda)y_{22}(x,\lambda), & \text{\textit{при}}\ 0 \le x \le \xi \le 1, \\ y_{22}(\xi,\lambda)y_{21}(x,\lambda), & \text{\textit{при}}\ 0 \le \xi \le x \le 1, \end{cases}$$
$$\text{\textit{при}}\operatorname{Re}\lambda > 0.$$

Следовательно

$$P_1(x,\xi,\lambda) = \frac{ai}{2\lambda}\begin{cases} e^{-i\lambda a|x-\xi|}, \text{\textit{при}}\ \operatorname{Im}\lambda \le 0, \\ -e^{i\lambda a|x-\xi|}, \text{\textit{при}}\ \operatorname{Im}\lambda > 0, \end{cases}$$

$$P_2(x,\xi,\lambda) = \frac{a}{2\lambda}\begin{cases} e^{\lambda a|x-\xi|}, \text{\textit{при}}\ \operatorname{Re}\lambda \le 0, \\ -e^{-\lambda a|x-\xi|}, \text{\textit{при}}\ \operatorname{Re}\lambda > 0. \end{cases}$$

При

$$\Delta_k(\lambda) \ne 0 \tag{10}$$

задача (7.к), (8) имеет единственное решениеи она представляется формулой [7]

$$y_k(x,\lambda) = \delta_k(x,\lambda,\gamma_1,\gamma_2) + \int_0^1 G_k(x,\xi,\lambda)\psi(\xi)d\xi, \quad 0 \le x \le 1, \ (k=1,2). \tag{11.к}$$

где

$$G_k(x,\xi,\lambda) = P_k(x,\xi,\lambda) + G_{k0}(x,\xi,\lambda);$$

$$G_{k0}(x,\xi,\lambda) = \frac{1}{\Delta_k(\lambda)}\begin{vmatrix} 0 & y_{k1}(x,\lambda) & y_{k2}(x,\lambda) \\ V_1(P_k) & V_1(y_{k1}) & V_1(y_{k2}) \\ V_2(P_k) & V_2(y_{k1}) & V_2(y_{k2}) \end{vmatrix},$$

$$\delta_k(x,\lambda,\gamma_1,\gamma_2)=\frac{1}{\Delta_k(\lambda)}\begin{vmatrix}0 & y_{k1}(x,\lambda) & y_{k2}(x,\lambda)\\ -\gamma_1 & V_1(y_{k1}) & V_1(y_{k2})\\ -\gamma_2 & V_2(y_{k1}) & V_2(y_{k2})\end{vmatrix},\quad (k=1,2).\ (12)$$

Согласно формуле (11.к) из (5.к), (6) имеем

$$\int_0^t e^{-\lambda\tau}u(x,\tau)d\tau=\delta_k\left(x,\lambda,\int_0^t e^{-\lambda\tau}\mu_1(\tau)d\tau+f_0(1)-e^{-\lambda t}u(1,t),\int_0^t e^{-\lambda\tau}\mu_2(\tau)d\tau\right)+$$
$$+\int_0^1 G_k(x,\xi,\lambda)\left\{(-1)^k e^{-\lambda t}\left(\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}+\lambda u(\xi,t)\right)-(-1)^k f_1(\xi)-(-1)^k\lambda f_0(\xi)+\int_0^t e^{-\lambda\tau}F(\xi,\tau)d\tau\right\}d\xi.$$

Следовательно, при (10), имеет место равенство

$$\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}u(x,\tau)d\tau+\delta_k(x,\lambda,1,0)u(1,t)-(-1)^k\int_0^1 G_k(x,\xi,\lambda)\left(\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}+\lambda u(\xi,t)\right)d\xi= \quad (13.k)$$
$$=\Phi_k(x,t,\lambda);\qquad 0\le t\le T,\ 0\le x\le 1,\ (k=1,2),$$

где

$$\Phi_k(x,t,\lambda)=\delta_k\left(x,\lambda,\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}\mu_1(\tau)d\tau+f_0(1)e^{\lambda t},\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}\mu_2(\tau)d\tau\right)+$$
$$+\int_0^1 G_k(x,\xi,\lambda)\left\{(-1)^{k-1}e^{\lambda t}\left[f_1(\xi)+\lambda f_0(\xi)\right]+\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}F(\xi,\tau)d\tau\right\}d\xi.$$

Пользуясь результатами работ [7], получаем, что корни $\lambda_{jm}^{(k)}$ $(j=1,2;m=N_0,N_0+1,...,)$, (N_0- достаточно большое натуральное число), трансцендентного уравнения $\sigma_k(\lambda)=0$ соответственно асимптотически представляются формулами

$$\lambda_{jm}^{(1)}=x_{jm}^{(0)}+\sqrt{-1}y_{jm}^{0}+O\left(\frac{1}{m\ln m}\right),\ (14.1)$$

$$\lambda_{jm}^{(2)}=y_{jm}^{(0)}-\sqrt{-1}x_{jm}^{0}+O\left(\frac{1}{m\ln m}\right),\ (14.2)$$

где

$$x_{1m}^0=\frac{(2m+1)\pi}{a}-\frac{\pi}{2a}-\frac{1}{(2m+1)a\pi}\ln\left(\frac{2}{a}(2m+1)\pi\right),$$

$$y_{1m}^0=-\frac{1}{a}\ln\left(\frac{2}{a}(2m+1)\pi\right)+\frac{1}{2a(2m+1)},$$

$$x_{2m}^0=-\frac{2m\pi}{a}-\frac{\pi}{2a}-\frac{1}{2\pi am}\ln\left(\frac{4}{a}m\pi\right),$$

$$y_{2m}^0=-\frac{1}{a}\ln\left(\frac{4\pi m}{a}\right)-\frac{1}{4am}.$$

В силу асимптотики (14.к) в [7] установлено, что:

Утверждение 1.*Существуют последовательности типа окружности расширяющихся замкнутых концентрических (включенные друг в друга) гладких контуров* $\Gamma_\nu^{(k)}$, *с радиусами* $R_\nu^{(k)}=\min\ |\lambda|$ *при* $\lambda\in\Gamma_\nu^{(k)}$ *и центрами в начале координат, что*

i) $R < R_1^{(k)} < R_2^{(k)} < \ldots, \quad \lim\limits_{\nu \to \infty} R_\nu^{(k)} = \infty,$

$\dfrac{M(\Gamma_\nu^{(k)})}{d_\nu^{(k)}} \le d$, *где* d - *некоторые положительное число,* $d_\nu^{(k)}$ - *диаметр контуров* $\Gamma_\nu^{(k)}$; $M(\Gamma_\nu^{(k)})$*длина контуров* $\Gamma_\nu^{(k)}$; $M(\Gamma_\nu^{(k)}) \to \infty$ *и* $d_\nu^{(k)} \to \infty$ *при* $\nu \to \infty$; $\Gamma_\nu^{(1)} \cap \{\lambda : \operatorname{Im}\lambda = 0\} = \{-N_{1\nu}^{(1)}, N_{2\nu}^{(1)}\}$, $\Gamma_\nu^{(2)} \cap \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda = 0\} = \{-iN_{1\nu}^{(2)}, iN_{2\nu}^{(2)}\}$, *где* $N_{j\nu}^{(k)}$ -*некоторые положительные числа,* $\left|N_{1\nu}^{(k)} - N_{2\nu}^{(k)}\right| \le const$, *и* $N_{j\nu}^{(k)} \to \infty$ *при* $\nu \to \infty$;

ii) *имеет место неравенства*

$\left|\sigma_k(\lambda)\right| \ge \alpha_0$, при $\lambda \in \Gamma_\nu^{(k)}$,

$\left|e^{-i\lambda a}\sigma_1(\lambda)\right| \ge \alpha_0$, при $\lambda \in \Gamma_\nu^{(1)-} = \Gamma_\nu^{(1)} \cap \{\lambda : \operatorname{Im}\lambda \le 0\}$,

$\left|e^{i\lambda a}\sigma_1(\lambda)\right| \ge \alpha_0$, при $\lambda \in \Gamma_\nu^{(1)+} = \Gamma_\nu^{(1)} \cap \{\lambda : \operatorname{Im}\lambda \ge 0\}$,

$\left|e^{a\lambda}\sigma_2(\lambda)\right| \ge \alpha_0$, при $\lambda \in \Gamma_\nu^{(2)-} = \Gamma_\nu^{(2)} \cap \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda \le 0\}$,

$\left|e^{-a\lambda}\sigma_2(\lambda)\right| \ge \alpha_0$, при $\lambda \in \Gamma_\nu^{(2)+} = \Gamma_\nu^{(2)} \cap \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda \ge 0\}$,

где α_0 *– некоторое положительное число,* $k = 1,2$.

Из (12) имеем

$$G_{k0}(x,\xi,\lambda) = G_{k1}(x,\xi,\lambda) + G_{k2}(x,\xi,\lambda), \quad k = 1,2 \tag{15}$$

где

$$G_{11}(x,\xi,\lambda) = \frac{ai}{x_1(\lambda)}\begin{cases} e^{i\lambda a(1-\xi)} \quad e^{i\lambda ax}, & при \quad \operatorname{Im}\lambda \ge 0, \\ -e^{-i\lambda a(1-\xi)} \quad e^{-i\lambda ax} & при \quad \operatorname{Im}\lambda \le 0, \end{cases}$$

$$x_1(\lambda) = \begin{cases} 1 + 2\lambda e^{-i\lambda a} + e^{-2i\lambda a}, & при \quad \operatorname{Im}\lambda \le 0, \\ 1 + 2\lambda e^{i\lambda a} + e^{2i\lambda a} & при \quad \operatorname{Im}\lambda \ge 0, \end{cases}$$

$$G_{12}(x,\xi,\lambda) = \frac{ia}{2\lambda x_1(\lambda)}\left\{e^{-i\lambda a\xi}\left[e^{-i\lambda a(2-x)} + e^{-i\lambda ax}\right] + e^{-i\lambda a(1-\xi)}\left[e^{-i\lambda a(1+x)} - e^{-i\lambda a(1-x)}\right]\right\}, при \quad \operatorname{Im}\lambda \le 0,$$

$$G_{12}(x,\xi,\lambda) = \frac{ai}{2\lambda x_1(\lambda)}\left\{e^{i\lambda a\xi}\left[e^{i\lambda a(2-x)} + e^{i\lambda ax}\right] + e^{i\lambda a(1-\xi)}\left[e^{i\lambda a(1+x)} - e^{i\lambda a(1-x)}\right]\right\}, при \quad \operatorname{Im}\lambda \ge 0;$$

$$G_{21}(x,\xi,\lambda) = \frac{a}{x_2(\lambda)}\begin{cases} -e^{a\lambda a(1-\xi)} \quad e^{a\lambda x}, & при \quad \operatorname{Re}\lambda \le 0, \\ e^{-a\lambda(1-\xi)} \quad e^{-a\lambda x} & при \quad \operatorname{Re}\lambda \ge 0, \end{cases}$$

$$x_2(\lambda) = \begin{cases} 1 + 2\lambda e^{a\lambda} + e^{2a\lambda}, & при \quad \operatorname{Re}\lambda \le 0, \\ 1 + 2\lambda e^{-a\lambda} + e^{-2a\lambda} & при \quad \operatorname{Re}\lambda \ge 0, \end{cases}$$

$$G_{22}(x,\xi,\lambda) = \frac{a}{2\lambda x_2(\lambda)}\left\{e^{a\lambda(1-\xi)}\left[e^{a\lambda(1-x)} - e^{a\lambda(1+x)}\right] - e^{a\lambda\xi}\left[e^{a\lambda x} + e^{a\lambda(2-x)}\right]\right\}, при \quad \operatorname{Re}\lambda \le 0,$$

$$G_{22}(x,\xi,\lambda) = \frac{a}{2\lambda x_2(\lambda)}\left\{e^{-a\lambda\xi}\left[e^{a\lambda(2-x)} + e^{-a\lambda x}\right] + e^{-a\lambda(1-\xi)}\left[e^{-a\lambda(1+x)} - e^{-a\lambda(1-x)}\right]\right\}, при \quad \operatorname{Re}\lambda \ge 0,$$

$$\delta_1(x,\lambda,1,0)=\frac{e^{i\lambda a(1-x)}+e^{-i\lambda a(1-x)}}{\sigma_1(\lambda)},$$

$$\delta_2(x,\lambda,1,0)=\frac{e^{\lambda a(1-x)}+e^{-\lambda a(1-x)}}{\sigma_2(\lambda)}.$$

Пользуясь утверждение 1, способом, изложенным в [7], доказывается следующая

Теорема 1. *Пусть* $a>0$. *Тогда, если* $f(x)$ *кусочно дифференцируемая функция в отрезке [0,1], то при* $0<x<1,(k=1,2)$ *имеют место равенства*

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_{\Gamma_\nu^{(k)}}d\lambda\int_0^1 P_k(x,\xi,\lambda)f(\xi)d\xi=0,$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_{\Gamma_\nu^{(k)}}d\lambda\int_0^1 G_k(x,\xi,\lambda)f(\xi)d\xi=0,$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_{\Gamma_\nu^{(k)}}\lambda^S d\lambda\int_0^1 G_{k2}(x,\xi,\lambda)f(\xi)d\xi=0,\quad \text{при}\ \ s=0,1;$$

а если $f(x)$ *-кусочно дифференцируемая функция до второго порядка включительно в отрезке [0,1], то при* $0<x<1$ *и имеют место равенства*

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_{\Gamma_\nu^{(k)}}\lambda d\lambda\int_0^1 P_k(x,\xi,\lambda)f(\xi)d\xi=(-1)^{k-1}\pi i\left[f(x-0)+f(x+0)\right],$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_{\Gamma_\nu^{(k)\pm}}\left\{\delta_k(x,\lambda,1,0)f(1)-(-1)^k\lambda\int_0^1 G_{k1}(x,\xi,\lambda)f(\xi)d\xi\right\}d\lambda=0,$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_{\Gamma_\nu^{(k)}}\left\{\delta_k(x,\lambda,1,0)f(1)-(-1)^k\lambda\int_0^1 G_k(x,\xi,\lambda)f(\xi)d\xi\right\}d\lambda=\pi i\left(f(x-0)+f(x+0)\right).$$

Замечание 1.*При решении смешанных задач с нерегулярными граничными условиями для получения классической формулы разложения Брикгофа-Тамаркина через функции Грина* $G(x,\xi,\lambda)$ *имеем*

$$\lambda\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)f(\xi)d\xi=\sum_{l=1}^m M_l(x,\lambda)E_l(f)+Q(x,\lambda),$$

где $M_l(x,\lambda)$ *некоторые «плохие» функции в том смысле, что либо эти пределы*

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_{\Gamma_\nu^{(k)}}M_l(x,\lambda)d\lambda$$

не существуют, либо не невозможно показать существования этих пределов, а $Q(x,\lambda)$ *- «хорошая» функция, которая приводит к цели. Чтобы избавится из этих «плохик» слагаемых некоторые авторы (см. напр.[6]) принимают выполнимость дополнительных ограничений* *вида (c). Но фактически, это ограничения (c) можно обойти. Выясним сказанные для нашей задачи. Для задачи (1.2), (2), (3) в области* $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ *будет*

$$\lambda\int_0^1 G_2(x,\xi,\lambda)\,f(\xi)d\xi = M_1(x,\lambda)\,f(1) + Q(x,\lambda),$$

где $M_1(x,\lambda) = \dfrac{e^{-a\lambda x}}{x_2(\lambda)}$ *– «плохая» функция в том смысле что предел*

$\lim\limits_{\nu\to\infty} \int\limits_{\Gamma_\nu^{(2)+}} \dfrac{e^{-a\lambda x}}{x_2(\lambda)} d\lambda,$ *не существует,*

а $Q(x,\lambda)$ *«хорошая» слагаемая которая приводит к цели. В первоначальном взгляде кажется, чтобы избавится от первого «плохого» слагаемого мы доложены принят ограничения*

$$f(1) = 0, \text{(c.1)}$$

а этого фактическими приводить ограничению

$$u(x,t)\big|_{x=1} = 0, \quad t \in (0,T]. \text{ (c.2)}$$

Если к граничным условиями (2) добавим и ограничение (c.2).то при такой постановке смешанная задача (1.к), (2), (c.2), (3)-не корректна.

Обратим внимание на равенство (13.2). В этом равенстве неизвестная функция $u(x,t)$ *участвует в виде разности*

$$\delta_2(x,\lambda,1,0)u(1,t) - \lambda\int_0^1 G_2(x,\xi,\lambda)u(\xi,t)d\xi + \ldots \text{ . (*)}$$

В (*) для первого слагаемого имеем

$$\delta_2(x,\lambda,1,0)u(1,t) = M_1(x,\lambda)u(1,t) + Q_1(x,\lambda,t),$$

И здесь первое слагаемое «не хорошая» но зато для разности (из (*)-которая нам нужно оценить) имеем

$$\delta_2(x,\lambda,1,0)u(1,t) - \lambda\int_0^1 G_2(x,\xi,\lambda)u(\xi,t)d\xi = M_1(x,\lambda)u(1,t) + Q_1(x,\lambda,t) -$$
$$- M_1(x,\lambda)u(1,t) - Q(x,\lambda,t) = Q_1(x,\lambda,t) - Q(x,\lambda,t),$$

и в правой части получается «хорошая» функция, которая приводит к цели.

Пользуясь утверждением теоремы 1 из (13.к), имеем справедливость следующая

Теорема 2. *Пусть* $a > 0$ *и функции* $F(x,t)\ \mu_j(t), (j=1,2),\ f_m(x), (m=0,1)$ *известные и непрерывные в* $[0,1]\times[0,T]$. *Тогда, если смешанная задача (1.к), (2),(3) с нерегулярными граничными условиями имеет классическое решение* $u \equiv u_k(x,t),$ *то оно единственное и это решение представляется формулой*

$$u_k(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\nu\to\infty}\int\limits_{\Gamma_\nu^{(k)}} \Phi_k(x,t,\lambda)d\lambda, \quad 0 < x < 1,\ 0 < t \leq T, \ (16)$$

где $k = 1,2.$

Добавляя некоторые ограничения не функции $F(x,t)$ $\mu_j(t),(j=1,2),$ $f_m(x),$ $(m=0,1)$ способом изложенным в [7], легко убедится, что функция $u \equiv u_k(x,t),$ определяемая формулой (16), на самом деле является классическим решением смешанной задачи, (1.к), (2), (3) с нерегулярными граничными условиями, соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cauchu A.L. Me' moiré sur l'application du calcul des residusa'la solution des problemes de physiquemathematique. Paris, 1827, VII, p.1-56.
2. Birkhorff G.D. On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter // Trans. Am. Math. Soc., 1908, 9, p.219-232.
3. Тамаркин Я.Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. Петроград, 1917.
4. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
5. Расулов М.Л. Применения метода контурного интеграла. М.: Наука, 1975.
6. Мамедов Ю.А., Нагиева Р.Н. Математический анализ критических задач электродинамики. –Баку, «ЭЛМ», 2010.
7. Гасымов Э.А. Применение методы конечного интегрального преобразования. Баку, «ЭЛМ», 2018, 456 с.

2019. Volume 3, Number 1 Pages 18-22

УДК 519.65

ОБ АСИМПТОТИКЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ МОДИФИЦИРОВАННОГО ОПЕРАТОРА МАТЬЕ

А.Х.ХАНМАМЕДОВ [1,2] , С.М.БАГИРОВА [3]

Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан,[1]
Бакинский инженерный университет, Хырдалан, Азербайджан,[2]
Азербайджанский государственный аграрный университет, Гянджа, Азербайджан.[3]
e-mail: agil_khanmamedov@yahoo.com

АННОТАЦИЯ

В работе рассматриваются модифицированные уравнения Матье. При этом исследуются оператор Матье на всей оси, а также операторы Матье на полуоси с условиями Дирихле и Неймана в нуле. Доказано, что спектры операторов Матье на полуоси состоят из простых собственных значений. При помощи принципа минимакса получены априорные оценки относительно собственных значений операторов Матье на полуоси и одномерного оператора Шредингера с растущим потенциалом. С помощью этих априорных оценок получены асимптотические формулы для собственных значений операторов Матье на полуоси. Установлено, что спектр оператора Матье на всей оси состоит из объединения спектров операторов Матье на полуоси. На основании этой связи найдена асимптотика собственных значений оператора Матье на всей оси на бесконечности.

Ключевые слова: уравнение Матье, функции Матье, уравнение Шредингера, собственные значения.

ABOUT ASYMPTOTICS OF THE EIGENVALUES OF THE MODIFIED MATHIEU OPERATOR

ABSTRACT

The paper considers modified Mathieu equations. In this case, we study the Mathieu operator on the entire axis, as well as the Mathieu operators on the semiaxis with the Dirichlet and Neumann conditions at zero. It is proved that the spectra of Mathieu operators on the half-axis consist of simple eigenvalues. Using the minimax principle, a priori estimates are obtained for the eigenvalues of the Mathieu operators on the semi-axis and the one-dimensional Schrödinger operator with increasing potential. Using these a priori estimates, asymptotic formulas are obtained for the eigenvalues of the Mathieu operators on the semi-axis. It is established that the spectrum of the Mathieu operator on the entire axis consists of the union of the spectra of the Mathieu operators on the semi-axis. Based on this connection, the asymptotic behavior of the eigenvalues of the Mathieu operator on the entire axis at infinity is found.

Keywords: Mathieu equation, Mathieu functions, Schrodinger equation, eigenvalues

MODİFİKASİYA OLUNMUŞ MATYE OPERTORUNUN MƏXSUSİ ƏDƏDLƏRİNİN ASİMPTOTİKASI HAQQINDA

XÜLASƏ

Modifikasiya olunmuş Matye tənliklərinə baxılmışdır. Bu zaman bütün oxda Matye operatoru, həmçinin sıfır nöqtəsində Dirixle və Neyman şərtləri ilə yarım oxda verilmiş Matye operatorları araşdırılır. Yarım oxda təyin olunmuş Matye operatorlarının spektrlərinin sadə məxsusi ədədlərdən ibarət olduğu isbat edilmişdir. Minimax prinsipindən istifadə edərək yarım oxda Matye operatorlarının və artan potensialı olan bir ölçülü Şredinger operatorunun məxsusi ədədləri üçün aprior qiymətləndirmələr tapılmışdır. Bu cür aprior qiymətləndirmələrdən istifadə edərək yarım oxda Matye operatorlarının məxsusi ədədləri üçün asimptotik düsturlar alınmışdşr. Bütün oxdakı Matye operatorunun spektrinin yarım oxdakı Matye operatorlarının spektrlərinin birləşməsindən ibarət olduğu müəyyən edilmişdir. Bu əlaqə əsasında, bütün oxda Matye operatorunun məxsusi ədədlərinin sonsuzluqdakı asimptotikası tapılmışdır.

Açar sözlər: Matye tənliyi, Matye funksiyaları, Şredinger tənliyi, məxsusi ədədlər.

Введение и основной результат

Дифференциальные уравнения Матье часто возникают при решении научных и инженерных проблем (см. $[1]-[4]$). Наиболее интересным примером является $[2]$ задача о колебаниях эллиптической мембраны. Уравнения Матье возникают также при изучении распространения электромагнитных волн в эллиптическом цилиндре, при рассмотрении поверхностных волн жидкости в сосуде, имеющем форму эллиптического цилиндра, и при решении ряда других вопросов (см. $[5]-[7]$).

Каноническое уравнение Матье имеет вид

$$-y''+(q\cos x)y=\lambda y, -\infty<x<+\infty, \quad (1)$$

где q и λ - некоторые параметры. Для уравнения (1) детально изучены $[1]-[4]$ решения, отвечающие собственным значениям параметра λ, которым соответствуют четные $ce_m(z,q)$ и нечетные $se_m(z,q)$ периодические решения с периодом π и 2π. Набор собственных значений, соответствующих четным функциям обозначается через $a_0, a_1, a_2, \ldots$, а нечетным- через $b_0, b_1, b_2, \ldots$. В работах $[1]-[4]$ изучено асимптотическое поведение собственных значений a_n, b_n при $n\to\infty$.

Рассмотрим модифицированное уравнение Матье

$$-y''+(qchx)y=\lambda y, -\infty<x<+\infty, \quad (2)$$

где $q>0$ - заданное число, а λ - спектральный параметр. В пространстве $L_2(-\infty,+\infty)$ рассмотрим самосопряженный оператор $H=-\dfrac{d^2}{dx^2}+qchx$. Так как $chx\to+\infty$ при $x\to\pm\infty$, то спектр оператора H состоит $[8]$ из простых вещественных собственных значений $\lambda_n, n=0,1,2,\ldots$, сгущающихся к $+\infty$, причем $\lambda_n \ge \inf\limits_{-\infty<x<+\infty} qchx = q>0$.

В настоящей работе изучена асимптотика собственных значений $\lambda_n, n=0,1,2,\ldots$ при $n\to\infty$. Насколько нам известно, эта задача раньше не рассматривалась.

Сформулируем основной результат данной работы.

Теорема. *Для собственных значений* $\lambda_n, n=0,1,2,\ldots$ *оператора* H *имеет место асимптотическая формула*

$$\lambda_n \sim \frac{\pi n}{2\ln n}, n\to\infty \quad . (3)$$

Доказательство теоремы

В пространстве $L_2(0,+\infty)$ рассмотрим самосопряженный оператор $\hat{H}$, порожденный левой частью уравнения (2) и граничным условием

$$y(0)\cos\alpha+y'(0)\sin\alpha=0, \quad (4)$$

где α - действительное число. Из того, что $chx\to+\infty$ при $x\to+\infty$ вытекает $[8]$, что спектр оператора $\hat{H}$ состоит из простых вещественных собственных значений $\hat{\lambda}_n, n=0,1,2,\ldots$, которые стремятся к $+\infty$ при $n\to\infty$. Вводим также самосопряженный оператор H_a, порожденный в пространстве $L_2(0,+\infty)$ дифференциальным выражением

$$l_a y=-y''+ae^x y \quad (4)$$

и граничным условием (4), где a - положительное число. Так как $e^x \to +\infty$ при $x \to +\infty$, то спектр оператора H_a дискретен $[8]$ и имеет единственную предельную точку на бесконечности. Обозначим через $\mu_n = \mu_n(a), n = 0,1,2,...$ собственные значения оператора H_a. Очевидно, что $\mu_n \geq \inf\limits_{0<x<+\infty} ae^x = a > 0$.

