ISSN 2521-635X

Volume 4
Number 2
2020

Journal of Baku Engineering University

MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

Journal is published twice a year
Number-1. June, Number-2. December

An International Journal

http://journal.beu.edu.az

FOUNDER

Havar Mammadov

EDITOR-IN-CHIEF

Hamzaga Orucov

CO-EDITORS

Agasi Melikov

EDITORIAL ADVISORY BOARD

Alekber Aliyev *(Azerbaijan, Baku State University)*
Abzeddin Adamov *(Azerbaijan, ADA)*
Arif Salimov *(Azerbaijan, Baku State University)*
Gorbachuk Valentina Ivanovna *(Ukraina, Academy of Science)*
Hamdulla Aslanov *(Azerbaijan, Akademy of Science)*
Nadir Alisov *(Ukraine, Academy of Science)*
Rakib Efendiyev *(Azerbaijan, Baku State University)*
Sosnin Petr Ivanovich *(Russia,Ulyanovsk State Technical University)*
Vagif Guliyev *(Azerbaijan, Akademy of Science)*

INTERNATIONAL ADVISORY BOARD

Abdeljalil Nachaoui *(France, Nantes University)*
Barış Erbaş *(Anadolu University, Turkey)*
Che Soong Kim *(Koreya, Sangji University)*
Chakib Abdelkrim *(Morocco, Beni Mellal University)*
Elshad Eyvazov *(Azerbaijan, Baku State University)*
Ekber Eliyev *(Azerbaijan, National Academy of Science)*
Garib Murshudov *(York Academy,UK, London)*
Golovko Vladimir *Adamovich (Belarus, Brest State Universiteti)*
Hamed Sari-Sarraf *(USA,TexasTechnik University)*
Hari Srivastava *(Canada,Victoria,)*
Hidayyat Guseynov *(Azerbaijan, Baku State University)*
Jauberteau Francois *(France,Nantes University)*
Kamil Mansimov *(Azerbaijan, Baku State University)*
Ludmila Prikazchikova *(Keele University, England)*
Mourad Nachaoui *(France,Nantes University)*
Rasim Alikuliyev *(Azerbaijan, National Academy of Science)*
Tarasenko Vladimir Petrovich *(National Technical University of Ukraine)*
Telman Aliyev *(Azerbaijan, National Academy of Science)*
Telman Malikov *(Azerbaijan, National Academy of Science)*
Vedat Coşkun *(Turkiye,Işık University)*
Vladimir B. Vasilyev *(Russia, Lipetsk State Technical University)*
Sabir Mirzayev *(Azerbaijan, Baku State University)*
Dimkov Mikhail Pakhomovich *(Belarus State Economic University)*
Arquchintsev Alexander Valeryevich *(Irkutsk State University)*

EXECUTIVE EDITORS

Shafag Alizade

ASSISTANT EDITORS

Svetlana Denmuhammedovna

DESIGN

Ilham Aliyev

CONTACT ADDRESS

Journal of Baku Engineering University
AZ0102, Khirdalan city, Hasan Aliyev str. 120, Absheron, Baku, Azerbaijan
Tel: 00 994 12 - 349 99 95 Fax: 00 994 12 349-99-90/91

e-mail: *journal@beu.edu.az*
web: *http://journal.qu.edu.az*
facebook: *Journal Of Baku Engineering University*

Copyright © Baku Engineering University

ISSN 2521-635X

ISSN 2521-635X

Journal of Baku Engineering University

MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

Baku - AZERBAIJAN

Journal of Baku Engineering University

MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

2020. Volume 4, Number 2

CONTENTS

ПОСТРОЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА ПРИ БОЛЬШИХ ПО МОДУЛЮ ЗНАЧЕНИЯХ ПАРАМЕТРА

С.З. Ахмедов, С.Т.Алескерова 69

АНАЛОГ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА И НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОДНОЙ ДВУХЭТАПНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ, ОПИСЫВАЕМАЯ СИСТЕМАМИ ДВУМЕРНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

К.Б.Мансимов, Т.Ф.Мамедова 79

ОБ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ С МНОГОТОЧЕЧНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ КАЧЕСТВА

Рзаева В.Г. 95

FAKTORIZASIYA ÜSULU ILƏ IKI ÖLÇÜLÜ LAPLAS TƏNLIYININ FUNDAMENTAL HƏLLINDƏN $\frac{4}{3}$-TƏRTIBLI TƏNLIYIN FUNDAMENTAL HƏLLININ ALINMASI

Allahşükür Əzizağa oğlu Quliyev, Nihan Əlipənah oğlu Əliyev, Natiq Səhrab oğlu İbrahimov 102

DİRAK OPERATORUNUN MƏXSUSİ ƏDƏDLƏRİNİN TƏKRARLANMASI HAQQINDA

Fərzullazadə Abid Qalib oğlu 111

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ, ОПИСЫВАЕМАЯ РАЗНОСТНЫМ АНАЛОГОМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДИИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИИ

Агамалыева А.И. 120

ƏMƏLİYYAT SİSTEMLƏRİ

Rəna Əsgərova 126

İKİ AVTOGENERATORLU DİFERENSİAL TUTUM QURĞUSUNUN PROQRAM TƏMİNATININ İŞLƏNİLMƏSİ

R.N. Nəbiyev, Q.İ. Qarayev, R.R. Rüstəmov, H.S. Quluzadə 137

JOURNAL OF BAKU ENGINEERING UNIVERSITY- MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
2020. Volume 4, Number 2 *Pages 69-78*

УДК 517.928

ПОСТРОЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА ПРИ БОЛЬШИХ ПО МОДУЛЮ ЗНАЧЕНИЯХ ПАРАМЕТРА

С.З.АХМЕДОВ, С.Т.АЛЕСКЕРОВА
Бакинский Государственный Университет
Азербайджанский Государственный Педагогический Университет
salehmedov0@gmail.com, sabina.alesgerova75@gmail.com

РЕЗЮМЕ

В работе рассматривается уравнение четвёртого порядка с комплекснозначными переменными коэффициентами, содержащее комплексный параметр. Для нахождения более точной асимптотики четырех линейно независимых частных решений этого уравнения при больших по модулю значениях параметра уравнение приводится к системе уравнений первого порядка. Были найдены корни уравнения Биркгофа, соответствующего рассматриваемому уравнению. Комплексная плоскость была разделена на 8 секторов, так чтобы действительная часть разности корней характеристического уравнения в смысле Биркгова оставалась постоянной. Расчеты показывают, что количество этих секторов в комплексной плоскости равно восьми.Чтобы более точно найти асимптотику фундаментальных решений в каждом из этих секторов, необходимо искать решение уравнения как произведение из трёх матриц. Так, первая и третья матрицы построены при помощи корней характеристического уравнения Биркова, а для построения второй матрицы помимо корней характеристического уравнения Биркгова используется также коэффициент при производной младшего порядка, входящей в уравнение. Показано, что при больших значениях по модулю параметра определитель Вронского полученных частных решений отличен от нуля, что доказывает их линейную независимость. В построенной таким образом асимптотике фундаментальных решений, наряду с коэффициентом при λ, был также точно найден коэффициент приλ^{-1} и доказано, что остальные слагаемые включены в асимптотику.

Ключевые слова: фундаментальное решение, асимптотика, аналитическая функция, собственное значение, асимптотическая формула.

CONSTRUCTION OF FUNDAMENTAL SOLUTIONS OF THE FOURTH ORDER LINE EQUATION AT THE MAJOR VALUES OF THE PARAMETER

ABSTRACT

The paper considers a fourth-order equation with complex-valued variable coefficients containing a complex parameter. To find a more accurate asymptotics for four linearly independent particular solutions of this equation at large values of the parameter, the equation is reduced to a system of first-order equations.The roots of the Birkhoff equation corresponding to the considered equation were found. The complex plane was divided into 8 sectors so that the real part of the difference between the roots of the characteristic equation in the sense of Birkhoff remained constant. Calculations show that the number of these sectors in the complex plane is eight. In order to more accurately find the asymptotics of the fundamental solutions in each of these sectors, it is necessary to look for a solution to the equation as a product of three matrices.Thus, the first and third matrices are constructed using the roots of the Birkhoff characteristic equation, and to construct the second matrix, in addition to the roots of the Birkhoff characteristic equation, the coefficient at the lower-order derivative included in the equation is also used. It is shown that for large values of the modulus of the parameter, the Wronsky determinant of the obtained particular solutions is nonzero, which proves their linear independence.In the asymptotics of the fundamental solutions constructed in this way, along with the coefficient at λ, the coefficient at $\lambda^{-1}$is also exactly found and it is proved that the remaining terms are included in the asymptotics.

Keywords: fundamental solutions, asymptotics, analytical function, specific value, asymptotic formula

PARAMETRIN MODULCA BÖYÜK QIYMƏTLƏRINDƏ DÖRDÜNCÜ TƏRTIB XƏTTI TƏNLIYIN FUNDAMENTAL HƏLLƏRININ QURULMASI

XÜLASƏ

İşdə dördüncü tərtib, özündə kompleks parametr saxlamaqla dəyişən əmsallarıkompleks qiymətli olan tənliyəbaxılmışdır.Bu tənliyin parametrin modulca böyük qiymətlərində xətti asılı olmayan dörd xüsusi həllərinin asimtotikasını daha dəqiq tapmaq məqsədi ilə tənlik birtərtibli sistemə gətirilmişdir.Tənliyə uyğun Birkhov mənada tənliyin kökləri tapılmışdır.Kompleks müstəvi elə 8 sektora bölünmüşdür ki, Birkhov mənada xarakteristik tənliyin köklərinin fərqinin həqiqi hissəsi sabit qalsın.Hesablamalar göstərir ki, kompleks müstəvidə bu sektorların sayı səkkizə bərabərdir.Bu sektorların hər birində fundamental həllərin asimtotikasını daha dəqiq tapmaq məqsədilə tənliyin həllini üç matrisin hasili şəklində axtarmaq lazım gəlir.Belə ki birinci və üçüncü matrislər :Birkhov mənada xarakteristik tənliyin kökləri vasitəsilə qurulur.İkinci matris isə Birkhov mənada xarakteristik tənliyin kökləri ilə yanaşı tənliyə daxil olan kiçik tərtib törəmənin əmsalından da istifadə olunur.Asimtotik şəkildə tapılan formal həllin əsalandırılmasında arıcıl yaxınlaşmalar üsulundan istifadə olunmuşdur.Parametrin tapılmış modulca böyük qiymətlərində tapılmış xüsusi həllərin xətti asılı olmamasını göstərmək üçün bu həllərdən düzəldimiş Vronski determinantının sıfırdan fərqli olduğu göstərilmişdir.Bu qayda ilə qurulmuş fundamental həllərin asimtotikasında λ-nin əmsalı ilə yanaşı λ^{-1}-in də əmsalı dəqiq tapılmış və yerdə qalan digər toplananların asimtotikaya daxil olunduğu isbat olumuşdur.