Рассмотрим одномерное уравнение Шредингера

$$-y'' + ae^x y = \lambda y, 0 \leq x < +\infty. \quad (5)$$

С непосредственной проверкой убеждаемся, что одним из решений этого уравнения является функция

$$f(x,\lambda) = K_{2i\sqrt{\lambda}}\left(2\sqrt{a}e^{\frac{x}{2}}\right),$$

где $K_\nu(z)$- модифицированная функция Бесселя второго рода (см. $[1]$, $[9]$), т.е. решение уравнения

$$z^2u'' + zu' - \left(z^2 + \nu^2\right)u = 0.$$

Известно $[1]$, $[9]$, что при каждом $z > 0$ функция $K_\nu(z)$ является целой функцией индекса ν. Следовательно, при каждом фиксированном $x, 0 \leq x < +\infty$, решение $f(x,\lambda)$ служит целой функцией относительно λ. Пользуясь известным (см. $[1]$) асимптотическим равенством

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}\left(1 + O\left(z^{-1}\right)\right), z \to \infty,$$

находим, что для каждого фиксированного λ решение $f(x,\lambda)$ принадлежит пространству $L_2(0,+\infty)$. Откуда следует, что собственные значения оператора H_a совпадают с нулями функции $\Phi(\lambda) = f(0,\lambda)\cos\alpha + f'(0,\lambda)\sin\alpha$.

Исследуем теперь асимптотику собственных значений μ_n. Так как функция $q(x) = ae^x$ удовлетворяет всем условиям теоремы 7.3 из монографии $[10]$(см. также $[11]$), то имеем

$$\int\limits_0^{\ln a^{-1}\mu_n} \sqrt{\mu_n - ae^x}\,dx \sim \pi n, n \to \infty. \quad (6)$$

Далее, заметим, что

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{\ln a^{-1}\mu_n} \sqrt{\mu_n - ae^x}\,dx &= \int\limits_a^{\mu_n} t^{-1}\sqrt{\mu_n - t}\,dx = \\ &= \mu_n \int\limits_a^{\mu_n} \frac{\mu_n}{t}\sqrt{1 - \frac{t}{\mu_n}}\,d\frac{t}{\mu_n} = \mu_n \int\limits_{a\mu_n^{-1}}^{1} u\sqrt{1-u}\,du.\end{aligned} \quad (7)$$

Так как функция $G(u) = 2\sqrt{1-u} - \ln\left(1 + \sqrt{1-u}\right) + \ln\left(1 - \sqrt{1-u}\right)$ служит первообразной функции $g(u) = u^{-1}\sqrt{1-u}$, то из формулы (7) имеем

$$\int\limits_0^{\ln a^{-1}\mu_n} \sqrt{\mu_n - ae^x}\,dx = \mu_n \ln \mu_n\left(1 + O\left(\frac{1}{\ln \mu}\right)\right), n \to \infty.$$

Сопоставляя это соотношение с (6), получаем

$$\mu_n \ln \mu_n = \pi n[1+o(1)], n \to \infty .$$

Если теперь μ_n ищем в виде $\mu_n = \dfrac{\pi n}{\ln \pi n}[1+\varepsilon_n]$, то из последнего равенства легко вывести соотношение $\varepsilon_n = o(1), n \to \infty$. Следовательно, для нулей функции $f(0,\lambda) = K_{2i\sqrt{\lambda}}(2\sqrt{a})$, т.е. для собственных значений оператора H_a верно асимптотическое равенство

$$\mu_n \sim \frac{\pi n}{\ln n}, n \to \infty . \ (8)$$

Далее, полагая $a = a_1 = \dfrac{q}{2}$ и $a = a_2 = q$, находим, что

$$H_{a_1} \le \hat{H} \le H_{a_2} .$$

Тогда в силу принципа минимакса (см. [12], [13]) имеем

$$\mu_n(a_1) \le \hat{\lambda}_n \le \mu_n(a_2).$$

Из последнего неравенства и (8) вытекает, что

$$\hat{\lambda}_n \sim \frac{\pi n}{\ln n}, n \to \infty . \ (9)$$

Рассмотрим теперь в пространстве $L_2(0,+\infty)$ самосопряженные операторы $H_D y = -y'' + qe^x y, y(0) = 0$ и $H_N y = -y'' + qe^x y, y'(0) = 0$, которые являются частными случаями оператора $\hat{H}$. Обозначим через $\lambda_n(D)$ и $\lambda_n(N)$, $n = 0,1,2,..$ собственные значения операторов H_D и H_N соответственно. В силу (9) имеем

$$\begin{array}{l} \lambda_n(D) \sim \dfrac{\pi n}{\ln n}, n \to \infty, \\ \lambda_n(N) \sim \dfrac{\pi n}{\ln n}, n \to \infty. \end{array} \ (10)$$

С другой стороны, как показано в [2], уравнение (2) при каждом λ и q имеет решение $\varphi(x,\lambda)$, представимое в виде

$$\varphi(x,\lambda) = \left(\sqrt{2qe^{\frac{x}{2}}}\right)^{-1} e^{-\sqrt{2qe^{\frac{x}{2}}}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r c_r \left(\sqrt{2qe^{\frac{x}{2}}}\right)^r , \ (11)$$

где

$$c_0 = 1, c_1 = \frac{4\lambda + 1^2}{8}, c_2 = \frac{(4\lambda+1^2)(4\lambda+3^2)}{8^2 2!},$$
$$c_3 = \frac{(4\lambda+1^2)(4\lambda+3^2)(4\lambda+5^2)}{8^3 3!} - \frac{4q^2}{3!},$$
$$c_4 = \frac{(4\lambda+1^2)(4\lambda+3^2)(4\lambda+5^2)(4\lambda+7^2)}{8^4 4!} - \frac{2q^2}{4!}(4\lambda+13),...$$

Очевидно, что при каждом x решение $\varphi(x,\lambda)$ является целой функцией относительно λ. В силу (11) при каждом фиксированном λ функция $\varphi(x,\lambda)$ принадлежит пространству $L_2(0,+\infty)$. Отсюда следует, что собственные значения операторов H_D и H_N совпадают с нулями функций $\varphi(0,\lambda)$ и $\varphi'(0,\lambda)$ соответственно. Кроме того, ввиду четности функции chx решением уравнения (2) является также $\varphi(-x,\lambda)$. Как явствует из последнего, собственные значения оператора H совпадают с нулями функции $\Delta(\lambda)=\langle\varphi(x,\lambda),\varphi(-x,\lambda)\rangle$, где $\langle u,v\rangle = uv'-u'v$. Так как вронскиан двух решений уравнения (2) не зависит от x, то получим $\Delta(\lambda)=-2\varphi(0,\lambda)\varphi'(0,\lambda)$. Таким образом, спектр оператора H совпадают с собственными значениями операторов H_D и H_N. Полагая $\lambda_{2n}=\lambda_n(D),\lambda_{2n+1}=\lambda_n(N), n=0,1,2,\ldots$, из (10) получаем (3). Тем самым теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. Abramowitz , I.N.Stegun I (eds.), *Handbook of mathematical functions*, 10th edit., Applied Mathematical series, 55, National Bureau of Standards, Washington; Dover Publications, Inc., New York, 1964; Перев. на русск. яз.: В. А. Диткин, Л. Н. Кармазина (ред.), *Справочник по специальным функциям*, Наука, М., 1979.
2. Н.В. Мак-Лахлан, *Теория и приложения функций Матье*, М., 1953.
3. N.S.Grigoreva, *Uniform asymptotic expansions of solutions of the Mathieu equation and the modified Mathieu equation,* Journal of Soviet Mathematics, vol.11, Issue 5, pp. 700-721, 1979.
4. C. Hunter and B. Guerrieri, *The eigenvalues of ME and their branch points*, Studies in Appl. Math. vol. 64, 113-141, 1981.
5. L.Ruby, *Applications of the MF*, Am. J. Phys., vol. 64, pp. 39-44, 1996.
6. А. В. Кашеваров, *Функции Матье и кулоновские сфероидальные функции в теории электрического зонда*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., том 51, номер 12, с.2269–2278, 2011.
7. Ж.Н.Тасмамбетов, *О построении решения уравнения Матье методом Фробениуса-Латышевой,* Вестник Карагандинского университета, Серия «Математика», №3(83), с. 76-86, 2016.
8. Ф.А. Березин , М.А.Шубин, *Уравнение Шредингера*, М., 1983.
9. М. К .Керимов , *Исследования о нулях специальных функции Бесселя и методах их вычисления. IV. Неравенства, оценки, разложения и др. для нулей функций Бесселя*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., т.58, №1 с. 3–41, 2018 .
10. Э.Ч. Титчмарш, *Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка,* т.1, М., 1960.
11. E. C.,Titchmarsh, *On the asymptotic distribution of eigenvalues asymptotic*, **The Quarterly Journal of Mathematics**, vol. **5**, №1, pp.228–240, 1954.
12. М.Рид , Б. Саймон, *Методы современной математической физики.4, Анализ операторов,* Мир, М., 1982.
13. S.Fournais , B. Helffer , *Spectral Methods in Surface Superconductivit. - Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*, Birkhauser, 2010.

2019. Volume 3, Number 1 *Pages 23-35*

УДК 517.934.

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ИССЛЕДОВАНИЕ СОБОГО В КЛАССИЧЕСКОМ СМЫСЛЕ УПРАВЛЕНИЯ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Ш.М. РАСУЛЗАДЕ

Институт систем управления НАН Азербайджана

Email.kamilbmansimov@gmail.com

АННОТАЦИЯ

Встатье рассматривается одна нелинейная задача оптимального управления системами с распределенными параметрами с двумя группами управляющих параметров. Предполагая открытость областей управлениядоказан аналог уравнения Эйлера и установлено небходимое условие оптимальности второго порядка.Изучен случай классически особых управлений.

Ключевые слова: необходимое условие оптимальности, допустимое управление, аналог уравнения Эйлера, вариация функционала, необходимое условие оптимальности второго порядка, особое в классическом смысле управление, многоточечное необходимое условие оптимальности.

THE SECOND ORDER NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS AND INVESTIGATION SINGULAR IN CLASSICAL SENCE CONTROLS IN ONE OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

ABSTRACT

The article considers one nonlinear optimal control problem of systems with distributed parameters with two groups of control parameters. Assuming the openness of the control domains, an analogue of the Euler equation is provide and the necessary second-order optimality condition is established. The case of classically since controls is studied.

Keywords: necessary optimality condition, admissible control, analogue of the Euler equation, functional variation, second-order necessary optimality condition, singular control in the classical sense, multi-point necessary optimality condition.

BİR OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ OPTİMALLIQ ÜÇÜN İKİNCİ TƏRTİB ZƏRURİ ŞƏRTLƏR VƏ KLASSİK MƏNADA MƏXSUSİ İDARƏLƏRİN TƏDQİQİ

XÜLASƏ

Məqalədə iki qrup idarəedici parametrli, paylanmiş parametrli bir qeyri-xətti optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. İdarəetmə oblastının açıq olmasını qəbul edərək Eyler tənliyinin analoqu isbat olunmuş və optimallıq üçün ikinci tərtib zəruri şərtlər alınmışdır. Klassik mənada məxsusi idarə halı öyrənilmişdir.

Açar sözlər: zəruri optimallıq şərti, yol verilən nəzarət, Euler tənliyinin analoqu, funksional dəyişkənlik, ikinci dərəcəli zəruri optimallıq şərti, klassik mənada tək nəzarət, çox nöqtəli zəruri optimallıq şərti.

1. Введение и постановка задачи. Пусть управляемыйнепрерывный процессв заданной области описывается системойнелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial z(t,x)}{\partial t} = f\left(t,x,z(t,x),u(t)\right), \quad (t,x)\in D = T\times X = [t_0,t_1]\times[x_0,x_1], \ (1)$$

$$z(t_0,x) = y(x), \ x\in X, \ (2)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = g\left(x,y(x),v(x)\right), \ x\in X, \ (3)$$

$$y(x_0) = y^o. \ (4)$$

Здесь $y(x)$ – n-мерный начальный вектор, y^o – начальное состояние, t_0, t_1, x_0, x_1– заданные числа, причем $t_0 < t_1$, $x_0 < x_1$, $f(t,x,u)$ $(g(x,y,v))$– заданная n-мерная вектор-функция непрерывная в $T \times X \times R^n \times R^r$ $\left(X \times R^n \times R^q\right)$ вместе с частными производными по (z,u) $((y,v))$ до второго порядка включительно, $u(t)$ $(v(x))$– кусочно-непрерывный (с конечным числом точек разрыва первого рода) r (q)-мерный вектор управляющих воздействий принимающая в каждый момент $t \in T$ $(x \in X)$ свои значения из заданного непустого, ограниченного и открытого множества $U \subset R^r$ $\left(V \subset R^q\right)$, то есть

$u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in T$, (5)

$v(x) \in V \subset R^q, \quad x \in X$. (6)

Пару управляющих функций $\left(u^o(t), v^o(x)\right)$, удовлетворяющий вышеприведенным условиям назовем допустимым управлением.

Под решением системы уравнений (1)-(4), соответствующее допустимому управлению $\left(u^o(t), v^o(x)\right)$ понимается кусочно-гладкая по t и непрерывная по x вектор-функция $z^o(t,x)$ и кусочно-гладкая по x вектор-функция $y^o(x)$ которые удовлетворяют соотношениям (1.1)-(1.4).

Предполагается, что при каждом фиксированном допустимом управлении $\left(u^o(t), v^o(x)\right)$ задача аналог задачи Коши (1)-(4) имеет единственное решение $\left(z^o(t,x),\ y^o(x)\right)$.

Пусть $\varphi(y), G(x,z)$ заданные и непрерывные в R^n, $X \times R^n$ соответственно вместе с $\partial\varphi/\partial y, \partial^2\varphi/\partial y^2, \partial G/\partial z, \partial^2 G/\partial z^2$ скалярные функции.

На решениях системы (1)-(4) соответствующие всевозможным допустимым управлениям определим терминального типа функционал

$$I(u,v) = \varphi(y(x_1)) + \int_{t_0}^{t_1} G(x, z(t_1, x))dx \cdot \quad (7)$$

Задача. Среди допустимых управлений найти такое, при котором значение функционала минимален.

Допустимое управление $\left(u^o(t), v^o(x)\right)$ и, соответствующую ему решение $\left(z^o(t,x),\ y^o(x)\right)$ систему уравнений (1)-(4), которые минимизируют функционал (1.7) назовем соответственно оптимальными управлениями и состояниями.

Вработе[1] рассмотрена одна задача оптимального управления, описываемая системой дифференциальных уравнений вида (1), (3) с краевыми условиями (2), (4)но другого типа функционалом качества. С помощью аналога метода Дуовицкого–Милютина[2] получены ряд необходимых условий оптимальности первого порядка типа принципа максимума Понтрягина[3,4].Врассматриваемой задачепри предположении открытости областей управления применяя модифицированный вариант метода приращений установлены ряд необходимых условий оптимальности первого и второго порядков и исследован классически особый случай[4-6.].

2. Первая и вторая вариации (в классическом смысле) функционала качества. Считая $\left(u^o(t), v^o(x), z^o(t,x), y^o(x)\right)$ фиксированным допустимым процессом через

$\left(\bar{u}(t)=u^o(t)+\Delta u(t), \bar{v}(x)=v^o(x)+\Delta v(x), \bar{z}(t,x)=z^o(t,x)+\Delta z(t,x),\ \bar{y}(x)=y^o(x)+\Delta y(x)\right)$ обозначим произвольный допустимый процесс и введем аналоги функций Гамильтона-Понтрягина $H(t,x,z,u,\psi^o), M(x,y,v,p^o)$:

$$H(t,x,z,u,\psi^o)=\psi^{o'} f(t,x,z,u),\ M(x,y,v,p^o)=p^{o'} g(x,y,v).$$

Здесь $\psi^o(t,x)$, $p^o(x)$ пока неизвестные(произвольные) n -мерные вектор-функции.

При сделанных предположениях приращения функционала качества (7) соответствующее допустимым управлениям $(u^o(t),v^o(x)),(\bar{u}(t),\bar{v}(x))$ может быть записано в виде :

$$\Delta I(u^o,v^o)=\left[\varphi(\bar{y}(x_1))-\varphi(y^o(x_1))\right]+\int_{x_0}^{x_1}\left[G(x,\bar{z}(t_1,x))-G(x,z^o(t_1,x))\right]dx+$$
$$+\int_{x_0}^{x_1}\left[\psi^{o'}(t_1,x)\Delta z(t_1,x)-\psi^{o'}(t_0,x)\Delta z(t_0,x)\right]dx-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial\psi^o(t,x)}{\partial t}\Delta z(t,x)dx\,dt+ \tag{8}$$
$$+p^{o'}(x_1)\Delta y(x_1)-\int_{x_0}^{x_1}\frac{dp^{o'}(x)}{dx}\Delta y(x)dx-$$
$$-\int_{x_0}^{x_1}\left[M(x,\bar{y}(x),\bar{v}(x),p^o(x))-M(x,y^o(x),v^o(x),p^o(x))\right]dx-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[H(t,x,\bar{z}(t,x),\bar{u}(t),\psi^o(t,x))-H(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x))\right]dx\,dt,$$

Предположим, что вектор-функции $\psi^o(t,x)$ и $p^o(x)$ удовлетворяют соотношениям

$\dfrac{\partial\psi^o(t,x)}{\partial t}=-H_z(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x))$, (9)

$\psi(t_1,x)=-G_z(x,z^o(t_1,x))$, (10)

$\dfrac{\partial p^o(x)}{\partial x}=-M_y(x,y^o(x),v^o(x),p^o(x))-\psi^o(t,x)$, (11)

$p^o(x_1)=-\varphi_y(y^o(x_1))$. (12)

Соотношения (9), (11) являются линейными дифференциальными уравнениями относительно $\psi^o(t,x)$ и $p^o(x)$ соответственно.

Задачу (9)-1(2) назовем сопряженной системой в рассматриваемой задаче оптимального управления.

Используя формулу Тейлора и учитывая сопряженную систему(9)-(12),из (8) получим справедливость разложения

$$\Delta I(u^o,v^o)=-\int_{x_0}^{x_1}M_v'(x,y^o(x),v^o(x),p^o(x))dx-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}H(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x))dx\,dt+$$
$$+\frac{1}{2}y'(x_1)\frac{\partial^2\varphi_1(y^o(x_1))}{\partial y^2}y(x_1)+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'(t_1,x)\frac{\partial^2\varphi_2(x,z^o(t_1,x))}{\partial z^2}\Delta z(t_1,x)-$$
$$-\int_{x_0}^{x_1}M_v'(x,y^o(x),v^o(x),p^o(x))dx-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}H(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x))\Delta u(t)dx\,dt-$$
$$-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\left[\Delta y'(x)M_{yy}(x,y^o(x),v^o(x),p^o(x))\Delta y(x)+2\Delta v'(x)\times\right.$$
$$\left.\times M_{vy}(x,y^o(x),v^o(x),p^o(x))\Delta y(x)+\Delta v'(x)M_{vv}(x,y^o(x),v^o(x),p^o(x))\Delta v(x)\right]dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Big[\Delta z'(t,x)H_{zz}\big(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x)\big)\Delta z(t,x)+$$
$$+2\Delta u'(t)H_{uz}\big(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x)\big)\Delta z(t,x)+ \qquad (13)$$
$$+\Delta u'(t)H_{uu}\big(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x)\big)\Delta u(t)\Big]dx\,dt+o_1\big(\|\Delta y(x_1)\|^2\big)+$$
$$+\int_{x_0}^{x_1}o_2\big(\|\Delta z(t_1,x)\|^2\big)dx-\int_{x_0}^{x_1}o_5\big([\|\Delta y(x)\|+\|\Delta v(x)\|]^2\big)dx-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}o_6\big([\|\Delta z(t,x)\|+\|\Delta u(t)\|]^2\big)dx\,dt.$$

В силу открытости областей управления специальное приращение допустимого управления $\big(u^o(t),v^o(x)\big)$ можно определить по формуле

$$\begin{cases}\Delta u(t;\varepsilon)=\varepsilon\,\delta u(t), \ \ t\in T, & (14)\\ \Delta v(x;\varepsilon)=\varepsilon\,\delta v(x), \ \ x\in X, & (15)\end{cases}$$

где ε достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u(t)\in R^r$, $t\in T$, $\delta v(x)\in R^q$, $x\in X$ – произвольные кусочно-непрерывные и ограниченные вектор-функции (допустимые вариации управления).

Через $(\Delta z(t,x;\varepsilon),\Delta y(x;\varepsilon))$ обозначим специальное приращение состояния $\big(z^o(t,x),y^o(x)\big)$ отвечающее приращению (14),(15) управления $\big(u^o(t),v^o(x)\big)$.

С помощью задачи (1)-(4) можно показать, чтоспециальное приращение $\big(\Delta z(t,x;\varepsilon),\Delta y(x;\varepsilon)\big)$состояния соответствующее допустимому приращению (14) (15) управления $\big(u^o(t),v^o(x)\big)$допускает представление

$$\big(\Delta z(t,x;\varepsilon),\Delta y(x;\varepsilon)\big)=\big(\varepsilon\,\delta z(t,x;\varepsilon)+o(\varepsilon;\,t,x),\varepsilon\,\delta y(x;\varepsilon)+o(\varepsilon;\,x)\big) \ (16)$$

где $(\delta z(t,x),\, y(x))$ которую назовем вариацией состояния $\big(z^o(t,x),y^o(x)\big)$, является решением системы уравнений (уравнение в вариациях в рассматриваемой задаче).

$$\delta z_t(t,x)=f_z\big(t,x,z^o(t,x),u^o(t)\big)\delta z(t,x)+f_u\big(t,x,z^o(t,x),u^o(t)\big)\delta u(t), \ (17)$$

$$\delta z(t_0,x)=\delta y(x), \ (18)$$

$$\delta\dot{y}(x)=g_y\big(x,y^o(x),v^o(x)\big)\delta y(x)+g_v\big(x,y^o(x),v^o(x)\big)\delta v(x), \ (19)$$

$$\delta y(x_0)=0. \ (20)$$

Учитывая (14) -(16) в формуле приращения (13) после несложных преобразований получим разложение для специального приращения функционала качества (7) в виде:

$$\Delta I_\varepsilon(u^o,v^o)=I(u^o+\varepsilon\,\delta u,v^o+\delta v)-I(u^o,v^o)=$$
$$=-\varepsilon\left[\int_{x_0}^{x_1}M'_v\big(x,y^o(x),v^o(x),p^o(x)\big)\delta v(x)dx-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}H'_u\big(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x)\big)dx\,dt\right]+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\Bigg\{\delta y(x_1)\varphi_{yy}\big(y^o(x_1)\big)\delta y(x_1)+\int_{x_0}^{x_1}\delta z'(t_1,x)G_{zz}\big(x,z^o(t_1,x)\big)\delta z(t,x)-$$
$$-\int_{x_0}^{x_1}\Big[\delta y'(x)M_{yy}\big(x,y^o(x),v^o(x),p^o(x)\big)\delta y(x)+2\delta v'(x)\times$$

$$\times M_{vy}\left(x, y^o(x), v^o(x), p^o(x)\right)\delta y(x) + \delta v'(x) M_{vv}\left(x, y^o(x), v^o(x), p^o(x)\right)\delta v(x)\Big] dx -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Big[\delta z'(t,x) H_{zz}\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x)\right)\delta z(t,x) +$$

$$+ 2\delta u'(t) H_{uz}\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x)\right)\delta z(t,x) + \qquad (21)$$

$$+ \delta u'(t) H_{uu}\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x)\right)\delta u(t)\Big] dx\,dt + o\left(\varepsilon^2\right).$$

На основании разложения (21) получаем, что первая и вторая вариации функционала качества (7) имеют соответственно, вид

$$\delta^1 S(u,v;\delta u,\delta v) = -\int_{x_0}^{x_1} M'_v\left(x, y^o(x), v^o(x), p^o(x)\right)\delta v(x) dx -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} H'_u\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x)\right)\delta u(t)\,dt\,dx,$$

$$\delta^2 S(u,v;\delta u,\delta v) = \delta y(x_1)\varphi_{yy}\left(y^o(x_1)\right)\delta y(x_1) + \int_{x_0}^{x_1}\delta z'(t_1,x) G_{zz}\left(x, z^o(t_1,x)\right)\delta z(t,x) -$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}\Big[\delta y'(x) M_{yy}\left(x, y^o(x), v^o(x), p^o(x)\right)\delta y(x) + 2\delta v'(x)\times$$

$$\times M_{vy}\left(x, y^o(x), v^o(x), p^o(x)\right)\delta y(x) + \delta v'(x) M_{vv}\left(x, y^o(x), v^o(x), p^o(x)\right)\delta v(x)\Big] dx -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Big[\delta z'(t,x) H_{zz}\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x)\right)\delta z(t,x) +$$

$$+ 2\delta u'(t) H_{uz}\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x)\right)\delta z(t,x) +$$

$$+ \delta u'(t) H_{uu}\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x)\right)\delta u(t)\Big] dx\,dt.$$

Из основного результата классического вариационного исчисления (см. напр. [8,35,6]) следует, что вдоль оптимального управления $\left(u^o(t), v^o(x)\right)$ первая вариация функционала (7) равно нулю, а вторая – неотрицательно, т.е.

$$\int_{x_0}^{x_1} M'_v\left(x, y^o(x), v^o(x), p^o(x)\right)\delta v(x) dx + \qquad (22)$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} H'_u\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x)\right)\delta u(t)\,dt\,dx = 0,$$

$$\delta y(x_1)\varphi_{yy}\left(y^o(x_1)\right)\delta y(x_1) + \int_{x_0}^{x_1}\delta z'(t_1,x) G_{zz}\left(x, z^o(t_1,x)\right)\delta z(t_1,x) -$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}\Big[\delta y'(x) M_{yy}\left(x, y^o(x), v^o(x), p^o(x)\right)\delta y(x) + 2\delta v'(x)\times$$

$$\times M_{vy}\left(x, y^o(x), v^o(x), p^o(x)\right)\delta y(x) + \delta v'(x) M_{vv}\left(x, y^o(x), v^o(x), p^o(x)\right)\delta v(x)\Big] dx -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Big[\delta z'(t,x) H_{zz}\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x)\right)\delta z(t,x) +$$

$$+ 2\delta u'(t) H_{uz}\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x)\right)\delta z(t,x) + \qquad (23)$$

$$+ \delta u'(t) H_{uu}\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x)\right)\delta u(t)\Big] dx\,dt \geq 0,$$

для всех $\delta v(x)\in R^r$, $x\in X$, $\delta u(t)\in R^q$, $t\in T$.