Açar sözlər: fundamental həllər, asimtotika, analitik funksiya, məxsusi qiymət, asimtotik düstur.

Работа посвящена нахождению асимптотики фундаментального решения уравнения четвёртого порядка с переменными коэффициентами. Помимо асимптотики λ были уточнены и коэффициенты при $\frac{1}{\lambda}$.

Представленная работа посвящена нахождению фундаментальных решений обыкновенного дифференциального уравнения четвёртого порядка, зависящего от комплексного параметра λ

$ip(x)y^{IV} + q(x)y'' - \lambda^4 y = 0$, $0 < x < 1$ (1)

где, $q(x)$ - комплекснозначная функция

Корни характеристического уравнения по Бирхгофу $ip(x)\omega^4(x) = 1$, соответствующего уравнению (1)имеют вид:

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{p(x)}} \exp \frac{3\pi}{8} i$$

$$\omega_1(x) = \omega(x), \omega_2(x) = i\omega(x),$$

$$\omega_3(x) = -\omega(x), \omega_4(x) = -i\omega(x)$$

Разделим $\lambda-$комплексную плоскость на восемь секторов следующим образом:

$$S_k = \{\lambda : (-1)^k \operatorname{Re}((1-i)\omega(x)\lambda) > 0; (-1)^k \operatorname{Re}(i\omega(x)\lambda) > 0\}, \; k = 1,2$$

$$S_k = \{\lambda : (-1)^k \operatorname{Re}((1-i)\omega(x)\lambda) < 0; (-1)^k \operatorname{Re}(\omega(x)\lambda) > 0\}, \; k = 3,4$$

$$S_k = \{\lambda : (-1)^k \operatorname{Re}(\omega(x)\lambda) < 0; (-1)^k \operatorname{Re}((1+i)\omega(x)\lambda) > 0\}, \; k = 5,6$$

$$S_k = \{\lambda : (-1)^k \operatorname{Re}((1+i)\omega(x)\lambda) < 0; (-1)^k \operatorname{Re}(i\omega(x)\lambda) > 0\}, \; k = 7,8$$

Для нахождения асимптотики фундаментальных решений уравнения (1) в каждом из секторов $S_k\ \left(k=\overline{1,8}\right)$приведём следующую теорему

Теорема.

Пусть $p(x)\in C^3[0,1]$, $q_1(x)\in C^1[0,1]$, $p(x)>0$ действительная, а $q(x)$ комплекснозначная функция , тогда в каждом из секторов $S_k\ \left(k=\overline{1,8}\right)$асимптотика *линейно-независимых* решений уравнения (1) имеет вид:

$$\frac{d^s y_k(x,\lambda)}{dx^s}=\left[i^{m-1}\omega(x)\lambda\right]^s\omega^{-\frac{3}{2}}(x)\left[1+\frac{1}{\lambda}(i)^{1-m}\left(g(x)+f_s(x)\right)+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right]\exp\left[i^{m-1}\lambda\int_0^x\omega(\xi)d\xi\right]$$

$0<x<1,\ m=\overline{1,4};\ s=\overline{0,3};\ \lambda\in S_n\left(n=\overline{1,8}\right),\ |\lambda|\to+\infty,$ (2)

где

$$g(x)=\int_0^x\left[\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{\omega^3(\xi)}\left(\frac{d\omega(\xi)}{d\xi}\right)^2-\frac{1}{4}\frac{1}{\omega(\xi)}\cdot\frac{q(\xi)}{p(\xi)}\right]d\xi$$

$f_1(x)=5f(x),\ f_2(x)=f_4(x)=-f(x),\ f_3(x)=-3f(x),$

$$f(x)=\frac{1}{4\omega^2(x)}\frac{d\omega(x)}{dx}$$

Доказательство:

Введём следующие обозначения:

$$\begin{cases}y(x,\lambda)=y_1(x,\lambda)\\ \dfrac{dy_1(x,\lambda)}{dx}=\lambda y_2(x,\lambda)\\ \dfrac{dy_2(x,\lambda)}{dx}=\lambda y_3(x,\lambda)\\ \dfrac{dy_3(x,\lambda)}{dx}=\lambda y_4(x,\lambda),\qquad 0<x<1.\end{cases}\qquad (3)$$

Подставив (3) в уравнении (1) получим систему матричных уравнений вида

$$\frac{dY(x,\lambda)}{dx}=(\lambda A(x)+\frac{1}{\lambda}R(x))Y(x\lambda),\ (4)$$

где $Y(x,\lambda)$вектор-столбец, а $A(x),\ B(x)$квадратная матрица четвёртого порядка 4×4:

$$Y(x,\lambda)=\begin{pmatrix}y_1(x,\lambda)\\ y_2(x,\lambda)\\ y_3(x,\lambda)\\ y_4(x,\lambda)\end{pmatrix},\ A(x)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \dfrac{1}{ip(x)} & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$R(x)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-q(x)}{ip(x)} & \dfrac{1}{ip(x)} & 0 \end{pmatrix},\ 0<x<1.$$

Решение матричного уравнения (4) ищем в виде

$$Y(x,\lambda)=B(x)\left[E+\frac{1}{\lambda}S(x)+\frac{1}{\lambda^2}\Phi(x)\right]\beta(x,\lambda)\exp\left[\lambda\int_0^x\omega(\xi)d\xi\right],\ (5)$$

где

$$A(x)=\begin{pmatrix} b_{11}(x) & b_{12}(x) & b_{13}(x) & b_{14}(x) \\ b_{21}(x) & b_{22}(x) & b_{23}(x) & b_{24}(x) \\ b_{31}(x) & b_{32}(x) & b_{33}(x) & b_{34}(x) \\ b_{41}(x) & b_{42}(x) & b_{43}(x) & b_{44}(x) \end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\omega(x)=\begin{pmatrix} \omega_1(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_4(x) \end{pmatrix}$$

$S(x)=\left(S_{ij}(x)\right)_{i,j=\overline{1,4}}$, $\Phi(x)=\left(\varphi_{ij}(x)\right)_{i,j=\overline{1,4}}$, $\beta(x)=\left(\beta_{ij}(x)\right)_{i,j=\overline{1,4}}$.

Для нахождения матрицы $B(x)$сначала построим матрицу $T(x)=\left(t_{ij}(x)\right)_{i,j=4}$ так, чтобы она удовлетворяла условию

$$A(x)T(x)=T(x)\omega(x),\ 0<x<1.\ (6)$$

Учитывая (6) легко найти матрицу $T(x)$

$$T(x)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \omega_1(x) & \omega_2(x) & \omega_3(x) & \omega_4(x) \\ \omega_1^2(x) & \omega_2^2(x) & \omega_3^2(x) & \omega_4^2(x) \\ \omega_1^3(x) & \omega_2^3(x) & \omega_3^3(x) & \omega_4^3(x) \end{pmatrix}$$

Используя матрицу $T(x)$можно построить матрицу $T^{-1}(x)T'(x)$:

$$T^{-1}(x)T'(x)=\begin{pmatrix} -3 & 1+i & 1 & 1-i \\ 1-i & -3 & 1+i & 1 \\ 1 & 1-i & -3 & 1+i \\ 1+i & 1 & 1-i & -3 \end{pmatrix}\ (7)$$

Обозначим через $\Gamma(x)$ диагональную матрицу, главными диагональными элементами которой являются $\gamma_i(x)$, $\left(i=\overline{1,4}\right)$. Обозначим через $G(x)$матрицу, элементы главной дигонали которой равны нулю и удовлетворяющей условию

$$G(x)=\Gamma^{-1}(x)T^{-1}(x)T'(x)\Gamma(x)+\Gamma^{-1}(x)\Gamma'(x).\ (8)$$

Учитывая (7) и (8), получим $\gamma_i(x)=\omega^{-\frac{3}{2}}(x)$, $\left(i=\overline{1,4}\right)$.

Матрицу $B(x)$будем искать в виде

$$B(x)=T(x)\cdot\Gamma(x). \quad (9)$$

Учитывая (9) можно найти матрицу $B(x)$в виде

$$B(x)=\omega^{-\frac{3}{2}}(x)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ \omega_1(x) & \omega_2(x) & \omega_3(x) & \omega_4(x)\\ \omega_1^2(x) & \omega_2^2(x) & \omega_3^2(x) & \omega_4^2(x)\\ \omega_1^3(x) & \omega_2^3(x) & \omega_3^3(x) & \omega_4^3(x)\end{pmatrix}.$$

Учитывая $\Gamma(x)$и $T^{-1}(x)T'(x)$в (8), можно построить матрицу $G(x)$

$$G(x)=-\frac{1}{2\omega(x)}\cdot\frac{d\omega(x)}{dx}\begin{pmatrix}0 & 1+i & 1 & 1-i\\ 1-i & 0 & 1+i & 1\\ 1 & 1-i & 0 & 1+i\\ 1+i & 1 & 1-i & 0\end{pmatrix}$$

Если уравнение (4) сначала искать в виде

$$Y(x)=B(x)\cdot M(x,\lambda), \quad (10)$$

То для матрицы $M(x,\lambda)$получим уравнение

$$\frac{dM(x,\lambda)}{dx}=\left(\lambda\omega(x)-B^{-1}(x)B'(x)+\frac{1}{\lambda}B^{-1}(x)R(x)B(x)\right)M(x,\lambda) \qquad (11)$$

Решение матричного уравнения (11) ищем в виде

$$M(x,\lambda)=\left(E+\frac{1}{\lambda}S(x)+\frac{1}{\lambda^2}\Phi(x)\right)Z(x,\lambda) \quad (12)$$

Подставив (12) в уравнении (11) получим следующее уравнение

$$\left(E+\frac{1}{\lambda}S(x)+\frac{1}{\lambda^2}\Phi(x)\right)\frac{dZ(x,\lambda)}{dx}=\left[\left(\lambda\omega(x)+\omega(x)s(x)-B^{-1}(x)B'(x)\right)+\right.$$

$$\frac{1}{\lambda}\left(\omega(x)\Phi(x)-B^{-1}(x)B'(x)S(x)-S'(x)+B^{-1}(x)R(x)B(x)\right)+$$

$$\left.\frac{1}{\lambda^2}\left(B^{-1}(x)R(x)B(x)\left(S(x)+\frac{1}{\lambda}\Phi(x)\right)\right)-B^{-1}(x)B'(x)\Phi(x)-\Phi'(x)\right]Z(x,\lambda) \quad (13)$$