Как видно соотношения (22), (23) являются неявными необходимыми условиями оптимальности первого и второго порядков соответственно. Используя их получим практически проверяемые необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

3. Аналог уравнения Эйлера. Из тождества (22) используя произвольность и независимость вариаций $\delta u(t)$ и $\delta v(x)$ получаем, что вдоль оптимального процесса $\left(u^o(t), v^o(x), z^o(t,x), y^o(x)\right)$

$$\int_{x_0}^{x_1} M_v'\left(x, y^o(x), v^o(x), p^o(x)\right)dx = 0, \quad (24)$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} H_u'\left(t, x, z^o(t,x), u^o(t), \psi^o(t,x)\right)dt\,dx = 0. \quad (25)$$

При помощи тождеств (24), (25) доказывается

Теорема 1. Пусть в задаче (1) -(7) выполняются условия гладкости наложенные на данные задачи. Тогда для оптимальности управления $\left(u^o(t), v^o(x)\right)$в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы выполнялись соотношения:

$$M_v\left(\xi, y^o(\xi), v^o(\xi), p^o(\xi)\right) = 0, \quad (26)$$

для всех $\xi\in(x_0, x_1)$,

$$\int_{x_0}^{x_1} H_u\left(\theta, x, z^o(\theta,x), u^o(\theta), \psi^o(\theta,x)\right)dx = 0. \quad (27)$$

для всех $\theta\in[t_0, t_1)$.

Соотношения (26), (27) назовем аналогом уравнения Эйлера для рассматриваемой задачи.

4. Необходимые условия оптимальности второго порядка для классических экстремалей. Дадим понятие классической экстремали в задаче (1)-(7).

Определение1. Каждое решение уравнения Эйлера (26), ((27)) назовем классической экстремалью в задаче (1) -(7).

Из определения1ясно,что число классических экстремалей может быть достаточно большим. Поэтому надо иметь новые необходимые условия оптимальности, позволяющие сузить множество классических экстремалей. С этой целью будет использовано необходимое условие оптимальности второго порядка (23). Если предположить, что $\delta u(t)=0$, а $\delta v(x)\neq 0$, то неравенство (23) примет вид:

$$\delta y(x_1)\varphi_{yy}\left(y^o(x_1)\right)\delta y(x_1) + \int_{x_0}^{x_1}\delta z'(t_1,x)G_{zz}\left(x, z^o(t_1,x)\right)\delta z(t_1,x)dx -$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}\left[\delta y'(x)M_{yy}\left(x, y^o(x), v^o(x), p^o(x)\right)\delta y(x) + 2\delta v'(x)\times\right.$$

$$\left.\times M_{vy}\left(x, y^o(x), v^o(x), p^o(x)\right)\delta y(x) + \delta v'(x)M_{vv}\left(x, y^o(x), v^o(x), p^o(x)\right)\delta v(x)\right]dx -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\delta z'(t,x)H_{zz}\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x)\right)\delta z(t,x)\,dx\,dt \geq 0. \quad (28)$$

А уравнения в вариациях (17) -(20) принимает вид:

$\delta z_t(t,x) = f_z\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t)\right)\delta z(t,x)$, (29)

$\delta z(t_0,x) = \delta y(x)$, (30)

$\delta y(x) = g_y\left(x,y^o(x),v^o(x)\right)\delta y(x) + g_v\left(x,y^o(x),v^o(x)\right)\delta v(x)$, (31)

$\delta y(x_0) = 0$. (32)

Решение $\delta z(t,x)$ задачи (29)-(30) допускает представление

$\delta z(t,x) = F(t,t_0,x)\delta y(x)$, (33)

где $F(t,t_0,x)$ решение задачи

$$F_\tau(t,\tau,x) = f_z\left(\tau,x,z^0(\tau,x),u^0(\tau)\right),$$
$$F(t,t,x) = E,$$

($E-(n\times n)$ единичная матрица).

соответствующее классическому экстремали $\left(u^o(t),v^o(x)\right)$.

Запишем решение задачи Коши (31) -(32)

$$\delta y(x) = \int_{x_0}^{x}\Phi(x,s)g_v\left(s,y^o(s),v^o(s)\right)d(s), \quad (34)$$

где $\Phi(x,s)$ решение уравнения

$$\Phi_s(x,s) = g_y\left(s,y^0(s),v^0(s)\right)\delta y(x) + g_v\left(s,y^0(s),v^0(s)\right),$$

с начальным условием

$$\Phi(x,x) = E.$$

С учетом представления (34) из (33) имеем

$$\delta z(t,x) = \int_{x_0}^{x}F(t,t_0,x)\Phi(x,s)g_v\left(s,y^o(s),v^o(s)\right)\delta v(s)\,ds. \quad (35)$$

Используя представление (35) доказываются тождества

$$\int_{x_0}^{x_1}\delta z'(t_1,x)G_{zz}\left(x,z^o(t_1,x)\right)\delta z(t_1,x) = \int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{x_0}^{x}\delta v'(m)g_v'\left(m,y^o(m),v^o(m)\right)\Phi'(x,m)\times\right.$$
$$\left.\times F'(t_1,t_0,x)G_{zz}\left(x,z^o(t_1,x)\right)F(t_1,t_0,x)\Phi(x,\ell)g_v\left(\ell,y^o(\ell),v^o(\ell)\right)\delta v(\ell)\,d\ell\right\}dx = \quad (36)$$
$$= \int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1}\delta v'(m)g_v'\left(m,y^o(m),v^o(m)\right)\times$$
$$\times\left\{\int_{\max(m,\ell)}^{x_1}\Phi'(x,m)F'(t_1,t_0,x)G_{zz}\left(x,z^o(t_1,x)\right)F(t_1,t_0,x)\Phi(x,\ell)\,d\ell\right\}g_v\left(\ell,y^o(\ell),v^o(\ell)\right)\delta v(\ell)\,d\ell,$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\delta z'(t,x)H_{zz}\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x)\right)\delta z(t,x)dx\,dt = \quad (37)$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{x_0}^{x}F(t,t_0,x)\Phi(x,m)g_v\left(m,y^o(m),v^o(m)\right)\delta v(m)dm\right)' H_{zz}\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x)\right)\times$$

$$\times\left(\int_{x_0}^{x}F(t_1,t_0,x)\Phi(x,\ell)g_v\left(\ell,y^o(\ell),v^o(\ell)\right)\delta v(\ell)d\ell\right)dx\,dt =$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1}\delta v'(m)g_v'\left(m,y^o(m),v^o(m)\right)\times$$

$$\times\left\{\int_{t_0}^{t_1}\int_{\max(m,\ell)}^{x_1}\Phi'(x,m)F'(t,t_0,x)H_{zz}\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x)\right)F(t,t_0,x)\Phi(x,\ell)dx\,dt\right\}\times$$

$$\times g_v\left(\ell,y^o(\ell),v^o(\ell)\right)\delta v(\ell)dm\,d\ell .$$

А используя представление (34) получим

$$\delta y(x_1)\varphi_{yy}\left(y^o(x_1)\right)\delta y(x_1) = \quad (38)$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1}\delta v'(m)g_v'\left(m,y^o(m),v^o(m)\right)\Phi'(x_1,m)\varphi_{yy}\left(y^o(x_1)\right)\Phi(x,\ell)g_v\left(\ell,y^o(\ell),v^o(\ell)\right)\delta v(\ell)dm\,d\ell ,$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\delta y'(x)M_{yy}\left(x,y^o(x),v^o(x),p^o(x)\right)\delta y(x)dx =$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{x_0}^{x}\Phi(x,m)g_v\left(m,y^o(m),v^o(m)\right)\delta v(m)dm\right)' M_{yy}\left(x,y^o(t,x),v^o(t,x),p^o(t,x)\right)\times \quad (39)$$

$$\times\left(\int_{x_0}^{x}\Phi(x,\ell)g_v\left(\ell,y^o(\ell),v^o(\ell)\right)\delta v(\ell)d\ell\right)dx = \int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1}\delta v'(m)g_v'\left(m,y^o(m),v^o(m)\right)\times$$

$$\times\left\{\int_{\max(m,\ell)}^{x_1}\Phi'(x,m)M_{yy}\left(x,y^o(x),v^o(x),p^o(x)\right)\Phi(x,\ell)dx\right\}\times$$

$$\times g_v\left(\ell,y^o(\ell),v^o(\ell)\right)\delta v(\ell)d\ell\,dm,$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\delta v'(x)M_{vy}\left(x,y^o(x),v^o(x),p^o(x)\right)\delta y(x)dx =$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{x_0}^{x_1}\delta v'(m)M_{vy}\left(m,y^o(m),v^o(m),p^o(m)\right)\Phi(m,x)dm\right]g_v'\left(x,y^o(x),v^o(x)\right)\delta v(x)dx. \quad (40)$$

Пусть по определению

$$N(m,l) = -\Phi'(x_1,m)\varphi_{yy}(y^0(x))\Phi(x_1,l) -$$
$$- \int_{\max(m,l)}^{x_1}\left[F'(t_1,t_0,x)\Phi'(x,m)G_{zz}(x,z^0(t_1,x))\Phi(x,l)F(t_1,t_0,x)\right]dx +$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{\max(m,l)}^{x_1}F'(t_1,t_0,x)\Phi'(x,m)H_{zz}(t,x,z^0(t,x),u^0(t),\psi^0(t,x))\Phi(x,l)F(t_1,t_0,x)dx\right]dt + \quad (41)$$
$$+ \int_{\max(m,l)}^{x_1}\Phi'(x,m)H_{zz}(x,y^0(x),v^0(x),p^0(x))\Phi(x,l)dx.$$

Учитывая тождества (36)-(40) и введенное обозначение (41) неравенство (28) записывается в виде:

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1}\delta v'(m)g_v'(m,y^o(m),v^o(m))N(m,\ell)g_v(\ell,y^o(\ell),v^o(\ell))\delta v(\ell)d\ell\,dm +$$
$$+2\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{x_0}^{x_1}\delta v'(m)M_{vy}(m,y^o(m),v^o(m),p^o(m))\Phi(m,x)dm\right]g_v'(x,y^o(x),v^o(x))\delta v(x)dx +$$
$$+\int_{x_0}^{x_1}\delta v'(x)M_{vv}(x,y^o(x),v^o(x),p^o(x))\delta v(x)dx \le 0. \quad (42)$$

Теперь предположим, что $\Delta u(t) \neq 0$, а $\Delta v(x) \equiv 0$. Тогда неравенство (23) примет вид

$$\int_{x_0}^{x_1}\delta z'(t_1,x)G_{zz}(x,z^o(t_1,x))\delta z(t_1,x)dx - \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\delta z'(t,x)H_{zz}(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x))\delta z(t,x) +\right.$$
$$+2\delta u'(t)H_{uz}(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x))\delta z(t,x) + \quad (43)$$
$$\left.+\delta u'(t)H_{uu}(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x))\delta u(t)\right]dx\,dt \ge 0.$$

А уравнения в вариациях (17) -(20) примут вид:

$\delta\dot y(x) = g_y(x,y^o(x),v^o(x))\delta y(x)$, (44)

$\delta y(x_0) = 0$, (45)

$\delta z_t(t,x) = f_z(t,x,z^o(t,x),u^o(t))\delta z(t,x) + f_u(t,x,z^o(t,x),u^o(t))\delta u(t)$, (46)

$\delta z(t_0,x) = 0$. (47)

Запишем представление решение задачи (46) -(47).

Имеем

$$\delta z(t,x) = \int_{t_0}^{t}F(t,\tau,x)f_u(\tau,x,z^o(\tau,x),u^o(\tau))\delta u(\tau)d\tau, \quad (48)$$

Используя представление (48) займемся преобразованием отдельных слагаемых в неравенстве (43).

Имеем

$$\int_{x_0}^{x_1}\delta z'(t_1,x)G_{zz}(x,z^o(t_1,x))\delta z(t_1,x) = \int_{x_0}^{x_1}\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(\tau)f_u'(\tau,x,z^o(\tau,x),u^o(\tau))F'(t_1,\tau,x)\times \quad (49)$$
$$\times G_{zz}(x,z^o(t_1,x))F(t_1,s,x)f_u'(s,x,z^o(s,x),u^o(s))\delta u(s)ds\,d\tau\,dx,$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{t_0}^{t} F(t,\tau,x) f_u\big(\tau,x,z^o(\tau,x),u^o(\tau)\big)\delta u(\tau)\,d\tau\right)' H_{zz}\big(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x)\big)\times$$

$$\times\left(\int_{t_0}^{t} F(t,s,x) f_u\big(s,x,z^o(s,x),u^o(s)\big)\delta u(s)\,ds\right)dx\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(\tau)\, f_u'\big(\tau,x,z^o(\tau,x),u^o(\tau)\big)\times$$

$$\times\left\{\int_{\max(\tau,s)}^{t_1} F'(t,\tau,x) H_{zz}\big(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x)\big)F(t,s,x)\,dt\right\}\times \quad (50)$$

$$\times\, f_u\big(s,x,z^o(s,x),u^o(s)\big)\delta u(s)\,ds\,d\tau\,dx.$$

Наконец имеем

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\delta u'(\tau) H_{uz}\big(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x)\big)\delta z(t,x)\,dx\,dt = \quad (51)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{t}^{t_1}\delta u'(\tau) H_{uz}\big(\tau,x,z^o(\tau,x),u^o(\tau),\psi^o(\tau,x)\big)d\tau\right] F(\tau,t,x)\, f_u\big(t,x,z^o(t,x),u^o(t)\big)\delta u(t)\,dt.$$

Введем обозначение

$$K(\tau,x,s) = -F'(t_1,x,\tau) G_{zz}(x,z^0(t_1,x))F(t_1,s,x) +$$

$$+ \int_{\max(\tau,s)}^{t_1} F'(t,\tau,x) H(t,x,z^0(t,x),u^0(t),\psi^0(t,x))F(t,s,x)\,dt.$$

Используя это обозначение и принимая во внимания тождества (49) -(51) неравенство (43) записывается в виде:

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(\tau)\, f_u'\big(\tau,x,z^o(\tau,x),u^o(\tau)\big)K(x,\tau,s)\, f_u\big(s,x,z^o(s,x),u^o(s)\big)\delta u(s)\,ds\,d\tau\,dx +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(\tau) H_{uz}\big(\tau,x,z^o(\tau,x),u^o(\tau),\psi^o(\tau,x)\big)F(\tau,t,x)\,d\tau\right]\times$$

$$\times\, f_u\big(t,x,z^o(t,x),u^o(t)\big)\delta u(t)\,dx\,dt + \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\delta u'(t) H_{uu}\big(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x)\big)\delta u(t)\,dx\,dt \le 0.$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 2. *Для оптимальности классической экстремали* $\big(u^o(t),v^o(x)\big)$ в задаче (1)-(7) *необходимо, чтобы вдоль процесса* $\big(u^o(t),v^o(x),z^o(t,x),y^o(x)\big)$ *выполнялись соотношения*

$$1)\ \int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1}\delta v'(m) g_v'\big(m,y^o(m),v^o(m)\big)N(m,\ell) g_v\big(\ell,y^o(\ell),v^o(\ell)\big)\delta v(\ell)\,d\ell\,dm +$$

$$+2\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{x_0}^{x_1}\delta v'(m) M_{vy}\big(m,y^o(m),v^o(m),p^o(m)\big)\Phi(m,x)\,dm\right] g_v\big(x,y^o(x),v^o(x)\big)\delta v(x)\,dx +$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\delta v'(x)M_{vv}\left(x, y^o(x), v^o(x), p^o(x)\right)\delta v(x)dx \le 0, \quad (52)$$

для всех $\delta v(x)\in R^q$, $x\in X$,

$$2)\ \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(\tau)\, f_u'\left(\tau, x, z^o(\tau, x), u^o(\tau)\right)K(x,\tau,s)\, f_u\left(s, x, z^o(s,x), u^o(s)\right)\delta u(s)ds\, d\tau\, dx + \quad (53)$$

$$+2\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(\tau)H_{uz}\left(\tau, x, z^o(\tau,x), u^o(\tau), \psi^o(\tau,x)\right)F(\tau,t,x)d\tau\right]\times$$

$$\times f_u\left(t, x, z^o(t,x), u^o(t)\right)\delta u(t)dt\, dx + \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\delta u'(t)H_{uu}\left(t, x, z^o(t,x), u^o(t), \psi^o(t,x)\right)\delta u(t)dx\, dt \le 0.$$

для всех $\delta u(t)\in R^r$, $t\in T$.

Неравенства (52), (53) являясь необходимыми условиями оптимальности второго порядка позволяют используя произвольность допустимых вариаций, получить аналог условия Лежандра-Клебша [6, 7] и исследовать случай его вырождения.

Теорема 3. Для оптимальности классическойэкстремали в задаче (1.1)-(1.7) необходимо, чтобы неравенства

$$v' M_{vv}\left(\xi, y^o(\xi), v^o(\xi), p^o(\xi)\right)v \le 0 \quad (54)$$

и

$$u'\left[\int_{x_0}^{x_1}H_{uu}\left(\theta, x, z^o(\theta,x), u^o(\theta), \psi^o(\theta,x)\right)dx\right]u \le 0 \quad (55)$$

выполнялись для всех $\xi\in[x_0, x_1)$, $v\in R^q$ и $\theta\in[t_0, t_1)$, $u\in R^r$ соответственно.

Система соотношений (54), (55) являются аналогом условия Лежандра-Клебша для рассматриваемой задачи.

Как видно, его проверка относительно легче. Но платой за простаты является, то, что она часто вырождается [8, 9].

Следовательно, надо исследовать случай вырождения условия Лежандра-Клебша с целью получения новых необходимых условий оптимальности.

Определение 2. Классический экстремаль $\left(u^o(t), v^o(x)\right)$ назовем особым в классическом смысле управлением в задаче (1.1)-(1.7), если для всех $u\in R^r$, $\theta\in[t_0, t_1)$ и $v\in R^q$, $\xi\in[x_0, x_1)$ выполняются соответственно соотношения

$$u'\left[\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^2 H_{uu}\left(\theta, x, z^o(\theta,x), u^o(\theta), \psi^o(\theta,x)\right)}{\partial u^2}dx\right]u = 0, \quad (56)$$

$$v'\frac{\partial^2 M_{vv}\left(\xi, y^o(\xi), v^o(\xi), p^o(\xi)\right)}{\partial v^2}v = 0. \quad (57)$$

С учетом (56), (57) из необходимого условия оптимальности второго порядка (теорема 2.) получается необходимое условие оптимальности для особых в классическом смысле управлений.

Теорема 4. Для оптимальности особого в классическом смысле управления необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$u'\left[\int_{x_0}^{x_1}\left[f_u'\left(\theta,x,z^o(\theta,x),u^o(\theta)\right)K(x,\theta,\theta)\,f_u\left(\theta,x,z^o(\theta,x),u^o(\theta)\right)+\right.\right. \tag{58}$$

$$\left.\left.+H_{uz}\left(\theta,x,z^o(\theta,x),u^o(\theta),\psi^o(\theta,x)\right)f_u\left(\theta,x,z^o(\theta,x),u^o(\theta)\right)\right]dx\right]u\le 0,$$

для всех $\theta\in[t_0,t_1),\, u\in R^r$,

$$v'\left[g_v'\left(\xi,y^o(\xi),v^o(\xi)\right)N(\xi,\xi)g_v'\left(\xi,y^o(\xi),v^o(\xi)\right)+M_{vv}\left(\xi,y^o(\xi),v^o(\xi),p^o(\xi)\right)\right]v\le 0\,. \tag{59}$$

для всех $\xi\in[x_0,x_1),\, v\in R^q$.

Соотношения (58), (59) являются необходимыми условиями оптимальности особых в классическом смысле управлений.

5. Многоточечные необходимые условия оптимальности особых в классическом смысле управлений.Пусть $\left(u^o(t),v^o(x)\right)$ особое, в классическом смысле, управление в задаче (1)-(7).

Специальную вариацию управления $u^o(t)$ определим по формуле

$$\delta u_\varepsilon(t)=\sum_{i=1}^m \delta u(t,\varepsilon;\,\theta_i,\ell_i,u_i), \tag{60}$$

$$\left(\delta v_\varepsilon(x)=\sum_{i=1}^m \delta v(x,\varepsilon;\,\xi_i,\ell_i,v_i)\right). \tag{61}$$

Здесь как и выше m – произвольное натуральное число, $\varepsilon>0$ достаточное малое, произвольное число, $\ell_i\ge 0$, $u_i\in R^r$ $\left(v_i\in R^q\right)$, $\theta_i\in[t_0,t_1)$, $i=\overline{1,m}$ $\left(\xi_i\in[x_0,x_1), i=\overline{1,m}, (x_0\le\xi_1\le\ldots\le\xi_m<x_1)\right)$, а

$$\delta u(t;\varepsilon;\,\theta_i,\ell_i,u_i)=\begin{cases}u_i, & t\in[\theta_i,\,\theta_i+\ell_i\,\varepsilon),\\ 0, & t\in[t_0,t_1]\setminus[\theta_i,\,\theta_i+\ell_i\,\varepsilon),\end{cases} \tag{62}$$

$$\left(\delta v(x,\varepsilon;\,\xi_i,\ell_i,v_i)=\begin{cases}v_i, & x\in[\xi_i,\,\xi_i+\ell_i\,\varepsilon),\\ 0, & x\in[x_0,x_1]\setminus[\xi_i,\,\xi_i+\ell_i\,\varepsilon).\end{cases}\right) \tag{63}$$

Суммирование игольчатого типа вариаций(62), (63) понимается в смысле[10].

Принимая во внимание (60) ((61)) в неравенстве (52) ((53)) после некоторых преобразований приходим к утверждению

Теорема5. Для оптимальности особого в классическом смысле управления в задаче (1) - (7) необходимо, чтобы для любого натурального числа неравенство

$$\int_{x_0}^{x_1}\Bigg[\sum_{i,j=1}^{m}\ell_i\,\ell_j\,u_i'\,f_u'\big(\theta_i,x,z^o(\theta_i,x),u^o(\theta_i)\big)K\big(x,\theta_i,\theta_j\big)f_u\big(\theta_j,x,z^o(\theta_j,x),u^o(\theta_j)\big)u_j+ \quad (64)$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\ell_i\,u_i'\,H_{uz}\big(\theta_i,x,z^o(\theta_i,x),u^o(\theta_i),\psi^o(\theta_i,x)\big)\times$$

$$\times\left[\ell_i\;f_u\big(\theta_i,x,z^o(\theta_i,x),u^o(\theta_i)\big)u_i+2\sum_{j=1}^{i-1}\ell_j\,F\big(\theta_i,\theta_j,x\big)f_u\big(\theta_j,x,z^o(\theta_j,x),u^o(\theta_j)\big)v_j\right]\Bigg]dx\le 0,$$

$$\left(\begin{array}{c}\displaystyle\sum_{i,j=1}^{m}\ell_i\,\ell_j\,v_i'\,g_v'\big(\xi_i,y^o(\xi_i),v^o(\xi_i)\big)N\big(\xi_i,\xi_j\big)g_v\big(\xi_j,y^o(\xi_j),v^o(\xi_j)\big)v_j+\\ \displaystyle+\sum_{i=1}^{m}\ell_i\,v_i'\,M_v\big(\xi_i,y^o(\xi_i),v^o(\xi_i),p^o(\xi_i)\big)\times\\ \displaystyle\times\left[\ell_i\,g_v\big(\xi_i,y^o(\xi_i),v^o(\xi_i)\big)v_i+2\sum_{j=1}^{i-1}\ell_j\,\Phi\big(\xi_i,\xi_j\big)g_v\big(\xi_j,y^o(\xi_j),v^o(\xi_j)\big)v_j\right]\le 0.\end{array}\right) \quad (65)$$

выполнялось для всех $u_i\in R^r\ \big(v_i\in R^q\big),\ \ell_i\ge 0,\ \theta_i\in[t_0,t_1),\ \big(t_0\le\theta_1\le\ldots\le\theta_m<t_1\big),$ $\big(\xi_i\in[x_0,x_1),(x_0\le\xi_1\le\ldots\le\xi_m<x_1)\big),\ i=\overline{1,m}.$

Неравенство (64) ((65)) является последовательностью необходимых условий оптимальности особых в классическом смысле управлений и позволяет существенно сузить множество особых в классическом смысле управлений подозрительных на оптимальность и остается в силе также при вырождении необходимых условий оптимальности (58) - (59). Из него следуют ряд более просто проверяемых необходимых условий оптимальности особых в классическом смысле управлений. В частности,полагая в (64) ((65)) получаем необходимое условие оптимальности из теоремы 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Москаленко А.И.*Об одном классе задач оптимального регулирования*. Журн. вычисл. матем. и матем. Физики.1969. №1. с. 68-85.
2. Дубовицкий А.Я. Милютин А.А.*Задача на экстремум при наличии ограничений.* Журн.вычисл. матем. и матем.физики.1965№3.с.1-80.
3. ПонтрягинЛ.С. и др.*Математическая теория оптимальных процессов*.М.Наука 1986.382 с.
4. Габасов Р., Кириллова Ф.М. и др.*Методы оптимизации*.Минск.Изд-воЧетыре четверти.2011.472 с.
5. Габасов Р.Кириллова Ф.М. *Особые оптимальные управления*.М.Либроком.2013.256 с.
6. Демьянов В.Ф.*Условие экстремума и вариационное исчисление.*М.Высшая школа.2005.335 с.
7. Габасов Р. Кириллова Ф.М.*Ктеории необходимых условий оптимальности высокого порядка.* Дифференц. уравнения.1970. №4. с.665-676.
8. Гороховик С.Я. *Необходимые условия оптимальности в задаче с подвижным правым концом траектории.*Дифференц.уравнения.1975. №10. с.1765-1773.

JOURNAL OF BAKU ENGINEERING UNIVERSITY- MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
2019. Volume 3, Number 1 Pages 36-48

УДК 517.977.52

О МНОГОТОЧЕЧНЫХ НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБЫХ, В КЛАССИЧЕСКОМ СМЫСЛЕ, УПРАВЛЕНИЙ В ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ ГУРСА-ДАРБУ

СУЛЕЙМАНОВА В.А.

Сумгаитский Государственный Университет, Сумгаит, Азербайджан

vusale vusale 16@gmail.com, kamilbmansimov@gmail.com

АННОТАЦИЯ

Рассматривается одна граничная задача оптимального управления системами Гурса-Дарбу, при предположении открытости области управления. Доказан аналог уравнения Эйлера и выведены необходимые условия оптимальности второго порядка. Отдельно исследован случай вырождения аналога условия Лежандра-Клебша.

Ключевые слова: система Гурса-Дарбу, граничное управление, вариация функционала, аналог уравнения Эйлера, классически особые управления, многоточечное необходимое условие оптимальности.

ON THE MULTIPOINT NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS FOR THE SINGULAR IN CLASSICAL SENCE, CONTROLS ON THE ONE BOUNDARY OPTIMAL CONTROL PROBLEMS QOURSAT- DARBOUX SYSTEMS

ABSTRACT

One boundary-value optimal control problem of Goursat-Darboux systems under the assumption that the control area is open is considered. An analogue of the Euler equation is provied and the necessary second-order optimality conditions are derived. The case of degeneration of an analogue of the Legendre-Clebsch condition separately is inverstigated.

Keywords: Goursat-Darboux system, boundary control, functional variation, analogue of the Euler equation, classically singular controls, multi-point necessary optimality condition.

QURSA-DARBU SİSTEMLƏRİ İLƏ BİR SƏRHƏD OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ KLASSİK MƏNADƏ MƏXSUSİ İDARƏLƏRİN OPTİMALLIĞI ÜÇÜN ÇOXNÖQTƏLİ ZƏRURİ ŞƏRTLƏR HAQQINDA

XÜLASƏ

İdarə oblastının açıq olması fərz edilməklə Qursa-Darbu sistemi ilə sərhəd optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Eyler tənliyinin analoqu isbat olunur və ikinici tərtib optimallıq şərti alınır. Lejandr- Klebş şərtinin cırlaşdığı hal ayrıca öyrənilir.

Aşar sözlər: Qursa-Darbu sistemi, sərhədd şərti, funksionalın variasiyası, Eyler tənliyinin analoqu, klassik məxsusi idarələr, optimallıq üçün çoxnöqtəli zəruri şərt.

1.Введение. Начиная с работ [1-6] были изучены задачи оптимального управления, описываемые гиперболическими уравнениями с краевыми условиями Гурса в случае вхождения управляющей функции в правую часть уравнения. Были доказаны необходимые условия оптимальности типа принципа максимума Понтрягина при различных предположениях. Изучены вопросы, связанные существованием оптимального управления. Исследование граничных задач оптимального управления системами Гурса-Дарбу началось с работ [7-9]. Оказалось, что подобные задачи управления обладают определенными особенностями возникающие как при выводе необходимых условий оптимальности, так и при доказательстве теорем существования оптимальных управлений.

Настоящая статья посвящена выводу необходимых условий оптимальности первого и второго порядков в одной граничной задаче оптимального управления системами Гурса-Дарбу с многоточечным функционалом качества. Отдельно исследован случай вырождения необходимого условия оптимальности второго порядка, типа Лежандра-Клебша.

2. Постановка задачи. Пусть $D = T \times X = [t_0,\, t_1] \times [x_0,\, x_1]$ – заданная область, U – заданное непустое открытое и ограниченное множество, $X_i,\ i = \overline{1,k}$ $(x_0 < X_1 < X_2 < \ldots < X_k < x_1)$ заданные точки. Рассмотрим задачу о нахождении минимального значения многоточечного функционала

$$S(u) = \varphi_1(z(t_1, x_1)) + \varphi_2(a(X_1), \ldots, a(X_k)), \quad (1)$$

при ограничениях

$$u(t) \in U \subset R^r,\ t \in T, \quad (2)$$

$$\dot{a} = g(x, a, u),\ x \in X, \quad (3)$$

$$a(x_0) = a_0, \quad (4)$$

$$z_{tx} = A(t,x) z_t + B(t,x) z_x + f(t,x,z),\ (t,x) \in D, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} &z(t_0, x) = a(x),\ x \in X, \\ &z(t, x_0) = b(t),\ t \in T, \quad (6) \\ &a(x_0) = b(t_0) = a_0. \end{aligned}$$

Здесь $g(x,a,u)$-заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (a,u) до второго порядка включительно, $f(t,x,z)$ – заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по z до второго порядка включительно, $u = u(t)$ – измеримая и ограниченная r-мерная вектор-функция (допустимое управление), a_0 – заданный постоянный вектор, $b(t)$ – заданная, абсолютно непрерывная вектор-функция, $A(t,x), B(t,x)$ – заданные $(n \times n)$ измеримые и ограниченные матричные функции, $\varphi_1(z), \varphi_2(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ – заданные дважды непрерывно-дифференцируемые скалярные функции.

Предполагается, что при каждом заданном допустимом управлении задача (3) –(6) имеет единственное абсолютно непрерывное решение и в рассматриваемой задаче оптимальное управление (т.е. управление доставляющее минимальное значение функционалу (1), при ограничениях (2)-(6)) существует.

3. Вариации функционала качества. Предполагая, что $(u(x), a(x), z(t,x))$ – фиксированный допустимый процесс. Через $(\overline{u}(x) = u(x) + \Delta u(x), \overline{a}(x) = a(x) + \Delta a(x),$ $\overline{z}(t,x) = z(t,x) + \Delta z(t,x))$ – обозначим произвольный допустимый процесс и запишем приращение функционала качества

$$\begin{aligned} \Delta S(u) = S(\overline{u}) - S(u) = (\varphi_1(\overline{z}(t_1, x_1)) - \varphi_1(z(t_1, x_1))) + \\ + (\varphi_2(\overline{a}(X_1), \ldots, \overline{a}(X_k)) - \varphi_2(a(X_1), \ldots, a(X_k))). \end{aligned} \quad (7)$$

Ясно, что приращение состояния $(a(x), z(t,x))$ будет решением задачи

$$\Delta\dot{a}(x) = g(x, \bar{a}(x), \bar{u}(x)) - g(x, a, u), \quad (8)$$

$$\Delta a(x_0) = 0, \quad (9)$$

$$\begin{aligned}&\Delta z_{tx}(t,x) = A(t,x)\Delta z_t(t,x) + B(t,x)\Delta z_x(t,x) + \\ &+ f(t,x,\bar{z}(t,x)) - f(t,x,z(t,x)),\end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}&\Delta z(t_0, x) = \Delta a(x), \\ &\Delta z(t, x_0) = 0.\end{aligned} \quad (11)$$

Введем функцию Гамильтона-Понтрягина

$$H(t,x,z,\psi) = \psi' f(t,x,z),$$
$$M(x,a,u,p) = p' g(x,a,u),$$

где $\psi = \psi(t,x)$, $p = p(x)-$ пока произвольные n-мерные вектор-функции. Тогда справедливы тождества

$$\int_{x_0}^{x_1} p'(x)\Delta\dot{a}(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} (M(x, \bar{a}(x), \bar{u}(x), p(x)) - M(x, a(x), u(x), p(x)))dx, \quad (12)$$

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \psi'(t,x)\Delta z_{tx}(t,x)dxdt = \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \psi'(t,x)A(t,x)\Delta z_t(t,x)dxdt + \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \psi'(t,x)B(t,x)\Delta z_x(t,x)dxdt + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} (H(t,x,\bar{z}(t,x),\psi(t,x)) - H(t,x,z(t,x),\psi(t,x)))dxdt.\end{aligned}$$

(13)

С учетом (12), (13) формула приращения (7) записывается в виде

$$\begin{aligned}&\Delta S(u) = S(\bar{u}) - S(u) = (\varphi_1(\bar{z}(t_1,x_1)) - \varphi_1(z(t_1,x_1))) + (\varphi_2(\bar{a}(X_1),\ldots,\bar{a}(X_k)) - \varphi_2(a(X_1),\ldots,a(X_k))) + \\ &+ \int_{x_0}^{x_1} p'(x)\Delta\dot{a}(x)dx - \int_{x_0}^{x_1} (M(x,\bar{a}(x),\bar{u}(x),p(x)) - M(x,a(x),u(x),p(x)))dx + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \psi'(t,x)\Delta z_{tx}(t,x)dxdt - \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \psi'(t,x)A(t,x)\Delta z_t(t,x)dxdt - \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \psi'(t,x)B(t,x)\Delta z_x(t,x)dxdt - \\ &- \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} (H(t,x,\bar{z}(t,x),\psi(t,x)) - H(t,x,z(t,x),\psi(t,x)))dxdt.\end{aligned} \quad (14)$$

Введя обозначения типа

$$M_a[x,p] \equiv M_a(x, a(x), u(x), p(x)),$$
$$M_u[x,p] \equiv M_u(x, a(x), u(x), p(x)),$$
$$M_{aa}[x,p] \equiv M_{aa}(x, a(x), u(x), p(x)),$$
$$H_z[t,x,\psi] \equiv H_z(t,x,z(t,x),\psi(t,x)),$$
$$H_{zz}[t,x,\psi] \equiv H_{zz}(t,x,z(t,x),\psi(t,x))$$

и применяя формулу Тейлора, приращение (14) функционала качества представляется в виде

$$\Delta S(u)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\varphi'_2\left(a(X_1),\dots,a(X_k)\right)}{\partial a_i}\Delta a(X_i)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\Delta a'(X_i)\frac{\partial^2\varphi_2\left(a(X_1),\dots,a(X_k)\right)}{\partial a_i\partial a_{\mathbf{j}}}\Delta a(X_j)+$$
$$+\int_{x_0}^{x_1}p'(x)\Delta\dot a(x)dx-\int_{x_0}^{x_1}M'_a[x,p]\Delta a(x)dx-\int_{x_0}^{x_1}M'_u[x,p]\Delta u(x)dx-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\Delta a'(x)M_{aa}[x,p]\Delta a(x)dx-$$
$$-\int_{x_0}^{x_1}\Delta u'(x)M_{ua}[x,p]\Delta a(x)dx-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\Delta u'(x)M_{uu}[x,p]\Delta u(x)dx+\frac{\partial\varphi'_1\left(z(t_1,x_1)\right)}{\partial z}\Delta z(t_1,x_1)+ \tag{15}$$
$$+\frac{1}{2}\Delta z'(t_1,x_1)\frac{\partial^2\varphi_1\left(z(t_1,x_1)\right)}{\partial z}\Delta z(t_1,x_1)+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)\Delta z_{tx}(t,x)dxdt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)A(t,x)\Delta z_t(t,x)dxdt-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)B(t,x)\Delta z_x(t,x)dxdt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}H'_z[t,x,\psi]\Delta z(t,x)dxdt-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'(t,x)H_{zz}[t,x,\psi]\Delta z(t,x)dxdt+$$
$$+o_1\left(\sum_{i=1}^{k}\left\|\Delta a(X_i)\right\|^2\right)+o_2\left(\left\|\Delta z(t_1,x_1)\right\|^2\right)-\int_{x_0}^{x_1}o_3\left(\left[\left\|\Delta a(x)\right\|+\left\|\Delta u(x)\right\|\right]^2\right)dx-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}o_4\left(\left\|\Delta z(t_1,x_1)\right\|^2\right)dxdt.$$

Здесь, и в дальнейшем $o(\alpha^2)$- есть величина более высокого порядка, чем α, т.е. $o(\alpha^2)/\alpha^2\to 0$, при $\alpha\to 0$, а через $\|\alpha\|$ обозначена норма вектора столбца $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)'$ определяемая формулой $\|\alpha\|=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|$.

В силу краевых условий (6) ясно, что

$$\Delta z(t,x)=\Delta a(x)+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\Delta z_{\tau s}(\tau,s)dsd\tau,$$

$$\Delta z_t(t,x)=\int_{x_0}^{x}\Delta z_{ts}(t,s)ds,$$

$$\Delta z_x(t,x)=\Delta\dot a(x)+\int_{t_0}^{t}\Delta z_{\tau x}(\tau,x)d\tau,$$

$$\Delta a(x)=\int_{x_0}^{x}\Delta\dot a(s)ds,$$

$$\Delta a(X_i)=\int_{x_0}^{x_1}\alpha_i(x)\Delta\dot a(x)dx,$$

где $\alpha_i(x)$, характеристическая функция отрезка $[x_0,X_i]$.

Займемся преобразованием отдельных слагаемых в формуле приращении (15) функционала качества (1).

Справедливы тождества

$$\int_{x_0}^{x_1}M'_a[x,p]\Delta a(x)dx=\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{x}^{x_1}M'_a[s,p]\right]\Delta\dot a(x)dx, \tag{16}$$

$$\frac{\partial\varphi_2\left(a(X_1),\dots,a(X_k)\right)}{\partial a_i}\Delta a(X_i)=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial\varphi_2\left(a(X_1),\dots,a(X_k)\right)}{\partial a_i}\alpha_i(x)\Delta\dot a(x)dx, \tag{17}$$

$$\frac{\partial\varphi_1\left(z(t_1,x_1)\right)}{\partial z}\Delta z(t_1,x_1)=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial\varphi_1\left(z(t_1,x_1)\right)}{\partial z}\Delta\dot a(x)dx+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial\varphi_1\left(z(t_1,x_1)\right)}{\partial z}\Delta z_{tz}(t,x)dxdt, \tag{18}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)A(t,x)\Delta z_t(t,x)dxdt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_x^{x_1}A'(t,s)\psi(t,s)ds\right)'\Delta z_{tx}(t,x)dxdt, \quad (19)$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)B(t,x)\Delta z_x(t,x)dxdt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}(B'(t,x)\psi(t,x))'\Delta\dot{a}(x)dxdt+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_t^{t_1}B'(\tau,x)\psi(\tau,x)ds\right)'\Delta z_{tx}(t,x)dxdt, \quad (20)$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}H'_z[t,x,\psi]\Delta z(t,x)dxdt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_x^{x_1}H'_z[t,s]ds\right)\Delta\dot{a}(x)dxdt$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}H'_z[\tau,s]d\tau ds\right)\Delta z_{tx}(t,x)dxdt. \quad (21)$$

Принимая во внимание тождества (16)-(21) в (15), будем иметь

$$\Delta S(u)=\int_{x_0}^{x_1}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(x)\frac{\partial\varphi'_2(a(X_1),...,a(X_k))}{\partial a_i}\Delta\dot{a}(x)dx+\int_{x_0}^{x_1}p'(x)\Delta\dot{a}(x)dx-$$
$$-\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_x^{x_1}M'_a[s,p]ds\right)\Delta\dot{a}(x)dx+\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial\varphi_1(z(t_1,x_1))}{\partial z}\Delta\dot{a}(x)dx-\int_{x_0}^{x_1}M'_u[x,p]\Delta u(x)dx- \quad (22)$$
$$-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\Delta a'(x)M_{aa}[x,p]\Delta a(x)dx-\int_{x_0}^{x_1}\Delta u'(x)M_{ua}[x,p]\Delta a(x)dx-$$
$$-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\Delta u'(x)M_{uu}[x,p]\Delta u(x)dx+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial\varphi'_1(z(t_1,x_1))}{\partial z}\Delta z_{tx}(t,x)dxdt+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)\Delta z_{tx}(t,x)dxdt-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_x^{x_1}A'(t,s)\psi(t,s)\right)'\Delta z_{tx}(t,x)dxdt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}(B'(t,x)\psi(t,x))'\Delta\dot{a}(x)dxdt-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_t^{t_1}B'(\tau,x)\psi(\tau,x)d\tau\right)'\Delta z_{tx}(t,x)dxdt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_x^{x_1}H'_z[\tau,s]ds\right)\Delta\dot{a}(x)dxdt-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_t^{t_1}\int_x^{x_1}H'_z[\tau,s,\psi]dsd\tau\right)\Delta z_{tx}(t,x)dxdt-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'(t,x)H_{zz}[t,x,\psi]\Delta z(t,x)dxdt+$$
$$+o_1\left(\sum_{i=1}^{k}\|\Delta a(X_i)\|^2\right)+o_2\left(\|\Delta z(t_1,x_1)\|^2\right)-\int_{x_0}^{x_1}o_3\left([\|\Delta a(x)\|+\|\Delta u(x)\|]^2\right)dx-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}o_4\left(\|\Delta z(t_1,x_1)\|^2\right)dxdt.$$

Если предполагать, что $p(x)$ и $\psi(t,x)$ удовлетворяют соотношениям

$$p(x)=\int_x^{x_1}M'_a[s,p]ds-\int_{t_0}^{t_1}\psi'(t,x)B(t,x)dt-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(x)\frac{\partial\varphi_2(a(X_1),...,a(X_k))}{\partial a_i}-\int_{t_0}^{t_1}\int_x^{x_1}H_z[t,s]dsdt, \quad (23)$$

$$\psi(t,x)=\int_x^{x_1}\psi'(t,s)A(t,s)ds-\int_t^{t_1}\psi'(\tau,x)B(\tau,x)d\tau+\int_t^{t_1}\int_x^{x_1}H_z[\tau,s]dsd\tau-\frac{\partial\varphi_1(z(t_1,x_1))}{\partial z}, \quad (24)$$

то формула приращения (22) функционала (1) примет вид

$$\Delta S(u) = \frac{1}{2}\Delta z'(t_1,x_1)\frac{\partial^2\varphi'_1(z(t_1,x_1))}{\partial z^2}\Delta z(t_1,x_1) - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'(t,x)H_{zz}[t,x,\psi]\Delta z(t,x)dxdt +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\Delta a'(X_i)\frac{\partial^2\varphi'_2(a(X_1),\dots,a(X_k))}{\partial a_i\,\partial a_j}\Delta a(X_i) - \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\Delta a'(x)M_{aa}[x,p]\Delta a(x)dx - \qquad (25)$$
$$-\int_{x_0}^{x_1}\Delta u'(x)M_{ua}[x,p]\Delta a(x)dx - \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\Delta u'(x)M_{uu}[x,p]\Delta u(x)dx + o_1\left(\|\Delta z(t_1,x_1)\|^2\right)+$$
$$+o_2\left(\sum_{i=1}^{k}\|\Delta a(X_i)\|^2\right) - \int_{x_0}^{x_1}o_3\left([\|\Delta a(x)\|+\|\Delta u(x)\|]^2\right)dx - \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}o_4\left(\|\Delta z(t_1,x_1)\|^2\right)dxdt.$$

Как видно, соотношения (23), (24) являются линейными интегральными уравнениями второго рода типа Вольтерра и будут иметь единственное решение в классе измеримых и ограниченных функций. По аналогии с [1-9] уравнения (23), (24) будем называть сопряженными системами в рассматриваемой задаче.

Из оценок, доказанных и приведенных в работах [7, 8, 10] и др. следует, что в рассматриваемом случае

$$\|\Delta a(x)\| \le L_1\int_{x_0}^{x_1}\|\Delta u(x)\|dx,$$
$$\|\Delta z(t,x)\| \le L_2\int_{x_0}^{x_1}\|\Delta u(x)\|dx, \qquad (26)$$

где $L_1, L_2 -$ некоторые положительные постоянные.

Предположим что ε достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u(t)\in R^r$ произвольная измеримая и ограниченная r-мерная вектор-функция (допустимая вариация управления).

В силу открытости области управления, специальное приращение допустимого управления $u(t)$ можно определить по формуле

$$\Delta u(t,\varepsilon) = \varepsilon\delta u(t),\ t\in T \quad (27)$$

Через $(\Delta a(x,\varepsilon),\Delta z(t,x,\varepsilon))$ обозначим специальное приращение состояния $(a(x), z(t,x))$, отвечающее специальному приращению $\Delta u(t,\varepsilon)$ управления $u(t)$.

Из оценок (26) следует, что

$$\|\Delta a(x,\varepsilon)\| \le L_3\varepsilon, \quad x\in X,$$
$$\|\Delta z(t,x,\varepsilon)\| \le L_4\varepsilon,\ (t,x)\in D, \qquad (28)$$

где $L_3, L_4 -$некоторые положительные постоянные.

Учитывая (27), (28) в формуле приращении (25), нетрудно доказать, что первая и вторая вариации (в классическом смысле) функционала (1) имеют соответственно вид

$$\delta^1 S(u:\delta u) = -\int_{x_0}^{x_1}M'_u[x,p]\delta u(x)dx, \quad (29)$$

$$\delta^2 S(u:\delta u) = \delta z'(t_1,x_1)\frac{\partial^2 \varphi_1(z(t_1,x_1))}{\partial z^2}\delta z(t_1,x_1) + \sum_{i,j=1}^{k}\delta a'(X_i)\frac{\partial^2 \varphi_2(a(X_1),\dots,a(X_k))}{\partial a_i\,\partial a_j}\delta a(X_i) - $$
$$- 2\int_{x_0}^{x_1}\delta u'(x)M_{ua}[x,p]\delta a(x)dx - \int_{x_0}^{x_1}\delta a'(x)M_{aa}[x,p]\delta a(x)dx - \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\delta z'(t,x)H_{zz}[t,x,\psi]\delta z(t,x)dxdt, \quad (30)$$

где $(\delta a(x),\delta z(t,x))$ – допустимая вариация вектора состояния являющееся решением уравнения в вариациях для рассматриваемой задачи:

$$\delta \dot a(x) = g_a[x]\delta a(x) + g_u[x]\delta u, \quad (31)$$

$$\delta a(x_0) = 0, \quad (32)$$

$$\delta z_{tx}(t,x) = A(t,x)\delta z_t(t,x) + B(t,x)\delta z_x(t,x) + f_z[t,x]\delta z(t,x),\ (t,x)\in D, \quad (33)$$

$$\begin{aligned}&\delta z(t_0,x) = \delta a(x), \quad x\in X,\\ &\delta z(t,x_0) = 0,\ t\in T.\end{aligned} \quad (34)$$

Принимая во внимание основной результат вариационного исчисления (см, например, [11,12]) получим, что для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в задаче (1)-(6) необходимо, чтобы соотношения

$$\int_{x_0}^{x_1} M'_u[x,p]\delta u(x)dx = 0, \quad (35)$$

$$\delta z'(t_1,x_1)\frac{\partial^2 \varphi_1(z(t_1,x_1))}{\partial z^2}\delta z(t_1,x_1) + \sum_{i,j=1}^{k}\delta a'(X_i)\frac{\partial^2 \varphi'_2(a(X_1),\dots,a(X_k))}{\partial a_i\,\partial a_j}\delta a(X_i) -$$
$$- 2\int_{x_0}^{x_1}\delta u'(x)M_{ua}[x,p]\delta a(x)dx - \int_{x_0}^{x_1}\delta a'(x)M_{aa}[x,p]\delta a(x)dx - \quad (36)$$
$$- \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\delta z'(t,x)H_{zz}[t,x,\psi]\delta z(t,x)dxdt \ge 0$$

выполнялись для всех $\delta u(x)\in R^r, x\in X$.

Соотношения (35)-(36) являются неявными необходимыми условиями первого и второго порядков, соответственно. Но из них можно получить необходимые условия оптимальности первого и второго порядков, явно выраженные через параметры задачи (1)-(6).

Имеет место

Теорема 1. *Для оптимальности допустимого управления* $u(x)$ *в задаче (1)-(6) необходимо, чтобы соотношение*

$$M_u[\xi, p(\xi)] = 0 \quad (37)$$

выполнялось для всех $\xi\in[x_0,x_1)$.

Здесь $\xi\in[x_0,x_1)$ есть произвольная точка Лебега (правильная точка (см., например, [13])) управления $u(x)$.

Доказательство. Допустим обратное. Пусть существует правильная точка $\xi \in [x_0, x_1)$ управления $u(x)$ и s $(1 \le s \le r)$ такова, что

$$\frac{\partial M[\xi, p(\xi)]}{\partial u_s} = \alpha \ne 0 \cdot$$

Теперь координаты вектор-функции $\delta u(x) = (\delta u_1(x), \delta u_2(x), ..., \delta u_r(x))'$ определим следующим образом:

$$\delta u_i(x) = 0, i \ne s, \ x \in X,$$

$$\delta u_s(x) = \begin{cases} \dfrac{\partial M[\xi, p(\xi)]}{\partial u_s}, & x \in [\xi, \xi + \varepsilon), \\ 0, & x \in [x_0, x_1] \setminus [\xi, \xi + \varepsilon), \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно малое произвольное число.