Учитывая матрицы $G(x)$ и $\omega(x)$все элементы матрицы $S(x)$, кроме диагональных, можно найти по формуле

$$\omega(x)S(x)-S(x)\omega(x)=G(x) \quad (14)$$

$$S_{ij}(x)=\frac{g_{ij}}{\omega_i(x)-\omega_j(x)}\ i\neq j \quad (15)$$

Таким образом , матрицу $S(x)$ можно записать в виде

$$S(x)=\begin{pmatrix} S_{11}(x) & -2i\,f(x) & f(x) & 2i\,f(x) \\ 2f(x) & S_{22}(x) & -2f(x) & i\,f(x) \\ f(x) & -2i\,f(x) & S_{33}(x) & 2i\,f(x) \\ 2f(x) & -i\,f(x) & -2\,f(x) & S_{44}(x) \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где

$$f(x)=\frac{1}{4\omega^2(x)}\frac{d\omega(x)}{dx}.$$

Далее через $N(x)=\left(n_{i\,j}\right)_{i\,j=\overline{1,4}}$ обозначим

$$N(x)=G(x)S(x)+S'(x)-B^{-1}(x)R(x)B(x) \quad (17)$$

Приравняв коэффициент при $\frac{1}{\lambda}$ в правой части (13) произведению $\Phi(x)\omega(x)$, получим $\omega(x)\Phi(x)-N(x)=\Phi(x)\omega(x)$ (18)

Из (18) видно, что равенство нулю элементов главной диагонали матрицы $S(x)$, определяемых (17) является необходимым. Учитывая вышесказанное, получим:

$$\frac{dS_{kk}(x)}{dx}+i^{1-k}\left(\frac{q(x)}{4\omega(x)p(x)}-\frac{5}{8\omega^3(x)}\left(\frac{d\omega(x)}{dx}\right)^2\right)=0,\ k=\overline{1,4}$$

Интегрируя последнее, получим:

$$S_{kk}(x)=+i^{1-k}\int_0^x\left[\frac{5}{8\omega^3(\tau)}\left(\frac{d\omega(\tau)}{d\tau}\right)^2-\frac{q(\tau)}{4\omega(\tau)p(\tau)}\right]d\tau,\ k=\overline{1,4} \quad (19)$$

Учитывая (17) , можно найти функции $n_{i\,j}(x)$($i,\,j=\overline{1,4}\ i\neq j$), отличные от элементов $n_{kk}(x)=0$, ($k=\overline{1,4}$):

$$n_{12}(x)=-\frac{1}{8\omega^3(x)}\left(\frac{d\omega(x)}{dx}\right)^2\left[(1+i)S_{22}-3i-1\right]-2i\frac{d\,f(x)}{dx}-\frac{q(x)}{4\omega(x)p(x)},$$

$$n_{13}(x)=-\frac{1}{8\omega^3(x)}\left(\frac{d\omega(x)}{dx}\right)^2\left[S_{33}(x)-4\right]-\frac{d\,f(x)}{dx}+\frac{q(x)}{4\omega(x)p(x)},$$

$$n_{14}(x)=-\frac{1}{8\omega^3(x)}\left(\frac{d\omega(x)}{dx}\right)^2\left[(1-i)S_{11}+3+1\right]+2\frac{d\,f(x)}{dx}+i\frac{q(x)}{4\omega(x)p(x)},$$

$$n_{21}(x)=-\frac{1}{8\omega^3(x)}\left(\frac{d\omega(x)}{dx}\right)^2\left[(1-i)S_{11}+3+1\right]+2\frac{d\,f(x)}{dx}+i\frac{q(x)}{4\omega(x)p(x)},$$

$$n_{23}(x)=-\frac{1}{8\omega^3(x)}\left(\frac{d\omega(x)}{dx}\right)^2\left[(1+i)S_{33}-3+i\right]-2\frac{d\,f(x)}{dx}+i\frac{q(x)}{4\omega(x)p(x)}$$

$$n_{24}(x)=-\frac{1}{8\omega^3(x)}\left(\frac{d\omega(x)}{dx}\right)^2\left[S_{44}(x)+4i\right]+i\frac{d\,f(x)}{dx}-i\frac{q(x)}{4\omega(x)p(x)}$$

$$n_{31}(x)=-\frac{1}{8\omega^3(x)}\left(\frac{d\omega(x)}{dx}\right)^2\left[S_{11}+4\right]+\frac{d\ f(x)}{dx}-\frac{q(x)}{4\omega(x)p(x)}$$

$$n_{32}(x)=-\frac{1}{8\omega^3(x)}\left(\frac{d\omega(x)}{dx}\right)^2\left[(1-i)S_{22}+1-3i\right]-2i\frac{d\ f(x)}{dx}+\frac{q(x)}{4\omega(x)p(x)}$$

$$n_{34}(x)=-\frac{1}{8\omega^3(x)}\left(\frac{d\omega(x)}{dx}\right)^2\left[(1+i)S_{44}+1+3i\right]+2i\frac{d\ f(x)}{dx}+\frac{q(x)}{4\omega(x)p(x)}$$

$$n_{41}(x)=-\frac{1}{8\omega^3(x)}\left(\frac{d\omega(x)}{dx}\right)^2\left[(1+i)S_{11}-3-i\right]+2\frac{d\ f(x)}{dx}-i\frac{q(x)}{4\omega(x)p(x)}$$

$$n_{42}(x)=-\frac{1}{8\omega^3(x)}\left(\frac{d\omega(x)}{dx}\right)^2\left[S_{22}-4i\right]-i\frac{d\ f(x)}{dx}+i\frac{q(x)}{4\omega(x)p(x)}$$

$$n_{43}(x)=-\frac{1}{8\omega^3(x)}\left(\frac{d\omega(x)}{dx}\right)^2\left[(1-i)S_{33}-3-i\right]-2\frac{d\ f(x)}{dx}-i\frac{q(x)}{4\omega(x)p(x)},$$