При определении специальной вариации $u(x)$ таким образом получаем, что

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial M[x, p(x)]}{\partial u_s} \delta u_\varepsilon(x) dx = \int_{\xi}^{\xi+\varepsilon} \left(\frac{\partial M[x, p(x)]}{\partial u_s} \right)^2 dx = \varepsilon \left(\frac{\partial M[\xi, p(\xi)]}{\partial u_s} \right)^2 + o(\varepsilon) =$$
$$= \varepsilon \alpha^2 + o(\varepsilon) \ne 0.$$

А это противоречит условию оптимальности (35). Этим теорема 1 доказана.

Соотношение (37) является необходимым условием оптимальности первого порядка и представляет собой аналог уравнения Эйлера для рассматриваемой задачи

Каждое допустимое управление, являющееся решением уравнения Эйлера следуя, например, [11, 12] назовем классической экстремалью.

Из определения классической экстремали ясно, что оптимальное управление находится среди классических экстремалей. Но их число может быть достаточно большим. Поэтому возникает необходимость в сужении множества классических экстремалей, подозрительных на оптимальность, с помощью неявного необходимого условия оптимальности второго порядка (36).

Как видно, уравнения в вариациях являются линейными дифференциальными уравнениями. На основе формулы о представлении решений некоторых линейных уравнений (см., например, [12, 14]) можно представить решения задач (31)-(32), (33)-(34) соответственно в виде

$$\delta a(x) = \int_{x_0}^{x} \Phi(x, s) g_u[s] ds, \quad (38)$$

$$\delta z(t, x) = \int_{x_0}^{x} R(t, x, t_0, s)(\dot{a}(s) - A(t_0, s)\delta a(s)) ds, \quad (39)$$

где $\Phi(x, s)$ и $R(t, x, \tau, s)$ $(n \times n)$ матричные функции, являющиеся решениями задач

$$\Phi_s(x, s) = -\Phi(x, s) g_a[s],$$

$$\Phi(x, x) = E,$$

$$R(t,x,\tau,s)=E+\int_t^\tau\int_x^s R(t,x,\alpha,\beta)f_z[\alpha,\beta]d\alpha d\beta+\int_x^s R(t,x,\tau,\beta)A(\tau,\beta)d\beta+\int_t^\tau R(t,x,\alpha,s)A(\alpha,s)d\alpha,$$

где $E-(n\times n)$ единичная матрица.

Далее, учитывая (31) в (39) и введя обозначение

$$Q(t,x,s)=R(t,x,t_0,s)(g_a[s]-A(t_0,s)),$$

получим, что

$$\delta z(t,x)=\int_{x_0}^{x}Q(t,x,s)\delta a(s)ds+\int_{x_0}^{x}R(t,x,t_0,s)g_u[s]\delta u(s)ds. \quad (40)$$

Пусть $\mu>0$ произвольное достаточно малое число, такое, что $\xi+\mu<x_1$ а $v\in R^r$ произвольный вектор. Вариацию управления $u(t)$ определим следующим образом

$$\delta u(t,\mu)=\begin{cases}v, & x\in[\xi,\xi+\mu),\\ 0, & x\in X\setminus[\xi,\xi+\mu).\end{cases} \quad (41)$$

Через $(\delta a(x,\mu),\delta z(t,x,\mu))$ обозначим специальную вариацию состояния $(a(x),z(t,x))$.

Из оценок (28), с учетом (38)-(41), получаем, что

$$\begin{aligned}&\|\Delta a(x,\mu)\|\le L_5\mu,\ x\in X,\\ &\|\Delta z(t,x)\|\le L_6\mu,\ (t,x)\in D.\end{aligned} \quad (42)$$

Учитывая оценки (42), а также формулу (41), в неравенстве (36) получаем, что

$$\mu v' M_{uu}[\xi,p]v+o(\mu)\le 0.$$

Отсюда в силу достаточной малости следует, что

$$v' M_{uu}[\xi,p]v\le 0. \quad (43)$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 2. Для оптимальности классической экстремали $u(x)$ необходимо, чтобы неравенство (43) выполнялось для всех $\xi\in[x_0,x_1)$ и $v\in R^r$.

Неравенство (43) является необходимым условием оптимальности второго порядка. Но не исключено возможность его вырождения.

Определение. Классический экстремаль $u(x)$ назовем особым, в классическом смысле, управлением, если для всех $\xi\in[x_0,x_1)$ и $v\in R^r$

$$v' M_{uu}[\xi,p]v=0. \quad (44)$$

Исследуя неявное необходимое условие оптимальности (36) получим конструктивно проверяемое необходимое условие оптимальности классически особых управлений.

Пусть $u(x)$ классически особый экстремаль. Из представления (38) получаем, что

$$\delta a(X_i)=\int_{x_0}^{x}\alpha_i(s)\Phi(X_i,s)g_u[s]\delta u(s)ds.$$

Поэтому

$$\sum_{i,j=1}^{k}\delta a'(X_i)\frac{\partial^2\varphi_2(a(X_1),...,a(X_k))}{\partial a_i\,\partial a_j}\delta a(X_i)=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{k}\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1}\alpha_i(s)\alpha_j(s)\delta u'(\tau)g'_u[\tau]\Phi(X_i,\tau)\frac{\partial^2\varphi_2(a(X_1),...,a(X_k))}{\partial a_i\,\partial a_j}\Phi(X_j,s)g_u[s]\delta u(s)dsd\tau, \quad (45)$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\delta a'(x)M_{aa}[x,p]\delta a(x)dx=$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\delta u'(\tau)\int_{\max(\tau,s)}^{x_1}g_a[\tau]\Phi(x,\tau)M_{aa}[x,p]\Phi(x,s)g_u[s]ds\right]dsd\tau, \quad (46)$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\delta u'(x)M_{ua}[x,p]\delta a(x)dx=\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{x_0}^{x}\delta u'(\tau)M_{ua}[x,p]\Phi(x,s)g_u[s]ds\right]dx. \quad (47)$$

Далее используя представление (38) получаем, что

$$\int_{x_0}^{x}Q_i(t,x,s)g_a[s]\delta a(s)ds=\int_{x_0}^{x}Q_i(t,x,s)\left[\int_{x_0}^{s}\Phi(s,\alpha)g_u[\alpha]\delta u(\alpha)d\alpha\right]ds=$$

$$=\int_{x_0}^{x}\left[\int_{s}^{x}Q_i(t,x,\alpha)\Phi(\alpha,s)d\alpha\right]g_u[s]\delta u(s)ds.$$

Если полагать

$$L(t,x,s)=R(t,x,t_0,s)+\int_{s}^{x}Q(t,x,\alpha)\Phi(\alpha,s)d\alpha$$

то из (40) получим, что

$$\delta z(t,x)=\int_{x_0}^{x}L(t,x,s)g_u[s]\delta u(s)ds. \quad (48)$$

Принимая во внимания формулу (48), получим

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\delta z'(t,x)H_{zz}[t,x,\psi]\delta z(t,x)dxdt=\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1}\delta u'(\tau)g'_u[\tau]\left[\int_{t_0}^{t_1}\int_{\max(\tau,s)}^{x_1}L'(t,x,\tau)H_{zz}[t,x,\psi]L(t,x,s)dt\right]g_u[s]dsd\tau.$$

Далее

$$\delta z'(t_1,x_1)\frac{\partial^2\varphi_1(z(t_1,x_1))}{\partial z^2}\delta z(t_1,x_1)=\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1}\delta u'(\tau)g'_u[\tau]L'(t_1,x_1,\tau)\frac{\partial^2\varphi_1(z(t_1,x_1))}{\partial z^2}L(t_1,x_1,s)g_u[s]dsd\tau.$$

Если ввести обозначения

$$K(\tau,s)=-\alpha_i(\tau)\alpha_j(s)\Phi(X_i,\tau)\frac{\partial^2\varphi_1(a(X_1),...,a(X_k))}{\partial a_i\partial a_j}\Phi(X_j,s)-L'(t_1,x_1,\tau)\frac{\partial^2\varphi_2(z(t_1,x_1))}{\partial x^2}L(t_1,x_1,\tau)+$$

$$+\int_{\max(\tau,s)}^{x_1}\Phi'(x,\tau)M_{aa}[x,p(x)]\Phi(x,s)dx+\int_{t_0}^{t_1}\int_{\max(\tau,s)}^{x_1}L'(t,x,\tau)H_{zz}[t,x,\psi]L(t,x,s)dxdt,$$

то равенство (36) примет вид(49)

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1}\delta u'(\tau)g'_u[\tau]K(\tau,s)g_u[s]dsd\tau+2\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{x_0}^{x}\delta u'(x)M_{ua}[x,p]\Phi(x,s)\delta u(s)ds\right]dx+$$
$$+\int_{x_0}^{x_1}\delta u'(x)M_{uu}[x,p]\delta u(x)dx\le 0. \qquad (49)$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 3. Для оптимальности классической экстремали $u(x)$ необходимо, чтобы неравенство (49) выполнялось для всех $\delta u(x)\in R^r$, $x\in X$.

Таким образом, доказано общее необходимое условие оптимальности второго порядка, носящий, вообще говоря, конструктивный характер. Из него в частности следует аналог условия Лежандра-Клебша.

Следствие 1. Для оптимальности

Используя неравенство (49) получим многоточечное необходимое условие оптимальности для особых, в классическом смысле, управлений.

С этой целью специальную вариацию управления $u(t)$ определим по формуле

$$\delta u_\varepsilon(x)=\sum_{i=1}^{m}\delta u(x,\varepsilon,\xi_i,\ell_i,v_i), \quad (50)$$

где $\varepsilon>0$ произвольное достаточно малое число, $\ell_i\ge 0$ произвольное число, $v_i\in R^r$ произвольный вектор, $\xi_i\in[x_0,x_1)$, $i=\overline{1,m}$ произвольные точки Лебега, управления $u(x)$ такие, что $x_0\le\xi_1\le\xi_2\le\ldots\le\xi_m<x_1$

$$\delta u(x,\varepsilon,\xi_i,\ell_i,v_i)=\begin{cases}v_i, & x\in[\xi_i,\xi_i+\ell_i\varepsilon),\\ 0, & x\in X\setminus[\xi_i,\xi_i+\ell_i\varepsilon).\end{cases} \quad (51)$$

Суммирование игольчатого типа вариации (51) определяется следующим образом:

Если $\xi_1=\xi_2$, то суммой вариаций $\delta u(x,\varepsilon,\xi_1,\ell_1,v_1)$, $\delta u(x,\varepsilon,\xi_2,\ell_2,v_2)$ понимается вариация вида

$$\sum_{i-1}^{2}\delta u(x,\varepsilon,\xi_i,\ell_i,v_i)=\begin{cases}v_1, & x\in[\xi_1,\xi_1+\ell_1\varepsilon),\\ v_2, & x\in[\xi_1+\ell_1\varepsilon,\xi_1+(\ell_1+\ell_2)\varepsilon),\\ 0, & x\in X\setminus[\xi_1+(\ell_1+\ell_2)\varepsilon,\xi_2).\end{cases}$$

Если же $\xi_1\ne\xi_2$, то суммой вариаций $\delta u(x,\varepsilon,\xi_1,\ell_1,v_1)$, $\delta u(x,\varepsilon,\xi_2,\ell_2,v_2)$ понимается вариация вида

$$\delta u_\varepsilon(x)=\begin{cases}v_1, & x\in[\xi_1,\xi_1+\ell_1\varepsilon),\\ v_2, & x\in[\xi_2,\xi_2+\ell_2\varepsilon),\\ 0, & x\in X\setminus\bigcup_{i=1}^{2}[\xi_i,\xi_i+\ell_i\varepsilon).\end{cases}$$

Введенная операция суммирования аналогичным образом рассматривается на случай любого конечного числа слагаемых.

Учитывая (50) в неравенстве (49) после некоторых преобразований получим, что

$$\xi^2\left[\sum_{i,j=1}^{m}\ell_i\ell_j v_i' g_u[\xi_i]K(\xi_i,\xi_j)g_u[\xi_j]v_j+\sum_{i=1}^{m}\ell_i v_i' M_{ua}[\xi_i,p]\ell_i g_u[\xi_i]v_i+2\sum_{j=1}^{i-1}\ell_j g_u[\xi_j]v_i\right]+o(\varepsilon^2)\le 0. \quad (52)$$

Из последнего неравенства следует

Теорема 4. Для оптимальности особого, в классическом смысле управления $u(t)$ в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы для любого натурального числа m неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{m}\ell_i\ell_j v_i' g_u[\xi_i]K(\xi_i,\xi_j)g_u[\xi_j]v_j+\sum_{i=1}^{m}\ell_i v_i' M_{ua}[\xi_i,p][\ell_i g_u[\xi_i]v_i+2\sum_{j=1}^{i-1}\ell_j g_u[\xi_j]v_i]\le 0 \quad (51)$$

выполнялось для всех $v_i \in U$ $\ell_i \ge 0$, $\xi_i \in [x_0,x_1)$, $i=\overline{1,m}$.

Неравенство (52) есть последовательность необходимых условий оптимальности особых, в классическом смысле управлений.

Непосредственным следствием теоремы 4 является

Следствие. Для особого в классическом смысле оптимального управления $u(t)$ неравенство

$$v[g_u'[\xi]K(\xi,\xi)+M_{uu}[\xi]g_u[\xi]]v\le 0 \quad (52)$$

выполняется для всех $v_i \in R^r$ и $\xi\in[x_0,x_1)$.

Теорема4 остается в силе и при вырождении необходимого условия оптимальности (52), представляющий собой аналог условия Габасова-Кирилловой, полученный в [15] для обыкновенных динамических систем методом матричных импульсов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров А.И. *Об оптимальном управлении процессами в некоторых системах с распределенными параметрами*. Автоматика и телемеханика. 1964, №5, с. 613-623.
2. Ахмедов К.Т., Ахиев С.С. *Необходимые условия оптимальности для некоторых задач теории оптимального управления*. Докл. АН Азерб. ССР. 1972, №5, с. 12-16.
3. Ащепков Л.Т., Васильев О.В. *Об оптимальности особых управлений в системах Гурса-Дарбу*. Журн. Вычисл. матем. и мат. физики. 1975, №5, с. 1157-1167.
4. Плотников В.И., Сумин В.И. *Оптимизация объектов с распределенными параметрами описываемых системами Гурса-Дарбу*. Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1972. №161. 67. с.
5. Габасов Р. *О необходимых условиях оптимальности для систем, описываемых уравнениями в частных производных*. Докл. АН БССР. 1968, №7, с. 1391-1392.
6. Гасанов К.К, *О существовании оптимальных управлений для процессов, описываемых системой гиперболических уравнений*. Журн. Вычисл. матем. и мат. физики. 1973, №3, с. 599-608.
7. Егоров А.А. *Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами и некоторые задачи теории инвариантности*. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965, т. 25, №6, с. 1205-1260.
8. Егоров А.И. *Необходимые условия оптимальности для систем с распределенными параметрами*. Матем. сб. 1966, вып. 69, №3, с. 371-421.

9. Васильев О.В. *Качественные и конструктивные методы оптимизации систем с распределенными параметрами*. Автореф. дисс. на соиск. уч. степени д-ра физ.-маи. наук. 1984, 42 с.
10. Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А. *Методы оптимизации и их приложения*. Часть 2. Оптимальное управление. Н. Наука. 1990. 151 с.
11. Габасов Р., Кириллова Ф.М. *Особые оптимальные управления*. М. Либроком. 2011. 256 с.
12. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. *Оптимальное управление.* М. Наука. 1979. 429 с.
13. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов.* М.Наука. 1983.
14. Ахиев С.С., Ахмедов К.Т. *Об интегральном представлении решений некоторых систем дифференциальных уравнений*. Изв АН Азерб. ССР. Сер. физ-.техн. и матем. наук. 1973. №2. с.116-120.
15. Габасов Р., Кириллова Ф.М. *К теории необходимых условий оптимальности высокого порядка*. Дифференц. уравнения. 1970. №4. с.665-676.

2019. Volume 3, Number 1 Pages 49-55

УДК 517.977

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧЕ НА МИНИМАКС ДЛЯ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ ГУРСА ДАРБУ

В.А. СУЛЕЙМАНОВА
Институт Систем Управления НАН Азербайджана
Сумгаитский Государственный Университет
vusale vusale 16@gmail.com, kamilbmansimov@gmail.com

АННОТАЦИЯ

Рассматривается одна граничная задача управления системами Гурса-Дарбу при с функционалом качества типа максимум. Получено необходимое условие оптимальности в форме максимина.

Ключевые слова: система Гурса-Дарбу, необходимое условие оптимальности, граничная задача управления, принцип максимина.

THE NECESSARY CONDITION OF OPTIMALITY IN THE MINIMAX PROBLEM FOR ONE BOUNDARY PROBLEM OF GURSAT- DARBOUX SYSTEM CONTROL

SUMMARY

One boundary-value problem of controlling Goursat-Darboux systems with a maximum quality functional is considered. The necessary optimality condition in the form of maximin is obtained.

Keywords: Goursat-Darboux system, necessary optimality condition, boundary control problem, maximin principle.

QURSA-DARBU SİSTEMLƏRİ İLƏ SƏRHƏD İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ ÜÇÜN MİNİMAKS MƏSƏLƏSİNDƏ OPTİMALLIQ ÜÇÜN ZƏRURİ ŞƏRT

XÜLASƏ

Maksimum tipli keyfiyyət funksionallı Qursa-Darbu sistemləri ilə sərhəd idarəetmə məsələsinə baxılır. Optimallıq üçün maksimin formasında zəruri şərt alınmışdır.

Açar sözlər: Qursa-Darbu sistemi, optimallıq üçün zəruri şərt, sərhəd idarəetmə məsələsi, maksimin prinsipi.

1. Введение. Исследование задач оптимального управления системами Гурса-Дарбу начался с работ [1, 2] и др. А.И. Егорова. В дальнейшем появились работы С.С. Ахиева и К.Т. Ахмедова [3], К.К. Гасанова [4], M.B. Suryanarayana [5], В.И. Плотникова и В.И. Сумина [6], В.И. Сумина [7], Т.К. Меликова [8], В.А. Якубовича и А.С. Матвеева [9], О.В. Васильева [10], В.А. Срочко [11], К.Б. Мансимова [12], И.В. Лисаченко и В.И. Сумина [13] и др.

Обзор соответствующих результатов имеется в работах [14-18] и др.

Предлагаемая статья посвящена выводу необходимого условия оптимальности в одной граничной задаче оптимального управления системами Гурса-Дарбу, с функционалом качества типа максимум. Подобные задачи оптимального управления называются также задачами на минимакс и являются задачами оптимального управления с негладким функционалом качества.

2. Постановка задачи оптимального управления на минимакс. Предположим, что требуется найти минимум терминального функционала

$$S(u)=\max_{y\in Y}\varphi_1(z(t_1,x_1),y)+\max_{\alpha\in A}\varphi_2(a(t_1),\alpha) \quad (1)$$

при ограничениях

$$u(t)\in U\subset R^r,\ t\in[t_0,t_1]=T, \quad (2)$$

$$z_{tx}=B(t,x)z_t+f(t,x,z,z_x),\ (t,x)\in D=T\times X=[t_0,t_1]\times[x_0,x_1], \quad (3)$$

$$\begin{aligned} z(t,x_0)&=a(t), \quad t\in T, \\ z(t_0,x)&=b(x), \quad x\in X. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь Y и A – конечные множества m и q мерных векторов y и α соответственно, t_0,t_1,x_0,x_1 – фиксированы, функции $\varphi_1(z,y)$, $\varphi_2(a,\alpha)$ – заданные скалярные функции непрерывные вместе с частными производными по z и a при всех $y\in Y,\alpha\in A$ соответственно, $B(t,x)$ – заданная измеримая и ограниченная в D – $(n\times n)$-мерная матричная функция, $f(t,x,z,z_x)$ – заданная n-мерная вектор-функция непрерывная в $D\times R^n\times R^n$ вместе с частными производными по z, z_t, $b(x)$ – заданная абсолютно непрерывная в X n-мерная вектор-функция, а $a(t)$ – абсолютно непрерывная вектор-функция, определяемая как абсолютно непрерывное решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot a&=F(t,a,u), \quad t\in T, \\ a(t_0)&=a_0, \end{aligned} \quad (5)$$

при помощи выбора r-мерной управляющей функции $u=u(t)$.

Здесь $F(t,a,u)$ – заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная в $T\times R^n\times R^\kappa$ вместе с $F_a(t,a,u)$.

Предполагается, что управляющая функция $u(t)$ измерима, ограничена и удовлетворяет ограничению

$$u(t)\in U\subset R^n,\ t\in T, \quad (6)$$

где U – заданное непустое и ограниченное множество.

Каждую управляющую функцию с вышеприведенными свойствами назовем допустимым управлением.

Предполагается, что каждому допустимому управлению $u(t)$ соответствует единственное абсолютно непрерывное решение $(a(t),z(t,x))$ краевой задачи (3)-(5).

Допустимое управление доставляющая минимум функционалу (1) при ограничениях (2)-(6) назовем оптимальным управлением. Из сделанных предположений ясно что функционал (1) является негладким.

3. Необходимое условие оптимальности в виде принципа максимина. Пусть $(u(t),a(t),z(t,x))$ есть фиксированный допустимый процесс.

Через $(\bar u(t)=u(t)+\Delta u(t),\ \bar a(t)=a(t)+\Delta a(t),\ \bar z(t,x)=z(t,x)+\Delta z(t,x))$ обозначим произвольный допустимый процесс.

Тогда приращение $(\Delta a(t),\Delta z(t,x))$ состояния $(a(t),z(t,x))$ будет удовлетворять краевой задаче

$$\Delta z_{tx} = B(t,x)\Delta z_t + f(t,x,\bar z,\bar z_x) - f(t,x,z,z_x),\ (t,x)\in D, \quad (7)$$

$$\begin{gathered} \Delta z(t,x_0) = \Delta a(t), \quad t\in T, \\ \Delta z(t_0,x) = 0, \quad x\in X, \end{gathered} \quad (8)$$

$$\Delta\dot a = F(t,\bar a,\bar u) - F(t,a,u),\ t\in T, \quad (9)$$

$$\Delta a(t_0) = 0. \quad (10)$$

$$S(u(t)+\Delta u_\varepsilon(t)) - S(u(t)) = \max_{y\in Y}[\varphi_1(z(t_1,x_1)+\Delta z(t_1,x_1,\varepsilon),y) - \varphi_1(z(t_1,x_1),y)] +$$
$$+\max_{\alpha\in A}[\varphi_2(a(t_1)+\Delta a(t_1,\varepsilon),\alpha) - \varphi_2(a(t_1),\alpha)] \ge 0.$$

В силу гладкости вектор-функции $f(t,x,z,z_x)$ $(F(t,a,u))$ по (z,z_x), (a) используя формулу Тейлора получаем, что $(\Delta a(t),\Delta z(t,x))$ является решением линеаризованной краевой задачи

$$\Delta\dot a(t) = F_a(t,a(t),u(t))\Delta a(t) + \Delta_{\bar u(t)}F(t,a(t),u(t)) + \eta_1(t;\Delta u), \quad (11)$$

$$\Delta a(t_0) = 0, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \Delta z_{tx} = B(t,x)\Delta z_t + f_z(t,x,z,z_x)\Delta z + f_{z_x}(t,x,z,z_x)\Delta z_x(t,x) + \\ + o_2(\|\Delta z\| + \|\Delta z_x\|), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{gathered} \Delta z(t,x_0) = \Delta a(t), \quad t\in T, \\ \Delta z(t_0,x) = 0, \quad x\in X. \end{gathered} \quad (14)$$

Здесь, и в дальнейшем по определению

$$\Delta_{\bar u(t)}F(t,a(t),u(t)) \equiv F(t,a(t),\bar u(t)) - F(t,a(t),u(t)),$$

$$\eta_1(t;\Delta u) = \Delta_{\bar u(t)}F_a(t,a(t),u(t))\Delta a(t) + o_1(\|\Delta a(t)\|).$$

Интерпретируя уравнения (11), (13) как линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений, на основе формул о представлении решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и линейных гиперболических дифференциальных уравнений (см. напр., [19, 20]) имеем

$$\Delta a(t) = \int_{t_0}^{t} R_1(t,\tau)\Delta_{\bar u(\tau)}F(\tau,a(\tau),u(\tau))d\tau + \eta_2(t;\Delta u), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \Delta z(t,x) = \int_{t_0}^{t} R_2(\tau,x_0;\tau,s)[\Delta\dot a(\tau) - f_{z_x}(\tau,x_0,z(\tau,x_0),z_x(\tau,x_0))\Delta a(\tau)]d\tau + \\ + \eta_3(t,x;\Delta u). \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь по определению

$$\eta_2(t;\Delta u(t)) = \int_{t_0}^{t} R_1(t,\tau)\eta_1(\tau;\Delta u(\tau))d\tau,$$

$$\eta(t,x;\Delta u)=\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}R_2(t,x;\tau,s)o_2\left(\|\Delta z(\tau,s)\|+\|\Delta z_s(\tau,s)\|\right)ds\,d\tau .$$