где

$$\frac{df(x)}{dx}=-\frac{1}{4\omega^3(x)}\frac{d^2\omega(x)}{dx^2}-\frac{1}{2\omega^3(x)}\left(\frac{d\omega(x)}{dx}\right)^2. \quad (20)$$

Учитывая найденнуюматрицу $N(x)$и (18) , можно найти функции $\varphi_{i\,j}(x)$, $(i,\ j=\overline{1,4}\ i\neq j)$:

$$\varphi_{i\,j}(x)=\frac{\eta_{i\,j}(x)}{\omega_i(x)-\omega_j(x)},\ (i,\ j=\overline{1,4}\ i\neq j).$$

Така как элементы главной диагонали матрицы $\Phi(x)$ являются произвольными непрерывно-дифференцируемыми функциями, то их можно подобрать в виде $\varphi_{i\,i}(x)=0$, $(i=\overline{1,4})$. Учитывая (14), (17) и (18) в (13), получим:

$$\left(E+\frac{1}{\lambda}S(x)+\frac{1}{\lambda^2}\Phi(x)\right)\frac{dZ(x,\lambda)}{dx}=\left[\lambda\omega(x)+s(x)\omega(x)+\frac{1}{\lambda}\Phi(x)\omega(x)+\right.$$

$$\left.\frac{1}{\lambda^2}\left(B^{-1}(x)R(x)B'(x)\left(S(x)+\frac{1}{\lambda}\Phi(x)\right)-B^{-1}(x)B'(x)\Phi(x)-\Phi'(x)\right)\right]Z(x,\lambda). \quad (21)$$

Умножив обе части матричного уравнения (21) на матрицу $\left(E+\frac{1}{\lambda}S(x)+\frac{1}{\lambda^2}\Phi(x)\right)^{-1}$, получим:

$$\frac{dZ(x,\lambda)}{dx}=\lambda\omega(x)Z(x,\lambda)+\frac{1}{\lambda^2}C(x,\lambda)Z(x,\lambda) \quad (22)$$

где

$$C(x,\lambda)=\left(E+\frac{1}{\lambda}S(x)+\frac{1}{\lambda^2}\Phi(x)\right)^{-1}\left[B^{-1}(x)R(x)B(x)\left(S(x)+\frac{1}{\lambda}\Phi(x)\right)-B^{-1}(x)B'(x)\Phi(x)-\Phi'(x)\right] \quad (23)$$

В силу условий теоремы видно, что в каждом из секторов $S_k\ \left(k=\overline{1,8}\right)$ для больших значениях $|\lambda|$ функция $C(x,\lambda)$, полученная из формулы (23) является ограниченной. Решение уравнения (22) ищется в виде

$$Z(x,\lambda)=\eta(x,\lambda)\exp\left[\lambda\int_0^x\omega(\xi)d\xi\right]. \quad (24)$$

Подставив (24) в (22) и записав полученное уравнение в координатах, будем иметь

$$\frac{d\eta_{ij}(x,\lambda)}{dx}=\lambda\left[\omega_i(x)-\omega_j(x)\right]\eta_{ij}(x,\lambda)+\frac{1}{\lambda^2}\sum_{m=1}^{4}C_{im}(x,\lambda)\eta_{mj}(x,\lambda). \quad (25)$$

Проинтегрировав линейное уравнение (25) , получим

$$\eta_{ij}(x,\lambda)=\delta_{ij}+\frac{1}{\lambda^2}\int_{x_{ij}}^{x}\exp\left[\lambda G_{ij}(\xi,x)\right]\sum_{m=1}^{4}C_{im}(\xi,\lambda)\eta_{mj}(\xi,\lambda)d\xi \quad (26)$$

где

$x_{ij}\in\{0;1\}$, $G_{ij}(\xi,x)=\int_{\xi}^{x}\left(\omega_i(\eta)-\omega_j(\eta)\right)d\eta$, δ_{ij} -символ Кронекера.

Здесь числа χ_{ij} нужно выбрать так, чтобы в каждом из секторов $S_k\left(k=\overline{1,8}\right)$ выполнялось неравенство $\operatorname{Re}\lambda G_{ij}(\xi,x)\le 0$, $i=\overline{1,4}$, т.е. следующим образом:

в секторах $S_k\left(k=1,2\right)$

$$\chi_{12}=\chi_{13}=\chi_{14}=\chi_{23}=\chi_{24}=\chi_{43}=0,$$

$$\chi_{21}=\chi_{31}=\chi_{41}=\chi_{32}=\chi_{34}=\chi_{42}=1;$$

в секторах $S_k\left(k=3,4\right)$

$$\chi_{21}=\chi_{13}=\chi_{14}=\chi_{23}=\chi_{24}=\chi_{34}=0,$$

$$\chi_{12}=\chi_{31}=\chi_{41}=\chi_{32}=\chi_{42}=\chi_{43}=1;$$

в секторах $S_k\left(k=5,6\right)$

$$\chi_{21}=\chi_{31}=\chi_{14}=\chi_{23}=\chi_{24}=\chi_{34}=0$$

$$\chi_{12}=\chi_{13}=\chi_{41}=\chi_{32}=\chi_{42}=\chi_{43}=1;$$

в секторах $S_k\left(k=7,8\right)$

$$\chi_{21}=\chi_{31}=\chi_{41}=\chi_{32}=\chi_{24}=\chi_{34}=0$$

$$\chi_{12}=\chi_{13}=\chi_{14}=\chi_{23}=\chi_{42}=\chi_{43}=1.$$

Учитывая выбранные значения для $\varphi_{ij}(x)$, $i,j=\overline{1,4}$ $i\neq j$ в каждом из секторов, интегральное уравнение (26) можно записать в виде:

$$\eta_{ii}(x,\lambda)=1+\frac{1}{\lambda^2}\int_0^x\sum_{m=1}^{4}C_{im}(\xi,\lambda)\eta_{mj}(\xi,\lambda)d\xi$$

$$\eta_{ij}(x,\lambda)=\frac{1}{\lambda^2}\int_0^x\exp\lambda\int_{\xi}^{x}\left(\omega_i(\eta)-\omega_j(\eta)\right)d\eta\sum_{m=1}^{4}C_{im}(\xi,\lambda)\eta_{mj}(\xi,\lambda)d\xi. \quad (27)$$

При $\operatorname{Re}\lambda(\omega_i(x)-\omega_j(x))>0$ решим систему интегральных уравнений (27) методом последовательных приближений. В последовательных приближениях для $\eta_{ij}(x,\lambda)$ введём обозначения $\beta_{ij,n+1}=\eta_{ij,n+1}-\eta_{ij,n}$. В таком случае получим следующие формулы:

$\beta_{ii,1}(x,\lambda)=1$; $\beta_{ij,1}(x,\lambda)=0$; $i\neq j$;

$$\beta_{ij,n+1}(x,\lambda)=\frac{1}{\lambda^2}\int_0^x \exp\lambda\int_\xi^x(\omega_i(\eta)-\omega_j(\eta))d\eta\sum_{m=1}^4 C_{im}(\xi,\lambda)\eta_{mj}(\xi,\lambda)d\xi.$$

Если $\operatorname{Re}\lambda(\omega_i(x)-\omega_j(x))\le 0$, $n=1,2,3,...$ $\lambda\in S_k\ (k=\overline{1,8})$

$$\beta_{ij,n+1}(x,\lambda)=-\frac{1}{\lambda^2}\int_x^1 \exp\lambda\int_\xi^x(\omega_i(\eta)-\omega_j(\eta))d\eta\sum_{m=1}^4 C_{im}(\xi,\lambda)\eta_{mj}(\xi,\lambda)d\xi$$

При $\operatorname{Re}\lambda(\omega_i(x)-\omega_j(x))>0$, $n=1,2,3,...$ $\lambda\in S_k\ (k=\overline{1,8})$ (28)

$\exists M>0$, что при $\lambda\in S_k\ (k=\overline{1,8})$ будет верно неравенство

$$\sum_{m=1}^4\int_0^1|C_{im}(x,\lambda)dx|\le M,\ n=1,2,3,4,\ |\lambda|\to\infty.$$

$|\beta_{ii,1}(x,\lambda)|=1$; $|\beta_{ij,1}(x,\lambda)|=0$; $i\neq j$;

$$\beta_{ij,2}(x,\lambda)\le\frac{1}{|\lambda|^2}\int_0^1\sum_{m=1}^4|C_{im}(\xi,\lambda)||\beta_{mj,n}(x,\lambda)||d\xi|\le\ldots\le$$

$$\le\left(\frac{M}{|\lambda|^2}\right)^{n-1}\frac{1}{|\lambda|^2}\int_0^1\sum_{m=1}^4|C_{im}(\xi,\lambda)||d\xi|\le\left(\frac{M}{|\lambda|^2}\right)^n\ n=1,2,3,...\ \lambda\in S_k\ (k=\overline{1,8}).$$

Таким образом, получаем числовой ряд,

$$1+\frac{M}{|\lambda|^2}+\left(\frac{M}{|\lambda|^2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{M}{|\lambda|^2}\right)^n+\ldots,\ (29)$$

являющийся мажорантой фунуционального ряда

$$\sum_{n=1}^\infty\beta_{ij,n}(x,\lambda).\ (30)$$

Таккак числовой ряд (29) сходится, то по теореме Вейерштрасса функционал (30) абсолютно и равномерно сходится.