С учетом (16) из представления (16) получим

$$\begin{aligned}\Delta z(t,x)&=\int_{t_0}^{t}R_2(t,x;\,\tau,x_0)\big[F_a(\tau,a(\tau),u(\tau))\Delta a(\tau)+\Delta_{\bar u(\tau)}F(\tau,a(\tau),u(\tau))+\\&\quad+\eta_1(\tau;\Delta u)-f_{z_x}(t,x_0,z(\tau,x_0),z_s(\tau,x_0))\Delta a(\tau)\big]+\eta_3(t,x;\Delta u)=\\&=\int_{t_0}^{t}R(t,x;\,\tau,x_0)\big[F_a(\tau,a(\tau),u(\tau))-f_{z_x}(t,x_0,z(\tau,x_0),z_s(\tau,x_0))\big]\Delta a(\tau)\,d\tau+\\&+\int_{t_0}^{t}R_2(t,x;\,\tau,x_0)\Delta_{\bar u(\tau)}F(\tau,a(\tau),u(\tau))\,d\tau+\int_{t_0}^{t}R_2(t,x;\,\tau,x_0)\eta_1(\tau;\Delta u)\,d\tau+\\&\quad+\eta_3(t,x;\Delta u).\end{aligned}\qquad(17)$$

Из представления (15) ясно, что

$$\Delta a(\tau)=\int_{t_0}^{\tau}R_1(\tau,s)\Delta_{\bar u(s)}F(s,a(s),u(s))ds+\eta_2(\tau;\Delta u).\quad(18)$$

Следовательно, получаем, что

$$\begin{aligned}\Delta z(t,x)&=\\=\int_{t_0}^{t}\Bigg[\int_{t_0}^{\tau}&R_2(t,x;\,\tau,x_0)\big[F_a(\tau,a(\tau),u(\tau))-f_{z_x}(t,x_0,z(\tau,x_0),z_s(\tau,x_0))\big]\times\\&\times R_1(\tau,s)\Delta_{\bar u(s)}F(s,a(s),u(s))ds\Bigg]d\tau+\\+\int_{t_0}^{t}&R_2(t,x;\,\tau,x_0)\big[F_a(\tau,a(\tau),u(\tau))-f_{z_x}(t,x_0,z(\tau,x_0),z_s(\tau,x_0))\big]\eta_2(\tau;\Delta u(\tau))\,d\tau+\\+\int_{t_0}^{t}&R_2(t,x;\,\tau,x_0)\Delta_{\bar u(\tau)}F(\tau,a(\tau),u(\tau))\,d\tau+\eta_3(t,x;\Delta u).\end{aligned}\quad(19)$$

Положим

$$\begin{aligned}\eta_4(t,x;\Delta u)&=\eta_3(t,x;\Delta u)+\\+\int_{t_0}^{t}R_2(t,x;\,\tau,x_0)&\big[F_a(\tau,a(\tau),u(\tau))-f_{z_x}(t,x_0,z(\tau,x_0),z_s(\tau,x_0))\big]\eta_2(\tau;\Delta u(\tau))\,d\tau ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q(t,x,\tau)&=\\=\int_{\tau}^{t}R_2(t,x;\,s,x_0)&\big[F_a(s,a(s),u(s))-f_{z_x}(s,x_0,z(s,x_0),z_s(s,x_0))\big]R_1(\tau,s)ds+\\&+R_2(t,x;\,\tau,x).\end{aligned}$$

Тогда используя теорему Дирихле [21] представление (19) записывается в виде

$$\Delta z(t,x)=\int_{t_0}^{t}Q(t,x,\tau)\Delta_{\bar u(\tau)}F(\tau,a(\tau),u(\tau))\,d\tau+\eta_4(t,x;\Delta u).\quad(20)$$

Из представлений (15), (20) следует, что

$$\Delta a(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} R_1(t_1, t)\Delta_{\bar{u}(t)} F(t, a(t), u(t))dt + \eta_2(t_1; \Delta u), \ (21)$$

$$\Delta z(t_1, x_1) = \int_{t_0}^{t_1} Q(t_1, x;\ t)\Delta_{\bar{u}(t)} F(t, a(t), u(t))dt + \eta_4(t_1, x_1; \Delta u). \ (22)$$

Введем обозначения

$$Y_0 = \left\{y \in Y : \varphi_1(z(t_1, x_1), y) = \max_{y \in Y} \varphi_1(z(t_1, x_1), \bar{y})\right\},$$

$$A_0 = \left\{\alpha \in A : \varphi_2(a(t_1), \alpha) = \max_{\alpha \in A} \varphi_2(a(t_1), \bar{\alpha})\right\}.$$

Пусть $\theta \in [t_0, t_1)$ произвольная точка Лебега (правильная точка) (см. напр. [6,7,17]) управления $u(t)$, $v \in U$ произвольный вектор, а $\varepsilon > 0$ – достаточно малое, произвольное число такое, что $\theta + \varepsilon < t_1$. Специальное приращение допустимого управления $u(t)$ определим по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t) = \begin{cases} v - u(t), & t \in [\theta, \theta + \varepsilon), \\ 0, & t \in T \setminus [\theta, \theta + \varepsilon). \end{cases} \ (23)$$

Через $(\Delta a(t;\ \varepsilon), \Delta z(t, x;\ \varepsilon))$ обозначим специальное приращение состояния $(a(t), z(t, x))$ отвечающее приращению (23) управления $u(t)$.

Из оценок приведенные, например, в [15, 16, 17] следует, что

$$\|\Delta a(t;\ \varepsilon)\| \le L\varepsilon, \ t \in T,$$

$$\|\Delta z(t, x;\ \varepsilon)\| \le L\varepsilon, \ (t, x) \in D, (24)$$

$$\|\Delta_x z(t, x;\ \varepsilon)\| \le L\varepsilon, \ (t, x) \in D. (25)$$

С учетом этих оценок из (21), (22) получаем, что

$$\Delta a(t_1; \varepsilon) = \varepsilon\, \ell(v, \theta) + o(\varepsilon), \ (26)$$

$$\Delta z(t_1, x_1; \varepsilon) = \varepsilon\, L(v, \theta) + o(\varepsilon), \ (27)$$

где по определению

$$\ell(v, \theta) = R_1(t_1, \theta)\Delta_v F(\theta, a(\theta), u(\theta)),$$

$$L(v, \theta) = Q_1(t_1,\ x_1; \theta)\Delta_v F(\theta, a(\theta), u(\theta)).$$

В силу оценок (24)-(25) можно доказать, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\max_{y \in Y} \varphi_1(z(t_1, x_1) + \Delta z(t_1, x_1, \varepsilon), y) = \max_{y \in Y_0} \varphi_1(z(t_1, x_1) + \Delta z(t_1, x_1, \varepsilon), y),$$

$$\max_{\alpha \in A} \varphi_2(a(t_1) + \Delta a(t, \varepsilon), \alpha) = \max_{\alpha \in A_0} \varphi_2(a(t_1) + \Delta a(t, \varepsilon), \alpha).$$

Отсюда используя формулу Тейлора получим, что

$$\begin{aligned} &\Delta S_\varepsilon(u) = S(u + \Delta u_\varepsilon) - S(u) = \\ &= \varepsilon \max_{y \in Y_0} \frac{\partial \varphi_1'(z(t_1, x_1), y)}{\partial z} Q_1(t_1, x_1, \theta)\Delta_v F(\theta, a(\theta, u(\theta))) + \\ &+ \varepsilon \max_{\alpha \in A_0} \frac{\partial \varphi_2(a(t_1), \alpha)}{\partial a} R_1(t_1, \theta)\Delta_v F(\theta, a(\theta, u(\theta))) + o(\varepsilon) \end{aligned} \quad (28)$$

Предположим, что управление $u(t)$ является оптимальным. Тогда условие оптимальности в неявном виде с учетом (28) принимает следующий вид

$$\varepsilon \max_{y\in Y_0} \frac{\partial \varphi_1'(z(t_1,x_1),y)}{\partial z} Q_1(t_1,x_1,\theta)\Delta_v F(\theta,a(\theta,u(\theta)))+$$
$$+\varepsilon \max_{\alpha\in A_0} \frac{\partial \varphi_2(a(t_1),\alpha)}{\partial a} R_1(t_1,\theta)\Delta_v F(\theta,a(\theta,u(\theta)))+o(\varepsilon)\ge 0.$$

Следовательно, оптимальное управление удовлетворяет соотношению

$$\varepsilon\left(\max_{\alpha\in A_0, y\in Y_0}\left(\frac{\partial \varphi_1'(z(t_1,x_1),y)}{\partial z} Q_1(t_1,x_1,\theta)+\frac{\partial \varphi_2'(a(t_1),\alpha)}{\partial a} R_1(t_1,\theta)\right)\Delta_v F(\theta,a(\theta,u(\theta)))\right)+ \quad (29)$$
$$+o(\varepsilon)\ge 0.$$

Если ввести обозначения

$$\psi(t,y,\alpha)=-Q_1'(t_1,x_1,\theta)\frac{\partial \varphi_1(z(t_1,x_1),y)}{\partial z}-R_1'(t_1,\theta)\frac{\partial \varphi_2(a(t_1),\alpha)}{\partial a},$$

то из неравенства (29) получим, что

$$\min_{\substack{y\in Y_0\\ \alpha\in A_0}} \psi(t,y,\alpha)\Delta_v F(\theta,a(\theta,u(\theta)))\le 0. \quad (30)$$

Таким образом, доказана

Теорема. Для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в задаче на минимакс необходимо, чтобы неравенство (30) выполнялось для всех $v\in U$ и $\theta\in[t_0,t_1)$.

Замечание. Как известно (см. напр., [23]) использование серии игольчатых вариаций не усиливает принцип максимума Л.С.Понтрягина. А в задаче на минимакс использование серии игольчатых вариаций позволяют улучшить результат теоремы [12, 24].

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров А.И. *Об оптимальном управлении процессами в некоторых системах с распределенными параметрами*, Автоматика и телемеханика, 1964, № 5, с. 613-623.
2. Егоров А.И. *Необходимые условия оптимальности для систем с распределенными параметрами*, Математический сборник. 1966, т. 69, № 3, с. 371-421.
3. Ахиев С.С., Ахмедов К.Т. *Необходимые условия оптимальности для некоторых задач теории оптимального управления*, Докл. АН Азерб. ССР. 1972, № 5, с. 12-16.
4. Гасанов К.К. *О существовании оптимальных управлений для процессов, описываемых системой гиперболических уравнений*, Журн. Вычисл. Матем. и матем. физики. 1972, № 1, с. 61-72.
5. Suryanarayana M.B., *Necessary conditions for optimization problems with hyperbolic partial equations*, SIAM Journ. Control. 1973, vol. 21, № 3, pp. 130-137.
6. Плотников В.И., Сумин. *Оптимизация объектов с распределенными параметрами, описываемых системами Гурса-Дарбу*, Журнал Вычисл. мат. и мат. физики. 1972, № 1, с. 61-72.
7. Сумин В.И. *Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами*. Часть I. Н/Н. Изд-во ННГУ, 1992, 110 с.
8. Меликов Т.К. *Необходимые условия оптимальности в некоторых задачах оптимального управления*, Автореф. дисс. на соиск. уч. степени д-ра физ.-мат. наук. Баку, 2005, 42 с.
9. Якубович В.А., Матвеев А.С. *Оптимальное управление некоторыми системами с распределенными параметрами*, Сиб. матем. журн. 1978, № 5, с. 1109-1140.
10. Васильев О.В. *Качественные и конструктивные методы оптимизации систем с распределенными параметрами*, Автореф. дисс. на соиск. ученой степени д-ра физ.-мат. наук. Ленинград. 1984, 42 с.

11. Срочко В.А. *Условия оптимальности типа принципа максимума в системах Гурса-Дарбу*, Сиб. матем. журн. 1984, № 2, с. 56-65.
12. Мансимов К.Б. *К оптимальности особых, в классическом смысле, управлений в системах Гурса-Дарбу*, Докл. АН СССР. 1986, т. 286, № 4, с. 808-812.
13. Лисаченко И.В., Сумин В.И. *Принцип максимума для терминальной задачи оптимизации системы Гурса-Дарбу в классе функций с суммируемой смешанной производной*, Вестн. Удмуртск. Ун-та. Сер. Матем. Мех. Компьютерные науки. 2011, № 2, с. 52-57.
14. Меликов Т.К. *Особые в классическом смысле управления в системах Гурса-Дарбу*. Баку. Изд-во «ЭЛМ», 2003, 96 с.
15. Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А. *Методы оптимизации и их приложения*. Часть I. Новосибирск, Наука, 1990, 190 с.
16. Срочко В.А. *Вариационный принцип максимума и методы линеаризации в задачах оптимального управления*. Иркутск. Изд-во ИГУ. 1989, 160 с.
17. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. *Качественная теория оптимального управления системами Гурса-Дарбу*. Баку, ЭЛМ. 2010, 363 с.
18. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Мансимов К.Б. *Необходимые условия оптимальности второго порядка для систем с распределенными параметрами*, Препринт ИМ АН БССР. № 31(156). Минск. 1982, 32 с.
19. Габасов Р., Кириллова Ф.М. *Оптимизация линейных систем*. Минск. Изд-во БГУ, 1973, 256 с.
20. Ахиев С.С., Ахмедов К.Т. *Об интегральном представлении решений некоторых дифференциальных уравнений*, Изв. АН Азерб. Сер. физ.-техн. и матем. наук. 1973, № 2, с. 116-120.
21. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. *Оптимальное управление*. М. Наука, 1979, 750 с.
22. Альсевич В.В. *Минимизация негладких функций на множестве конечных состояний динамической системы*, Дифференц. уравнения. 1974, № 2, с. 1349-1350.
23. Габасов Р., Кириллова Ф.М, *Принцип максимума в теории оптимального управления*. М. «Либроком» 2011, 272 с.
24. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. *Основы негладкого анализа и квазидифференциального исчисления*. М. Наука, 1990.535 с.

2019. Volume 3, Number 1 Pages 56-62

УДК 517.977.56

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ ГУРСА-ДАРБУ

Ш.Ш. СУЛЕЙМАНОВА

Институт Систем Управления НАН Азербайджана

kamilbmansimov@gmail.com

АННОТАЦИЯ

Рассматривается одна задача оптимального управления с переменной структурой описываемая системой гиперболических уравнений с краевыми условиями Гурса и многоточечным критерием качества. Доказаны необходимые и достаточные условия оптимальности.

Ключевые слова: принцип максимума Л.С. Понтрягина, необходимое и достаточное условие оптимальности, выпуклый функционал, формула приращения, многоточечный функционал, точка Лебега.

NECESSARY AND SUFFISIENT OPTIMALITY CONDITIONS FOR THE ONE CONTROL PROBLEM FROM GOURSAT-DARBOUX SYSTEMS

ABSTRACT

In the paper, consider one optimal control problem the chance structures described system hyperbolic equations Goursat boundary conditions and multipoint functional. Necessary and sufficient optimality conditions are provider.

Keywords: of the L.S. Pontryagins maximum principle, necessary and sufficient optimality condition, convex functional, increment formula, multipoint functional, Lebesgue point.

QURSA-DARBU SİSTEMLƏRİ İLƏ BİR İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ OPTİMALLIQ ÜÇÜN ZƏRURİ VƏ KAFİ ŞƏRTLƏR

XÜLASƏ

Çoxnöqtəli keyfiyyət meyarlı, Qursa sərhəd şərti və hiperbolik tənliklər sistemi ilə təsvir olunan, bir dəyişən strukturlu optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Optimallığın zəruri və kafi şərtləri isbat olunur.

Açar sözlər: L.S. Pontryaginin maksimum prinsipi, optimallıq üçün zəruri və kafi şərtlər, qabarıq funksional, artım düsturu, çoxnöqtəli funksional, Lebeq nöqtəsi.

1.**Введение.** В работах [1-6] и др. изучены различные аспекты задач оптимального управления описываемые гиперболическими уравнениями с краевыми условиями Гурса. Но многие процессы носят многоэтапный характер, т.е. являются процессами с переменной структурой (см. напр. [7-10]). Поэтому возникает необходимость исследования на оптимальность подобных задач оптимального управления. В предлагаемой работе рассматривается одна задача оптимального управления с переменной структурой описываемая системой Гурса-Дарбу с многоточечным функционалом качества. В линейном случае доказано необходимое и достаточное условие оптимальности в типа принципа максимума Понтрягина. В случае нелинейного, но выпуклого функционала качества установлено достаточное условие оптимальности.

2.Постановка задачи. Рассмотрим управляемый процесс описываемый системой линейных неоднородных гиперболических уравнений

$$z_{tx} = A_1(t,x)z + B_1(t,x)z_t + C_1(t,x)z_x + f_1(t,x,v),\ \ (t,x) \in D_1 = [t_0,t_1]\times[x_0,x_1], \quad (1)$$

$$y_{tx}=A_2(t,x)y+B_2(t,x)y_t+C_2(t,x)y_x+f_2(t,x,u),\ (t,x)\in D_2=[t_1,t_2]\times[x_0,x_1], \quad (2)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} z(t_0,x)&=a(x), \quad x\in X=[x_0,x_1],\\ z(t,x_0)&=b_1(t), \quad t\in T=[t_0,t_1], \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} y(t_1,x)&=D\,z(t_1,x), \quad x\in X=[x_0,x_1],\\ y(t,x_0)&=b_2(t), \quad t\in T=[t_1,t_2], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(x_0)&=b_1(t_0),\\ D\,z(t_1,x_0)&=b_2(t_1). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $A_i(t,x)$, $B_i(t,x)$, $C_i(t,x)$, $i=1,2$ – заданные $(n\times n)$ мерные измеримые и ограниченные n-мерные вектор-функции, $f_1(t,x,u)$, $f_2(t,x,v)$ – заданные непрерывные по совокупности переменных n-мерные вектор-функции, $a(x)$, $b_1(t)$, $b_2(t)$ – заданные абсолютно-непрерывные n-мерные вектор-функции, D – заданный $(n\times n)$ постоянный матриц, $u(t,x)$, $v(t,x)$ – измеримые и ограниченные r и q-мерные соответственно вектор-функции управляющих воздействий удовлетворяющие геометрическим ограничениям

$$\begin{aligned} u(t,x)&\in U\subset R^r, \quad (t,x)\in D_1,\\ v(t,x)&\in V\subset R^q, \quad (t,x)\in D_2, \end{aligned} \quad (5)$$

где U и V – заданные непустые и ограниченные множества.

Пару $(u(t,x),v(t,x))$ с вышеприведенными свойствами назовем допустимым управлением.

Предполагается, что каждому допустимому управлению $(u(t,x),v(t,x))$ соответствует единственное абсолютно-непрерывное (в смысле например [2, 3, 6]) решение $(z(t,x),y(t,x))$ краевой задачи (1), (2), (3), (4).

Задача заключается в нахождении минимального значения функционала

Задача заключается в нахождении минимального значения многоточечного функционала

$$S(u,v)=\sum_{i=1}^{k}c_i'\,z(T_i,X_i)+\sum_{i=1}^{k}d_i'\,y(\theta_i,\xi_i), \quad (6)$$

при ограничениях (1)-(5).

Здесь c_i, d_i, $i=\overline{1,k}$ заданные постоянные векторы соответствующих размерностей , а (T_i,X_i) $(t_0<T_1<T_2<\ldots<T_k\le t_1,\ \ x_0<X_1<X_2<\ldots<X_k\le x_1)$, $i=\overline{1,k}$, (θ_i,ξ_i) $(t_1<\theta_1<\theta_2<\ldots<\theta_k\le t_2,\ \ x_0<\xi_1<\xi_2<\ldots<\xi_k\le x_1)$ заданные точки.

Допустимое управление $(u^o(t,x),v^o(t,x))$ доставляющий минимум функционалу (6) при ограничениях (1)-(5) назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u^o(t,x),v^o(t,x),z^o(t,x),y^o(t,x))$ – оптимальным процессом.

Как видно рассматриваемая задача оптимального управления является линейной. Применяя метод приращения докажем необходимое и достаточное условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина [11].

3. Необходимое и достаточное условие оптимальности.

Пусть $\left(u^o(t,x), v^o(t,x), z^o(t,x), y^o(t,x)\right)$ – фиксированный, а $\left(\bar{u}(t,x)=u^o(t,x)+\Delta u(t,x),\right.$ $\left.\bar{v}(t,x)=v^o(t,x)+\Delta v(t,x), \bar{z}(t,x)=z^o(t,x)+\Delta z(t,x), \bar{y}(t,x)=y^o(t,x)+\Delta y(t,x)\right)$ – произвольный-допустимые процессы. Тогда ясно, что приращение функционала (6) может быть записано в виде

$$\Delta S(u^o,v^o)=S(\bar{u},\bar{v})-S(u^o,v^o)=\sum_{i=1}^{k}c_i'\Delta z(T_i,X_i)+\sum_{i=1}^{k}d_i'\Delta y(\theta_i,\xi_i), \quad (7)$$

а приращение $\left(\Delta z(t,x), \Delta y(t,x)\right)$ состояния $\left(z^o(t,x), y^o(t,x)\right)$ будет решением краевой задачи

$$\begin{aligned}\Delta z_{tx}(t,x)&=A_1(t,x)\Delta z(t,x)+B_1(t,x)\Delta z_t(t,x)+C_1(t,x)\Delta z_x(t,x)+\\&+\left(f_1(t,x,\bar{u}(t,x))-f_1(t,x,u^o(t,x))\right), \quad (t,x)\in D_1,\end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}&\Delta z(t_0,x)=0, \quad x\in[x_0,x_1],\\&\Delta z(t,x_0)=0, \quad t\in[t_0,t_1],\end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}\Delta y_{tx}(t,x)&=A_2(t,x)\Delta y(t,x)+B_2(t,x)\Delta y_t(t,x)+C_2(t,x)\Delta y_x(t,x)+\\&+\left(f_2(t,x,\bar{v}(t,x))-f_2(t,x,v^o(t,x))\right), \quad (t,x)\in D_2,\end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}&\Delta y(t_1,x)=D\Delta z(t_1,x), \quad x\in[x_0,x_1],\\&\Delta y(t,x_0)=0, \quad t\in[t_1,t_2].\end{aligned} \quad (11)$$

Считая $\psi_1^o(t,x)$, $\psi_2^o(t,x)$ пока произвольными n-мерными вектор-функциями из (8)-(10) получим

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi_1^{o'}(t,x)\Delta z_{tx}(t,x)dx\,dt&=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi_1^{o'}(t,x)A_1(t,x)\Delta z(t,x)dx\,dt+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi_1^{o'}(t,x)B_1(t,x)\Delta z_t(t,x)dx\,dt+\\&+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi_1^{o'}(t,x)C_1(t,x)\Delta z_x(t,x)dx\,dt+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi_1^{o'}(t,x)\left(f_1(t,x,\bar{u}(t,x))-f_1(t,x,u^o(t,x))\right)dx\,dt,\end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\psi_2^{o'}(t,x)\Delta y_{tx}(t,x)dx\,dt&=\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\psi_2^{o'}(t,x)A_2(t,x)\Delta y(t,x)dx\,dt+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\psi_2^{o'}(t,x)B_2(t,x)\Delta y_t(t,x)dx\,dt+\\&+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\psi_2^{o'}(t,x)C_2(t,x)\Delta y_x(t,x)dx\,dt+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\psi_2^{o'}(t,x)\left(f_2(t,x,\bar{v}(t,x))-f_2(t,x,v^o(t,x))\right)dx\,dt.\end{aligned} \quad (13)$$

В силу краевых условий (9), (11) ясно, что

$$\Delta z(t,x)=\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\Delta z_{\tau s}(\tau,s)ds\,d\tau, \quad (14)$$

$$\Delta y(t,x)=D\Delta z(t_1,x)+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\Delta y_{\tau s}(\tau,s)ds\,d\tau. \quad (15)$$

В силу (14), (15) из (12), (13) получим, что

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi_1^{o'}(t,x)\Delta z_{tx}(t,x)dx\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_t^{t_1}\int_x^{x_1}\psi_1^{o'}(\tau,s)A_1(\tau,s)ds\,d\tau\right]\Delta z_{tx}(t,x)dx\,dt+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_x^{x_1}\psi_1^{o'}(t,s)B_1(t,s)ds\right]\Delta z_{tx}(t,x)dx\,dt+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_t^{t_1}\psi_1^{o'}(\tau,x)C_1(\tau,x)d\tau\right]\Delta z_{tx}(t,x)dx\,dt+ \quad (16)$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi_1^{o'}(t,x)\left(f_1(t,x,\bar u(t,x))-f_1(t,x,u^o(t,x))\right)dx\,dt,$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\psi_2^{o'}(t,x)\Delta y_{tx}(t,x)dx\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\psi_2^{o'}(t,x)A_2(t,x)D\,\Delta z(t_1,x)dx\,dt+$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_t^{t_2}\int_x^{x_2}\psi_2^{o'}(\tau,s)A_2(\tau,s)ds\,d\tau\right]\Delta y_{tx}(t,x)dx\,dt+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_x^{x_1}\psi_2^{o'}(t,s)B_2(t,s)ds\right]\Delta y_{tx}(t,x)dx\,dt+ \quad (17)$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\psi_2^{o'}(t,x)C_2(t,x)D\,\Delta z_x(t_1,x)dx\,dt+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_t^{t_2}\psi_2^{o'}(\tau,x)C_2(\tau,x)d\tau\right]\Delta y_{tx}(t,x)dx\,dt+$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\psi_2^{o'}(t,x)\left(f_2(t,x,\bar v(t,x))-f_2(t,x,v^o(t,x))\right)dx\,dt=$$
$$=\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\psi_2^{o'}(t,x)A_2(t,x)D\left[\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x}\Delta z_{\tau s}(\tau,s)ds\,d\tau\right]dx\,dt+$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_t^{t_2}\int_x^{x_2}\psi_2^{o'}(\tau,s)A_2(\tau,s)ds\,d\tau\right]\Delta y_{tx}(t,x)dx\,dt+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_x^{x_1}\psi_2^{o'}(t,s)B_2(t,s)ds\right]\Delta y_{tx}(t,x)dx\,dt+$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\psi_2^{o'}(t,x)C_2(t,x)D\left[\int_{t_0}^{t_1}\Delta z_{\tau x}(\tau,x)d\tau\right]dx\,dt+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_t^{t_2}\psi_2^{o'}(\tau,x)C_2(\tau,x)d\tau\right]\Delta y_{tx}(t,x)dx\,dt+$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\psi_2^{o'}(t,x)\left(f_2(t,x,\bar v(t,x))-f_2(t,x,v^o(t,x))\right)dx\,dt.$$

Далее ясно, что если через $\alpha_i(t,x)$ обозначать характеристическую функцию, области $[t_0,T_i]\times[x_0,X_i]$, а через $\beta_i(t,x)$ характеристическую функцию области $[t_1,\theta_i]\times[x_0,\xi_i]$, то можно записать, что

$$\Delta z(T_i,X_i)=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\alpha_i(t,x)\Delta z_{tx}(t,x)dx\,dt, \quad (18)$$

$$\Delta y(\theta_i,\xi_i)=D\,\Delta z(t_1,\xi_i)+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\beta_i(t,x)\Delta y_{tx}(t,x)dx\,dt. \quad (19)$$

Пусть $\gamma_i(x)$ является характеристической функций отрезка $[x_0,\xi_i]$. Тогда получаем, что

$$\Delta y(\theta_i,\xi_i)=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}D\gamma_i(x)\Delta z_{tx}(t,x)dx\,dt+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\beta_i(t,x)\Delta y_{tx}(t,x)dx\,dt. \quad (20)$$

Поэтому получаем, что

$$\sum_{i=1}^{k}c_i'\,\Delta z(T_i,X_i)=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(t,x)c_i'\,\Delta z_{tx}(t,x)dx\,dt,$$

$$\sum_{i=1}^{k} d_i' \,\Delta y(\theta_i,\xi_i) = \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^{k} \gamma_i(x) d_i' \,\Delta z_{tx}(t,x)\,dx\,dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1} \beta_i(t,x)\Delta y_{tx}(t,x)\,dx\,dt \,. \quad (21\,)$$

Принимая во внимания тождества (16)-(21) в формуле приращения (7) и введя обозначения

$$H_1(t,x,u,\psi_1^o) = \psi_1^{o'} \cdot f(t,x,u),$$

$$H_2(t,x,v,\psi_2^o) = \psi_2^{o'} \cdot g(t,x,u),$$

получаем, что

$$\begin{aligned}
\Delta S(u^o,v^o) &= \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(t,x)c_i'\,\Delta z_{tx}(t,x)\,dx\,dt + \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\sum_{i=1}^{k}\gamma_i(x)d_i'\,\Delta z_{tx}(t,x)\,dx\,dt + \\
&+ \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\beta_i(t,x)\Delta y_{tx}(t,x)\,dx\,dt + \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{t}^{t_1}\int_{x}^{x_1}\psi_1^{o'}(\tau,s)A_1(\tau,s)\,ds\,d\tau\right]\Delta z_{tx}(t,x)\,dx\,dt + \qquad (22)\\
&+ \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{x}^{x_1}\psi_1^{o'}(t,s)B_1(t,s)\,ds\right]\Delta z_{tx}(t,x)\,dx\,dt + \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{t}^{t_1}\psi_1^{o'}(\tau,x)C_1(\tau,x)\,d\tau\right]\Delta z_{tx}(t,x)\,dx\,dt - \\
&+ \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\psi_2^{o'}(t,x)\Delta y_{tx}(t,x)\,dx\,dt - \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{t}^{t_2}\int_{x}^{x_2}\psi_2^{o'}(\tau,s)A_2(\tau,s)\,ds\,d\tau\right]\Delta y_{tx}(t,x)\,dx\,dt - \\
&- \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{x}^{x_1}\psi_2^{o'}(t,s)B_2(t,s)\,ds\right]\Delta y_{tx}(t,x)\,dx\,dt - \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{t}^{t_2}\psi_2^{o'}(\tau,x)C_2(\tau,x)\,d\tau\right]\Delta y_{tx}(t,x)\,dx\,dt - \\
&- \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(H_1(t,x,\bar u(t,x),\psi_1^o(t,x)) - H_1(t,x,u^o(t,x),\psi_1^o(t,x))\right)dx\,dt - \\
&- \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\left(H_2(t,x,\bar v(t,x),\psi_2^o(t,x)) - H_2(t,x,v^o(t,x),\psi_2^o(t,x))\right)dx\,dt.
\end{aligned}$$

Предположим, что вектор-функции $\psi_1^o(t,x)$ и $\psi_2^o(t,x)$ удовлетворяют соотношениям (являются решениями следующих интегральных уравнений типа Вольтерра)

$$\begin{aligned}
\psi_1^o(t,x) &= \sum_{i=1}^{k}\alpha_i(t,x)c_i' + \sum_{i=1}^{k}\beta_i(x)d_i + \int_{t}^{t_1}\int_{x}^{x_1}A_1'(\tau,s)\psi_1^o(\tau,s)\,ds\,d\tau + \int_{x}^{x_1}B_1'(t,s)\psi_1^o(t,s)\,ds + \qquad (23)\\
&+ \int_{t}^{t_1}C_1'(\tau,x)\psi_1^o(\tau,x)\,d\tau,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_2^o(t,x) &= \sum_{i=1}^{k}\beta_i(t,x)d_i + \int_{t}^{t_2}\int_{x}^{x_1}A_2'(\tau,s)\psi_2^o(\tau,s)\,ds\,d\tau + \int_{x}^{x_1}B_2'(t,s)\psi_2^o(t,s)\,ds + \qquad (24)\\
&+ \int_{t}^{t_2}C_2'(\tau,x)\psi_2^o(\tau,x)\,d\tau,
\end{aligned}$$

уравнения (23), (24) назовем сопряженной системой в рассматриваемой задаче.

Интегральные уравнения (23), (24) являются линейными уравнениями и будут иметь при сделанных предположениях единственное решение в классе измеримых и ограниченных функции.

Если $\psi_i^o(t,x)$, $i=1,2$ являются решениями сопряженных уравнений, то формула приращения (22) принимает следующий окончательный вид:

$$\Delta S(u^o,v^o)=-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(H_1(t,x,\bar{u}(t,x),\psi_1^o(t,x))-H_1(t,x,u^o(t,x),\psi_1^o(t,x))\right)dx\,dt- \tag{25}$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\left(H_2(t,x,\bar{v}(t,x),\psi_2^o(t,x))-H_2(t,x,v^o(t,x),\psi_2^o(t,x))\right)dx\,dt.$$

Построенная формула приращения позволяет доказать (используя игольчатого типа вариацию управления) необходимое и достаточное условие оптимальности в форме принципа максимума Л.С. Понтрягина.

Теорема 1. Для оптимальности допустимого управления $(u^o(t,x),v^o(t,x))$ необходимо и достаточно, чтобы соотношения

$$\max_{u\in U} H_1(\theta,\xi,u,\psi_1^o(\theta,\xi))=H_1(\theta,\xi,u^o(\theta,\xi),\psi_1^o(\theta,\xi)),$$
$$\max_{v\in V} H_2(\theta,\xi,v,\psi_2^o(\theta,\xi))=H_2(\theta,\xi,v^o(\theta,\xi),\psi_2^o(\theta,\xi)),$$

выполнялись для всех $(\theta,\xi)\in[t_0,t_1]\times[x_0,x_1]$ и $(\theta,\xi)\in[t_1,t_2]\times[x_0,x_1]$ соответственно.

Здесь $(\theta,\xi)\in[t_0,t_1]\times[x_0,x_1]$ $((\theta,\xi)\in[t_1,t_2]\times[x_0,x_1])$ произвольная точка Лебега (правильная точка [1-3]) управления $u^o(t,x)$ $(v^o(t,x))$.

4. Случай нелинейного функционала качества. Рассмотрим случай нелинейного многоточечного функционала.

Пусть требуется минимизировать значение функционала

$$S(u,v)=\varphi_1(z(T_1),\dots,z(T_k))+\varphi_2(y(\theta_1,\xi_1),\dots,y(\theta_k,\xi_k)), \tag{26}$$

при ограничениях (1) -(5) при предположении, что функции $\varphi_1(z_1,\dots,z_k)$, $\varphi_2(y_1,\dots,y_k)$ заданные непрерывно дифференцируемые выпуклые скалярные функции.

Пусть $(u^o(t,x),v^o(t,x),z^o(t,x),y^o(t,x))$ фиксированный допустимый процесс, а $(\bar{u}(t,x)=u^o(t,x)+\Delta u(t,x),\bar{v}(t,x)=v^o(t,x)+\Delta v(t,x),\bar{z}(t,x)=z^o(t,x)+\Delta z(t,x),\bar{y}(t,x)=y^o(t,x)+$ $+\Delta y(t,x))$ произвольный допустимый процесс.

По аналогии введем аналогии функций Гамильтона-Понтрягина

$$M_1(t,x,u,p_1^o)=p_1^{o'}\cdot f_1(t,x,u),$$
$$M_2(t,x,v,p_2^o)=p_2^{o'}\cdot f_2(t,x,u),$$

где, $p_2^o(t,x)$ n-мерные вектор-функции являющихся решениями интегральных уравнений (сопряженная система).

Тогда используя формулу Тейлора по аналогии с доказательством формулы (25) доказывается, что

$$\Delta S(u^o,v^o)=-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(M_1(t,x,\bar{u}(t,x),p_1^o(t,x))-M_1(t,x,u^o(t,x),p_1^o(t,x))\right)dx\,dt- \tag{27}$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\left(M_2(t,x,\bar{v}(t,x),\psi_2^o(t,x))-M_2(t,x,v^o(t,x),\psi_2^o(t,x))\right)dx\,dt+\sum_{i=1}^{2}o_1(\|\Delta z(T_i,X_i)\|)+$$
$$+\sum_{i=1}^{k}o_2(\|\Delta z(\theta_i,\xi_i)\|).$$

Пусть допустимое управление $(u^o(t,x),v^o(t,x))$ удовлетворяет условию максимума, т.е.

$$\max_{u \in U} M_1\left(\theta, \xi, u, p_1^o(\theta, \xi)\right) = M_1\left(\theta, \xi, u^o(\theta, \xi), p_1^o(\theta, \xi)\right), \quad (28)$$

для всех $(\theta, \xi) \in [t_0, t_1] \times [x_0, x_1]$,

$$\max_{v \in V} M_2\left(\theta, \xi, v, p_2^o(\theta, \xi)\right) = M_2\left(\theta, \xi, v^o(\theta, \xi), p_2^o(\theta, \xi)\right), \quad (29)$$

для всех $(\theta, \xi) \in [t_1, t_2] \times [x_0, x_1]$.

Поскольку, по предположению функции $\varphi_1(z_1, ..., z_k)$, $\varphi_2(y_1, ..., y_k)$ выпуклые функции, то из (27) с учетом (28),(29) в силу известного свойства выпуклых функций следует, что

$$\Delta S(u^o, v^o) \geq -\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \left(M_1\left(t, x, \bar{u}(t, x), p_1^o(t, x)\right) - M_1\left(t, x, u^o(t, x), p_1^o(t, x)\right)\right) dx\, dt -$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1} \left(M_2\left(t, x, \bar{v}(t, x), \psi_2^o(t, x)\right) - M_2\left(t, x, v^o(t, x), \psi_2^o(t, x)\right)\right) dx\, dt.$$

Отсюда, принимая во внимания (27), (28) получаем, что

$$S(u^o + \Delta u, v^o + \Delta u) - S(u^o, v^o) \geq 0.$$

Следовательно, имеет место

Теорема 2. Если функции $\varphi_1(z_1, ..., z_k)$, $\varphi_2(y_1, ..., y_k)$ непрерывно дифференцируемы и выпуклы, то для оптимальности допустимого управления $\left(u^o(t, x), v^o(t, x)\right)$ в задаче (1)-(5), (26) достаточно, чтобы выполнялось условие максимума (28), (29).

Таким образом, выделен класс задач, для которых принцип максимума Понтрягина является достаточным условием оптимальности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров А.И. *Об оптимальном управлении процессами в некоторых системах с распределенными параметрами.* Автоматика и телемеханика. 1964, № 5, С. 613-623.
2. Ахмедов К.Т., Ахиев С.С. *Необходимые условия оптимальности для некоторых задач теории оптимального управления*. Докл. АН Азерб. ССР. 1972, № 5, С. 12-16.
3. Плотников В.И., Сумин В.И. *Оптимизация объектов с распределенными параметрами, описываемые системами Гурса-Дарбу*. Журн. Вычисл. мат. и мат. физики. 1972, № 1, С. 61-67.
4. Срочко В.А. *Условие оптимальности типа принципа максимума в системах Гурса-Дарбу*. Сиб. Матем.журнал. 1984, № 2, С. 56-65.
5. Мансимов К.Б. *Об одной схеме исследования особого случая в системах Гурса-Дарбу.* Изв. АН Азерб. ССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук, 1981, № 2, С. 100-104.
6. Новоженов М.М., Сумин В.И. *Методы оптимального управления уравнениями математической физики.* Горький. Изд-во ГТУ, 1986, 87 с.
7. Никольский М.С. *Об одной вариационной задаче с переменной структурой.* Вестник МГУ. Сер. Выч. мат. и кибернетика.1987. №1. С.31-41.
8. Розова В.Н. *Оптимальное управление ступенчатыми системами с неинтегральным функционалом*. Вестник РУДН. Серия. Прикладная и компьютерная математика. 2002. №1 (1). С. 31-36.
9. Тадумадзе Т.А. Авалишвили Н.М. *Регулярные возмущения в оптимальных задачах с переменной структурой*. В сб. Оптимальные задачи в системах с переменной структурой. Тбилиси. Изд-во ТГУ. 1985. С. 100-154.
10. Захаров Г.К. *Оптимизация ступенчатых систем с управляемыми условиями перехода*. Автоматика и телемеханика. 1993. №6. С. 32-36.
11. Понтрягин Л.С. и др. *Математическая теория оптимальных процессов*. М. Наука, 1986. 384 с.

JOURNAL OF BAKU ENGINEERING UNIVERSITY- MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
2019. Volume 3, Number 1 *Pages 63-68*

UDC 517.95 ; 517.9

HOLOMORPHIC MANIFOLDS WITH DEFORMED LIFTS OF RIEMANNIAN METRICS

Sevil KAZIMOVA
Baku State University, Department "Algebra and Geometry"
AZ 1148, Baku, Azerbaijan
sevilkazimova@hotmail.com

ABSTRACT

In some aspects a holomorphic anti-Hermitian manifolds are similar to Kähler manifolds, i.e. there exists a one-to-one correspondence between algebraic anti-Kähler manifolds and anti-Hermitian manifolds with a holomorphic Riemannian metric. In this paper we consider manifolds with an algebraic structure which is an isomorphic representation of the dual algebra. The main aim of the present article is to study the holomorphic pure Riemannian metrics according to the dual algebraic structure in the tangent bundle. We proved that a real modelling of dual-holomorphic Riemannian metric is a deformed complete lift of Riemannian metric from manifold to its tangent bundle. We also proved that the tangent bundle with a deformed complete lift of Riemannian metric and the natural dual structure is a dual-holomorphic Riemannian manifold.

Keywords: Dual algebra; holomorphic function; pure metric; tangent bundle

RIMAN METRIKALARININ DEFORMASIYA OLUNMUŞ LIFTLƏRI OLAN HOLOMORF ÇOXOBRAZLILAR

XÜLASƏ

Bəzi xüsusiyyətlərinə görə holomorf anti-Hermit çoxobrazlıları Kahler çoxobrazlılarına bənzəyir, yəni holomorfik Riman metrikalı anti-Hermit çoxobrazlısı ilə cəbri anti-Kahler çoxobrazlısı arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq vardır. Bu məqalədə dual cəbri izomorf təsviri olan cəbri struktura malik çoxobrazlıya baxılır. Məqalənin əsas məqsədi toxunan laylanmada holomorf təmiz Riman metrikasını dual cəbri struktura nəzərən öyrənməkdən ibarətdir. İsbat olunmuşdur ki,dual holomorf Riman metrikasının həqiqi modeli Riman metrikasının çoxobrazlıdan onun toxunan laylanmasına deformasiya olunmuş tam liftidir. Həmçinin isbat edilmişdir ki, Riman metrikasının deformasiya olunmuş tam liftinə və təbii dual strukturasına malik toxunan laylanma dual holomorf Riman çoxobrazlısıdır.

Açar sözlər. Dual cəbr, holomorf funksiya, təmiz metrika, toxunan laylanma.

ГОЛОМОРФНЫЕ МНОГО ОБРАЗИЯ СДЕФОРМИРОВАННЫМЛИФТОМ РИМАНОВОЙ МЕТРИКИ

РЕЗЮМЕ

В некоторых аспектах голоморфные анти-Эрмитовы многообразия аналогичны Кэлеровым многообразиям, т.е. существует взаимно однозначное соответствие между алгебраическими анти-Келеровыми многообразиями и анти-Эрмитовыми многообразиями с голоморфной Римановой метрикой. В этой статье мы рассматриваем многобразия с алгебраической структурой, которая является изоморфным представлением дуальной алгебры. Основной целью настоящей статьи является изучение голоморфных чисто римановых метрик в относительнодуальной алгебраической структуры в касательном расслоении. Мы доказали, что реальное моделирование дуально-голоморфной Римановой метрики является деформированным полным лифтом Римановой метрики с многообразия в его касательное расслоение. Мы также доказали, что касательное расслоение с деформированным полным лифтом Римановой метрики и естественной дуальной структурой является дуально-голоморфным Римановым многообразием.

Ключевые слова: дуальная алгебра; голоморфная функция; чистая метрика; касательная расслоения.

Mathematıcs Subject Classifications: 53C25; 57R22

1. Introduction

Our goal is to study Riemannian holomorphic manifolds over dual algebras. The main tool of this investigation is the operator introduced by Tachibana [6]. In the later years Yano and Ako [8] considered similar operators in the invariant form. Also Shirokov [5], Kruchkovich [1], Salimovand Aslanci [2] developed the theory of Tachibana operators associated with a commutative structure.

1.1 We consider a 2-dimensional dual algebra $\mathbb{R}(\varepsilon)$, $\varepsilon^2 = 0$ (ε is nilpotent) with a standard basis $\{e_1, e_2\} = \{1, \varepsilon\}$ and structural constants $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$: $e_\alpha e_\beta = C^{\gamma}_{\alpha\beta} e_\gamma$, $\alpha, \beta, \gamma = 1,2$, where $C^1_{11} = C^2_{12} = C^2_{21} = 1$, $C^1_{12} = C^1_{21} = C^1_{22} = C^2_{11} = C^2_{22} = 0$ are components of the (1,2)-tensor $C : \mathbb{R}(\varepsilon) \times \mathbb{R}(\varepsilon) \to \mathbb{R}(\varepsilon)$.

Let $Z = x^\alpha e_\alpha$ be a variable in $\mathbb{R}(\varepsilon)$, where x^α $(\alpha = 1,2)$ are real variables. Using a real-valued C^∞-functions $f^\beta(x) = f^\beta(x^1, x^2)$, $\beta = 1,2$, we introduce a dual function $F = f^\beta(x) e_\beta$ of variable $Z \in \mathbb{R}(\varepsilon)$. Let $dZ = dx^\alpha e_\alpha$ and $dF = df^\alpha e_\alpha$ be respectively the differentials of Z and $F(Z)$. We shall say that the function $F = F(Z)$ is a dual-holomorphic function if there exists a new dual function $F'(Z)$ such that $dF = F'(Z) dZ$. The function $F'(Z)$ is called the derivative of $F(Z)$. It is well known that the dual function $F = F(Z)$ is holomorphic if and only if the following Scheffers condition hold [1,4]:

$C_2 D = D C_2$, (1)

where $D = \left(\dfrac{\partial f^\alpha}{\partial x^\beta} \right)$ is the Jacobian matrix of $f^\alpha(x)$, $C_2 = (C^\gamma_{2\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, γ and β denotes the row and column numbers of matrix C_2, respectively. The condition (1) reduces to the following equations:

$$\frac{\partial f^1}{\partial x^2} = 0, \ \frac{\partial f^2}{\partial x^2} = \frac{\partial f^1}{\partial x^1}.$$

From here follows that the dual-holomorphic function $F = F(Z)$ has the following explicit form:

$$F(Z) = f(x^1) + \varepsilon (x^2 f'(x^1) + g(x^1)),$$

where $f(x^1) = f^1(x^1)$, $f'(x^1) = \dfrac{df}{dx^1}$ and $g = g(x^1)$ is any real C^∞-function.

By similar devices, we see that the dual-holomorphic multi-variable function $F = F(Z^1, ..., Z^n)$, $Z^i = x^i + \varepsilon x^{n+i}$, $i = 1, ..., n$ has the form:

$$F(Z^1, ..., Z^n) = f(x^1, ..., x^n) + \varepsilon (x^{n+s} \partial_s f + g(x^1, ..., x^n)), \ (2)$$

where $g = g(x^1, ..., x^n)$ is any real multi-variable C^∞-function, $\partial_s f = \dfrac{\partial f}{\partial x^s}$.

A dual-holomorphic manifold [7] $X_n(\mathbb{R}(\varepsilon))$ of dimension n is a Hausdorff space with a fixed complete atlas compatible with a group of $\mathbb{R}(\varepsilon)$-holomorphic transformations of space $\mathbb{R}^n(\varepsilon)$, where $\mathbb{R}^n(\varepsilon) = \mathbb{R}(\varepsilon) \times \cdots \times \mathbb{R}(\varepsilon)$ is the space of n-tupes of dual numbers $(z^1, z^2, ..., z^n)$ with $z^i = x^i + \varepsilon y^i \in \mathbb{R}(\varepsilon)$, $x^i, y^i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$. We shall identity $\mathbb{R}^n(\varepsilon)$ with $\mathbb{R}^{2n}$, when necessary, by mapping $(z^1, z^2, ..., z^n) \in \mathbb{R}^n(\varepsilon)$ into $(x^1, ..., x^n, y^1, ..., y^n) \in \mathbb{R}^{2n}$ and therefore the $\mathbb{R}(\varepsilon)$-holomorphic manifold $X_n(\mathbb{R}(\varepsilon))$ is a real manifold M_{2n} of dimension $2n$.

1.2 Let now M_n be a differentiable manifold and $T(M_n)$ its tangent bundle, and π the projection $T(M_n)\to M_n$. The tangent bundle $T(M_n)$ consist of pair (x,v), where $x\in M_n$ and $v\in T_x(M_n)$ ($T_x(M_n)$ is a tangent vector space at $x\in M_n$). Let $(U,\ x=(x^1,\dots,x^n))$ be a coordinate chart in M_n. Then it induces local coordinates $(x^1,\dots,x^n,x^{n+1},\dots,x^{2n})$ in $\pi^{-1}(U)$, where $x^{n+1},\dots,x^{2n}$ represent the components of $v\in T_x(M_n)$ with respect to local frame $\{\partial_i\}$. In the following we use the notation $\bar{i}=i+n$ for all $i=1,\dots,n$.

If $(U',\ x'=(x^{1'},\dots,x^{n'}))$ is another coordinate chart in M_n, then the induced coordinates $(x^{1'},\dots,x^{n'},x^{\bar{1}'},\dots,x^{\bar{n}'})$ in $\pi^{-1}(U')$, will be given by

$$\begin{cases} x^{i'}=x^{i'}(x^i), & i=1,\dots,n,\\ x^{\bar{i}'}=\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}x^{\bar{i}}, & \bar{i}=n+1,\dots,2n. \end{cases} \quad (3)$$

The Jacobian of (3) is given by matrix

$$S=\left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\right)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} & 0\\ x^{\bar{s}}\dfrac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i\partial x^s} & \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\end{pmatrix},\ \alpha=1,\dots,2n.$$

From here follows that there exist a tensor field of type (1,1)

$$\varphi=\left(\varphi^{\alpha}_{\beta}\right)=\begin{pmatrix}\varphi^i_j & \varphi^i_{\bar{j}}\\ \varphi^{\bar{i}}_j & \varphi^{\bar{i}}_{\bar{j}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ I & 0\end{pmatrix}\quad (I=(\delta^i_j)\text{-identity matrix of degree } n)\ (4)$$

with properties $\varphi^2=0$ and $S\varphi=\varphi S$, i.e. the transformation $S:\{\partial_\alpha\}\to\{\partial_{\alpha'}\}$ preserving φ is an admissible dual transformation. Thus $T(M_n)$ carries a natural dual structure φ, which is an integrable structure $(\partial_k\varphi^i_j=0)$. Therefore with each induced coordinates $(x^i,x^{\bar{i}})$ in $\pi^{-1}(U)\subset T(M_n)$, we associate the local dual coordinates $X^i=x^i+\varepsilon x^{\bar{i}}$, $\varepsilon^2=0$. Using (3) we see that the local dual coordinates $X^i=x^i+\varepsilon x^{\bar{i}}$ transformed by

$$X^{i'}=x^{i'}(x^i)+\varepsilon x^{\bar{s}}\partial_s(x^{i'}(x^i)).\ (5)$$

The equation (5) show that the quantities $X^{i'}$ are dual-holomorphic functions of $X^i=x^i+\varepsilon x^{\bar{i}}$ (see (2) with $g(x^1,\dots,x^n)=0$). Thus the tangent bundle $T(M_n)$ with a natural integrable φ-structure is a real modelling of dual-holomorphic manifold $X_n(\mathbb{R}(\varepsilon))$ $(\dim X_n(\mathbb{R}(\varepsilon))=n)$. In such modelling there exists a one-to-one correspondence between dual tensor fields on $X_n(\mathbb{R}(\varepsilon))$ and pure tensor fields with respect to φ-structure on $T(M_n)$ (see [1]). A real $C^\infty-$ tensor field ω of type $(0,2)$ on $T(M_n)$ is called pure with respect to φ-structure if

$$\omega(\varphi X_1,X_2)=\omega(X_1,\varphi X_2).$$

It is well known that the dual tensor field on $X_n(\mathbb{R}(\varepsilon))$ corresponding to a pure $C^\infty-$ tensor field is not necessarily dual-holomorphic. This tensor field is dual-holomorphic on $X_n(\mathbb{R}(\varepsilon))$ if and only if $\Phi-$operator associated with φ and applied to a pure tensor field ω of type $(0,2)$ satisfies the following conditions [8]

$$(\Phi_{\varphi}\omega)(Y, X_1, X_2) = (\varphi Y)(\omega(X_1, X_2)) - Y(\omega(\varphi X_1, X_2)) + \omega(\varphi(L_Y X_1), X_2) + \omega(X_1, \varphi(L_Y X_2)) = 0 ,$$

where L_Y is the Lie derivation with respect to Y.

2. Deformedcompletelifts of Riemannianmetrics

A tensor field $\tilde{g}$ of type (0,2) on the tangent bundle $T(M_n)$ is called a pure tensor field with respect to the dual structure φ if

$$\tilde{g}(\varphi X, Y) = \tilde{g}(X, \varphi Y)$$

for any vector fields X and Y on $T(M_n)$. From here we see that, the condition of purity of $\tilde{g}$ may be expressed in terms of the local induced coordinates as follows:

$$\tilde{g}_{\sigma\beta}\varphi_{\alpha}^{\sigma} = \tilde{g}_{\alpha\sigma}\varphi_{\beta}^{\sigma} .$$

Using (4), from the last condition we have

$$\tilde{g} = \left(\tilde{g}_{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} \tilde{g}_{ij} & \tilde{g}_{\bar{i}\,j} \\ \tilde{g}_{\bar{i}\,j} & 0 \end{pmatrix}, \ \tilde{g}_{\bar{i}\,\bar{j}} = 0, \ \tilde{g}_{\bar{i}\,j} = \tilde{g}_{i\,\bar{j}} .$$

A pure tensor field $\tilde{g}$ of type (0,2) on tangent bundle $T(M_n)$ is called a dual-holomorphic with respect to φ, if $\Phi_{\varphi}\tilde{g} = 0$, where Φ_{φ} is the Tachibana operator defined by [6]

$$(\Phi_{\varphi}\tilde{g})(X, Y, Z) = (\varphi X)(\tilde{g}(Y, Z)) - X(\tilde{g}(\varphi Y, Z) + \tilde{g}((L_Y\varphi)X, Z) + \tilde{g}(Y, (L_Z\varphi)X) .$$

Such tensor field is a real modelling of corresponding dual-holomorphic tensor field of type (0,2) from $X_n(\mathbb{R}(\varepsilon))$. It is well known that, if $\tilde{g}$ is a Riemannian metric and $\nabla^{\tilde{g}}$ its Levi-Civita connection, then the condition $\Phi_{\varphi}\tilde{g} = 0$ is equivalent to the condition $\nabla^{\tilde{g}}\varphi = 0$ [3], i.e. the triple $(T(M_n), \tilde{g}, \varphi)$ is a dual anti-Kähler (or Kähler-Norden) manifold.

The tensor field $\Phi_{\varphi}\tilde{g}$ of type (0,3) has components

$$(\Phi_{\varphi}\tilde{g})_{\alpha\beta\gamma} = \varphi_{\alpha}^{\sigma}\partial_{\sigma}\tilde{g}_{\beta\gamma} - \varphi_{\beta}^{\sigma}\partial_{\alpha}\tilde{g}_{\sigma\gamma} - \tilde{g}_{\sigma\gamma}(\partial_{\alpha}\varphi_{\beta}^{\sigma} - \partial_{\beta}\varphi_{\alpha}^{\sigma}) + \tilde{g}_{\beta\sigma}\partial_{\gamma}\varphi_{\alpha}^{\sigma}$$

with respect to the natural frame $\{\partial_{\alpha}\} = \{\partial_i, \partial_{\bar{i}}\}$.

By virtue of (4) , after some calculations, the equation $(\Phi_{\varphi}\tilde{g})_{\alpha\beta\gamma} = 0$ reduces to

$$\partial_{\bar{i}}\tilde{g}_{jk} - \partial_i\tilde{g}_{\bar{j}k} = 0, \ \partial_{\bar{i}}\tilde{g}_{\bar{j}\,k} = 0,$$

from which we have

$$\tilde{g}_{\bar{j}\,k} = g_{jk}(x^1, ..., x^n), \ \tilde{g}_{jk} = x^{\bar{i}}\partial_i g_{\bar{j}k} + h_{jk}(x^1, ..., x^n). \quad (6)$$

Using (3), (6) and $\tilde{g}_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\tilde{g}_{\alpha\beta}$, we easily see that $g_{jk}(x^1, ..., x^n)$ and $h_{jk}(x^1, ..., x^n)$ are components of any tensor fields g and h of type (0,2) on M_n, respectively.Thus a real dual-holomorphic tensor field $\tilde{g}$ of type (0,2) on tangent bundle can be rewritten in the form

$$\tilde{g} = \left(\tilde{g}_{\beta\gamma}\right) = \begin{pmatrix} x^{\bar{i}}\partial_i g_{\bar{j}k} + h_{jk} & g_{jk} \\ g_{jk} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{\bar{i}}\partial_i g_{\bar{j}k} & g_{jk} \\ g_{jk} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_{jk} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = {}^{C}g + {}^{V}h ,$$

where ${}^{C}g$ and ${}^{V}h$ are the complete and vertical lifts of tensor fields $g=(g_{jk})$ and $h=(h_{jk})$ of type (0,2) from M_n to tangent bundle $T(M_n)$, respectively [9]. Therefore we have

Theorem 1. *Let $T(M_n)$ be a tangent bundle of M_n, which is a real modelling of dual-holomorphic manifold $X_n(\mathbb{R}(\varepsilon))$. Then a real modelling of corresponding dual-holomorphic tensor field of type (0,2) from $X_n(\mathbb{R}(\varepsilon))$ is a deformed complete lift in the form ${}^{Def}g={}^{C}g+{}^{V}h$, where ${}^{C}g$ and ${}^{V}h$ are the complete and vertical lifts of $g=(g_{jk})$ and $h=(h_{jk})$ from M_n to $T(M_n)$, respectively.*

From Theorem 1, we have

Corollary. *If h is any symmetric (0,2)-tensor field on M_n, then the tensor field ${}^{Def}g={}^{C}g+{}^{V}h$ is a Riemannian metric on $T(M_n)$.*

3. Dual Kahler-Nordenmanifolds

A Riemannian metric g is a dual Norden metric with respect to the dual structure J [3,4] if

$$g(JX,Y)=g(X,JY)$$

for any $X,Y\in\Im_0^1(M_{2n})$, i.e. g is purewithrespectto J. This kind of metrics havebeenalsostudied under the name: B-metrics (see for example [7]). If (M_{2n},J) is an almost dual manifold with a Nordenmetric g, we say that (M_{2n},J,g) is an almostNordenmanifold. If ${}^{g}\nabla J=0$, where ${}^{g}\nabla$ is theLevi-Civitaconnection of g, thenwe say that (M_{2n},J,g) is a dual Kähler-Norden.We assume that the manifold M_{2n} is the tangent bundle $\pi:T(V_n)\to V_n$ of a Riemannian manifold V_n. If $(u^1,u^2,\cdots,u^n)$ are local coordinates on V_n, then $x^i=u^i\circ\pi$ together with the fibre coordinates $x^{\bar{i}}=y^i$ $\bar{i}=n+1,\cdots,2n$ form local coordinates on $T(V_n)$.

It is well known that there exists a dual structure φ on $T(V_n)$ which has components in the form (4). In Section 2 we see that the deformed lift ${}^{C}g+{}^{V}h$ satisfies the following holomorphicity condition

$$\Phi_\varphi({}^{C}g+{}^{V}h)=0\,.$$

The last condition is equivalent to the condition ${}^{({}^{C}g+{}^{V}h)}\nabla\varphi=0$ (see [3]), where ${}^{({}^{C}g+{}^{V}h)}\nabla$ is the Levi-Civita connection ofthe metric ${}^{C}g+{}^{V}h$, i.e. the dual holomorphic Noden manifold $(T(V_n),\ \varphi,{}^{C}g+{}^{V}h)$ is a dual Kähler-Norden manifold. Thus we have

Theorem 2. *Let V_n be a Riemannian manifold with metric g, and let $T(V_n)$ its tangent bundle. Then the triple $(T(V_n),\ \varphi,{}^{C}g+{}^{V}h)$ is a dual Kähler-Norden manifold, where ${}^{C}g+{}^{V}h$ is the deformed complete lift of metric g and φ is a dual structure which naturally exists in tangent bundle.*

Let now $h=g$. In this case we obtain well known metric $I+II={}^{C}g+{}^{V}g$ (see [9]). Thus we have

Corollary 2. *The triple $(T(V_n),\ \varphi,I+II)$ is a dual Kähler-Norden manifold.*

REFERENCES

1. Kruchkovich, G.I.:Hypercomplex structures on manifolds I. Trudy Sem. Vector. Tensor. An., Moscow Univ. 16, 174-201 (1972)
2. Salimov, A.,Aslanci, S.: Applications of Phi-operators to hypercomplex geometry. Advances in Applied Clifford Algebras. 22, 185-201 (2012)
3. Salimov, A.: On operators associated with tensor fields. J. Geom. 99**, 107-145**(2010)
4. Salimov, A.:Tensor operators and their applications. Mathematics Research Developments Series. Nova Science Publishers. New York (2013)
5. **Shirokov, A. P.**: On the question of pure tensors and invariant subspaces in manifolds with almost algebraic structure. **Kazan. Gos. Univ. Učen. Zap.** 126, 81-89 (1966)
6. **Tachibana, S.**:Analytic tensor and its generalization. ***Tohoku Math. J.*****12**, 208-221 **(**1960)
7. Vishnevskii, V.V.**,** Shirokov, A.P.**,** Shurygin, V.V.: (Russian) Spacesoveralgebras. ***Kazanskii Gosudarstvennii Universitet, Kazan*** (1985)
8. **Yano, K.,Ako, M.:**On certain operators associated with tensor fields. **Kodai Math. Sem. Rep.20,** 414-436 **(**1968)
9. Yano, K**.,** Ishihara, S.:**Tangent and cotangent bundles: differential geometry. M. Dekker, New York (1973)**

INSTRUCTIONS FOR AUTHORS

1. "The Baku Engineering University Mathematics and Computer Science" accepts original unpublished articles and reviews in the research field of the author.
2. Articles are accepted in English.
3. File format should be compatible with **Microsoft Word** and must be sent to the electronic mail (**journal@beu.edu.az**) of the Journal. The submitted article should follow the following format:

- Article title, author's name and surname
- The name of workplace
- Mail address
- Abstract and key words

4. The title of the article should be in each of the three languages of the abstract and should be centred on the page and in bold capitals before each summary.
5. **The abstract** should be written in **9 point** type size, between **100** and **150** words. The abstract should be written in the language of the text and in two more languages given above. The abstracts of the article written in each of the three languages should correspond to one another. The keywords should be written in two more languages besides the language of the article and should be at least three words.
6. .**UDC** and **PACS** index should be used in the article.
7. The article must consist of the followings:

- Introduction
- Research method and research
- Discussion of research method and its results
- In case the reference is in Russian it must be given in the Latin alphabet with the original language shown in brackets.

8. **Figures, pictures, graphics and tables** must be of publishing quality and inside the text. Figures, pictures and graphics should be captioned underneath, tables should be captioned above.
9. **References** should be given in square brackets in the text and listed according to the order inside the text at the end of the article. In order to cite the same reference twice or more, the appropriate pages should be given while keeping the numerical order. For example: [7, p.15].

Information about each of the given references should be full, clear and accurate. The bibliographic description of the reference should be cited according to its type (monograph, textbook, scientific research paper and etc.) While citing to scientific research articles, materials of symposiums, conferences and other popular scientific events, the name of the article, lecture or paper should be given.

Samples:

a) ***Article:*** Demukhamedova S.D., Aliyeva İ.N., Godjayev N.M.. *Spatial and electronic structure af monomerrik and dimeric conapeetes of carnosine üith zinc,* Journal of structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010

b) ***Book:*** Christie ohn Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles*. Fourth Edition, Prentice Hall, p.386-398, 2002

c) ***Conference paper:*** Sadychov F.S., Aydın C., Ahmedov A.İ.. Appligation of Information – Commu-nication Technologies in Science and education. II International Conference."*Higher Twist Effects In Photon- Proton Collisions", Bakı, 01-03 Noyabr, 2007, ss 384-391*
References should be in 9-point type size.

10. The margins sizes of the page: - Top 2.8 cm. bottom 2.8 cm. left 2.5 cm, right 2.5 cm. The article main text should be written in Palatino Linotype 11 point type size single-spaced. Paragraph spacing should be 6 point.
11. The maximum number of pages for an article should not exceed 15 pages
12. The decision to publish a given article is made through the following procedures:

- The article is sent to at least to experts.
- The article is sent back to the author to make amendments upon the recommendations of referees.
- After author makes amendments upon the recommendations of referees the article can be sent for the publication by the Editorial Board of the journal.

YAZI VƏ NƏŞR QAYDALARI

1. "Journal of Baku Engineering University- Riyaziyyat və kompüter elmləri" - əvvəllər nəşr olunmamış orijinal əsərləri və müəllifin tədqiqat sahəsi üzrə yazılmış icmal məqalələri qəbul edir.
2. Məqalələr İngilis dilində qəbul edilir.
3. Yazılar **Microsoft Word** yazı proqramında, (**journal@beu.edu.az**) ünvanına göndərilməlidir. Göndərilən məqalələrdə aşağıdakılara nəzərə alınmalıdır:

- Məqalənin başlığı, müəllifin adı, soyadı,
- İş yeri,
- Elektron ünvanı,
- Xülasə və açar sözlər.

4. **Məqalədə başlıq hər xülasədən əvvəl** ortada, qara və böyük hərflə xülasələrin yazıldığı hər üç dildə olmalıdır.
5. **Xülasə** 100-150 söz aralığında olmaqla, 9 punto yazı tipi böyüklüyündə, məqalənin yazıldığı dildə və bundan əlavə yuxarıda göstərilən iki dildə olmalıdır. Məqalənin hər üç dildə yazılmış xülasəsi bir-birinin eyni olmalıdır. Açar sözlər uyğun xülasələrin sonunda onun yazıldığı dildə verilməklə ən azı üç sözdən ibarət olmalıdır.
6. Məqalədə UOT və PACS kodları göstərilməlidir.
7. Məqalə aşağıdakılardan ibarət olmalıdır:

- Giriş,
- Tədqiqat metodu
- Tədqiqat işinin müzakirəsi və onun nəticələri,
- İstinad ədəbiyyatı rus dilində olduğu halda orjinal dili mötərzə içərisində göstərməklə yalnız Latın əlifbası ilə verilməlidir.

8. **Şəkil**, **rəsm**, **grafik** və **cədvəllər** çapda düzgün, aydın çıxacaq vəziyyətdə və mətn içərisində olmalıdır. Şəkil, rəsm və qrafiklərin yazıları onların altında yazılmalıdır. Cədvəllərdə başlıq cədvəlin üstündə yazılmalıdır.
9. **Mənbələr** mətn içərisində kvadrat mötərizə daxilində göstərilməklə məqalənin sonunda mətn daxilindəki sıra ilə düzülməlidir. Eyni mənbəyə iki və daha cox istinad edildikdə əvvəlki sıra sayı saxlanmaqla müvafiq səhifələr göstərilməlidir. Məsələn: [7,səh.15].

Ədəbiyyat siyahısında verilən hər bir istinad haqqında məlumat tam və dəqiq olmalıdır. İstinad olunan mənbənin biblioqrafik təsviri onun növündən (monoqrafiya, dərslik, elmi məqalə və s.) asılı olaraq verilməlidir. Elmi məqalələrə, simpozium, konfrans, və digər nüfuzlu elmi tədbirlərin materiallarına və ya tezislərinə istinad edərkən məqalənin, məruzənin və ya tezisin adı göstərilməlidir.

Nümunələr:

a) ***Məqalə:*** Demukhamedova S.D., Aliyeva İ.N., Godjayev N.M.. *Spatial and electronic structure af monomeric and dimeric complexes of carnosine with zinc,* Journal of structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010

b) ***Kitab:*** Christie ohn Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles*. Fourth Edition, Prentice Hall, 2002

c) ***Konfrans:*** Sadychov F.S., Aydın C., Ahmedov A.İ.. Appligation of Information-Communication Technologies in Science and education. II International Conference. *"Higher Twist Effects In Photon- Proton Collisions", Bakı, 01-03 Noyabr, 2007, ss 384-391*

Mənbələr 9 punto yazı tipi böyüklüyündə olmalıdır.

10. **Səhifə ölçüləri:** üstdən 2.8 sm, altdan 2.8 sm, soldan 2.5 sm və sağdan 2.5 sm olmalıdır. Mətn 11 punto yazı tipi böyüklüyündə, **Palatino Linotype** yazı tipi ilə və tək simvol aralığında yazılmalıdır. Paraqraflar arasında 6 punto yazı tipi aralığında məsafə olmalıdır.
11. Orijinal tədqiqat əsərlərinin tam mətni bir qayda olaraq 15 səhifədən artıq olmamalıdır.
12. Məqalənin nəşrə təqdimi aşağıdakı qaydada aparılır:

- Hər məqallə ən azı iki ekspertə göndərilir.
- Ekspertlərin tövsiyələrini nəzərə almaq üçün məqalə müəllifə göndərilir.
- Məqalə, ekspertlərin tənqidi qeydləri müəllif tərəfindən nəzərə alındıqdan sonra Jurnalın Redaksiya Heyəti tərəfindən çapa təqdim oluna bilər.

YAZIM KURALLARI

1. "Journal of Baku Engineering University- Matematik ve Bilgisayar Bilimleri" önceler yayımlanmamış orijinal çalışmaları ve yazarın kendi araştırma alanın-da yazılmış derleme makaleleri kabul etmektedir.
2. Makaleler İngilizce kabul edilir.
3. Makaleler Microsoft Word yazı programında, (**journal@beu.edu.az**) adresine gönderilmelidir. Gönderilen makalelerde şunlar dikkate alınmalıdır:

- Makalenin başlığı, yazarın adı, soyadı,
- İş yeri,
- E-posta adresi,
- Özet ve anahtar kelimeler.

4. **Özet** 100-150 kelime arasında olup 9 font büyüklüğünde, makalenin yazıldığı dilde ve yukarıda belirtilen iki dilde olmalıdır. Makalenin her üç dilde yazılmış özeti birbirinin aynı olmalıdır. Anahtar kelimeler uygun özetin sonunda onun yazıldığı dilde verilmekle en az üç sözcükten oluşmalıdır.
5. Makalede UOT ve PACS tipli kodlar gösterilmelidir.
6. Makale şunlardan oluşmalıdır:

- Giriş,
- Araştırma yöntemi
- Araştırma
- Tartışma ve sonuçlar,
- İstinat Edebiyatı Rusça olduğu halde orjinal dili parantez içerisinde göstermekle yalnız Latin alfabesi ile verilmelidir.

7. **Şekil, Resim, Grafik** ve **Tablolar** baskıda düzgün çıkacak nitelikte ve metin içerisinde olmalıdır. Şekil, Resim ve grafiklerin yazıları onların alt kısımda yer almalıdır. Tablolarda ise başlık, tablonun üst kısmında bulunmalıdır.
8. **Kullanılan kaynaklar**, metin dâhilinde köşeli parantez içerisinde numaralandırılmalı, aynı sırayla metin sonunda gösterilmelidir. Aynı kaynaklara tekrar başvurulduğunda sıra muhafaza edilmelidir. Örneğin: [7,seh.15].

Referans verilen her bir kaynağın künyesi tam ve kesin olmalıdır. Referans gösterilen kaynağın türü de eserin türüne (monografi, derslik, ilmî makale vs.) uygun olarak verilmelidir. İlmi makalelere, sempozyum, ve konferanslara müracaat ederken makalenin, bildirinin veya bildiri özetlerinin adı da gösterilmelidir.

Örnekler:

a) ***Makale:*** Demukhamedova S.D., Aliyeva İ.N., Godjayev N.M.. *Spatial and Electronic Structure of Monomerik and Dimeric Conapeetes of Carnosine Üith Zinc,* Journal of Structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010

b) ***Kitap:*** Christie ohn Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles*. Fourth Edition, Prentice Hall, p.386-398, 2002

c) ***Kongre:*** Sadychov F.S., Aydın C., Ahmedov A.İ. Appligation of Information-Communication Technologies in Science and education. II International Conference. "*Higher Twist Effects In Photon- Proton Collisions", Bakı, 01-03 Noyabr, 2007, ss 384-391*

Kaynakların büyüklüğü 9 punto olmalıdır.

9. **Sayfa ölçüleri**; üst: 2.8 cm, alt: 2.8 cm, sol: 2.5 cm, sağ: 2.5 cm şeklinde olmalıdır. Metin 11 punto büyüklükte **Palatino Linotype** fontu ile ve tek aralıkta yazılmalıdır. Paragraflar arasında 6 puntoluk yazı mesafesinde olmalıdır.
10. Orijinal araştırma eserlerinin tam metni 15 sayfadan fazla olmamalıdır.
11. Makaleler dergi editör kurulunun kararı ile yayımlanır. Editörler makaleyi düzeltme için yazara geri gönderilebilir.
12. Makalenin yayına sunuşu aşağıdaki şekilde yapılır:

- Her makale en az iki uzmana gönderilir.
- Uzmanların tavsiyelerini dikkate almak için makale yazara gönderilir.
- Makale, uzmanların eleştirel notları yazar tarafından dikkate alındıktan sonra Derginin Yayın Kurulu tarafından yayına sunulabilir.

13. Azerbaycan dışından gönderilen ve yayımlanacak olan makaleler için,(derginin kendilerine gonderilmesi zamani posta karşılığı) 30 ABD Doları veya karşılığı TL, T.C. Ziraat Bankası/Üsküdar-İstanbul 0403 0050 5917 No'lu hesaba yatırılmalı ve makbuzu üniversitemize fakslanmalıdır.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. «Journal of Baku Engineering University» - Математики и информатики публикует оригинальные, научные статьи из области исследования автора и ранее не опубликованные.

2. Статьи принимаются на английском языке.

3. Рукописи должны быть набраны согласно программы **Microsoft Word** и отправлены на электронный адрес **(journal@beu.edu.az)**. Отправляемые статьи должны учитывать следующие правила:

- Название статьи, имя и фамилия авторов
- Место работы
- Электронный адрес
- Аннотация и ключевые слова

4. **Заглавие статьи** пишется для каждой аннотации заглавными буквами, жирными буквами и располагается по центру. Заглавие и аннотации должны быть представлены на трех языках.

5. **Аннотация**, написанная на языке представленной статьи, должна содержать 100-150 слов, набранных шрифтом 9 punto. Кроме того, представляются аннотации на двух других выше указанных языках, перевод которых соответствует содержанию оригинала. Ключевые слова должны быть представлены после каждой аннотации на его языке и содержать не менее 3-х слов.

6. В статье должны быть указаны коды UOT и PACS.

7. Представленные статьи должны содержать:

- Введение
- Метод исследования
- Обсуждение результатов исследования и выводов.
- Если ссылаются на работу на русском языке, тогда оригинальный язык указывается в скобках, а ссылка дается только на латинском алфавите.

8. **Рисунки, картинки, графики и таблицы** должны быть четко выполнены и размещены внутри статьи. Подписи к рисункам размещаются под рисунком, картинкой или графиком. Название таблицы пишется над таблицей.

9. **Ссылки** на источники даются в тексте цифрой в квадратных скобках и располагаются в конце статьи в порядке цитирования в тексте. Если на один и тот же источник ссылаются два и более раз, необходимо указать соответствующую страницу, сохраняя порядковый номер цитирования. Например: [7, стр.15]. Библиографическое описание ссылаемой литературы должно быть проведено с учетом типа источника (монография, учебник, научная статья и др.). При ссылке на научную статью, материалы симпозиума, конференции или других значимых научных мероприятий должны быть указаны название статьи, доклада или тезиса.

Например:

a) ***Статья:*** Demukhamedova S.D., Aliyeva I.N., Godjayev N.M. *Spatial and electronic structure of monomeric and dimeric complexes of carnosine with zinc,* Journal of Structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010

b) ***Книга:*** Christie on Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles.* Fourth Edition, Prentice Hall, 2002

c) ***Конференция:*** Sadychov F.S, Fydin C,Ahmedov A.I. Appligation of Information-Communication Nechnologies in Science and education. II International Conference. *“Higher Twist Effects In Photon-Proton Collision”,* Bakı,01-03 Noyabr, 2007, ss.384-391

Список цитированной литературы набирается шрифтом 9 punto.

10. **Размеры страницы:** сверху 2.8 см, снизу 2.8 см, слева 2.5 и справа 2.5. Текст печатается шрифтом **Palatino Linotype**, размер шрифта 11 punto, интервал-одинарный. Параграфы должны быть разделены расстоянием, соответствующим интервалу 6 punto.
11. Полный объем оригинальной статьи, как правило, не должен превышать 15 страниц.

12. Представление статьи к печати производится в ниже указанном порядке:

- Каждая статья посылается не менее двум экспертам.
- Статья посылается автору для учета замечаний экспертов.
- Статья, после того, как автор учел замечания экспертов, редакционной коллегией журнала может быть рекомендована к печати.