Таким образом, решение интегрального уравнения (27) ищется в виде

$$\eta(x,\lambda)=\delta_{ij}+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),\ |\lambda|\to+\infty,\ \lambda\in S_k\ (k=\overline{1,8}).$$

Решение (5) в координатах имеет вид

$$y_{ij}(x,\lambda)=\left[b_{ij}(x)+\frac{1}{\lambda}\sum_{m=1}^{4}b_{im}(x)S_{mj}(x)+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right]\exp\left[\lambda\int_0^x\omega_j(\xi)d\xi\right] \quad (31)$$

$i,j=\overline{1,4}$, $|\lambda|\to\infty$, $\lambda\in S_k\left(k=\overline{1,8}\right)$

Вычислив матрицу $B(x)S(x)$, получим

$$B(x)S(x)=$$

$$=\omega^{-\frac{3}{2}}(x)\begin{pmatrix} g(x)+5f(x) & -i(g(x)+5f(x)) & -(g(x)+5f(x)) & i(g(x)+5f(x)) \\ \omega(x)(g(x)-f(x)) & \omega(x)(g(x)-f(x)) & \omega(x)(g(x)-f(x)) & \omega(x)(g(x)-f(x)) \\ \omega^2(x)(g(x)-3f(x)) & i\omega^2(x)(g(x)-3f(x)) & -\omega^2(x)(g(x)-3f(x)) & -i\omega^2(x)(g(x)-3f(x)) \\ \omega^3(x)(g(x)-f(x)) & -\omega^3(x)(g(x)-f(x)) & \omega^3(x)(g(x)-f(x)) & -\omega^3(x)(g(x)-f(x)) \end{pmatrix}$$

Учитывая (5) или (31), элементы матрицы $B(x)S(x)$ matrisinin elementlərini (5) yaxud (31) асимптотика частных решений уравнения, зависящего от параметра ищется в виде

$$y_k(x,\lambda)=y_{1k}(x,\lambda),$$

$$y_k'(x,\lambda)=y_{2k}(x,\lambda),$$

$$y_k''(x,\lambda)=y_{3k}(x,\lambda),$$

$$y_k'''(x,\lambda)=y_{4k}(x,\lambda)\ \left(k=\overline{1,4}\right).$$

Вычислив Вронскиан из этих решений получим,

$$V(y_1,y_2,y_3,y_4)=-12i\lambda^6\left[1+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right],$$

$|\lambda|\to+\infty$, $\lambda\in S_k\left(k=\overline{1,8}\right)$.

Это показывает линейную независимость частных решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Расулов М.Л. -Метод контурного интеграла// М.- Наука- 1964, -462 С.
2. Расулов М.Л.- Применение вычетного метода к решению задач дифференциальных уравнений // Баку, Изд. Элм, 1989, 328 С.
3. Мамедов Ю.А., Ахмедов С.З. -Исследование характеристического определителя, связанного с решением спектральной задачи// Вестник Бакинского Государственного Университета, серия физико-математических наук.- 2005.- №2.- С.5-12
4. С.З. Ахмедов Нахождение асимптотики нулей характеристического детерминанта уравнения четвёртого порядка , зависящего от комплексного параметра.Вести Бакинского Государственного Университета, серия физико-математических наук, 2018, №2, стр. 97-100.

JOURNAL OF BAKU ENGINEERING UNIVERSITY- MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
2020. Volume 4, Number 2 *Pages 79-94*

УДК 517.977.56

АНАЛОГ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА И НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОДНОЙ ДВУХЭТАПНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ, ОПИСЫВАЕМАЯ СИСТЕМАМИ ДВУМЕРНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

К.Б.МАНСИМОВ, Т.Ф.МАМЕДОВА

Бакинский государственный университет

Институт Систем Управления НАН Азербайджана

kamilbmansimov@gmail.com, mammadovaturkan 1@gmail.com

РЕЗЮМЕ

В статье ставится и изучается одна двухэтапная задача оптимального управления, описываемая совокупностью двух систем разностных уравнений. При предположении открытости области управления установлены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

Ключевые слова: аналог уравнения Эйлера, разностное уравнение типа Вольтерра, дискретный аналог гиперболического уравнения, двухэтапная задача оптимального управления, необходимое условие оптимальности первого и второго порядков.

AN ANALOGUE OF THE EULER EQUATION AND THE NECESSARY OPTIMALITY CONDITION OF THE SECOND ORDER IN ONE TWO-STAGE OPTIMAL CONTROL PROBLEM DESCRIBED BY THE SYSTEMS OF TWO-DIMENSIONAL DIFFERENCE EQUATIONS

ABSTRACT

In paper stabilize and retrieve the two-dimensional axis of optimal control, describing the two-dimensional system. When opting for an overlay area set up, the optimization of the override and exit pad.

Keywords: Analog of the Euler equation, the voltage distribution of the type Volterra, the discrete analogue hyperbolic antenna, the two-dimensional optical control, the nonlinear optimization of the joint and the voltage.

İKİÖLÇÜLÜ FƏRQ TƏNLİKLƏR SİSTEMİ İLƏ TƏSVİR İKİ MƏRHƏLƏLİ BİR DİSKRET OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ EYLER TƏNLİYİNİN ANALOQU VƏ OPTİMALLIQ ÜÇÜN İKİNCİ TƏRTİB ZƏRURİ ŞƏRTLƏR

XÜLASƏ

İşdə ikiölçülü fərq tənliklər sistemi ilə təsvir olunan iki mərhələli bir diskret optimal idarəetmə məsələsi qoyulmuş və öyrənilmişdir. İrarəetmə oblastının açıq olması fərziyyəsi daxilində optimallıq üçün birinci və ikinci tərtib zəruri şərtlər isbat olunmuşdur.

Açar sözlər: Eyler tənliyinin analoqu, Volterra tipi fərq tənliyi, hiperbolik tənliyin diskret analoqu, iki mərhələli optimal idarəetmə məsələsi, birinci və ikinci cərgələrin optimallığı üçün zəruri şərt.

Введение. В работах [1, 2] изучены задачи оптимального управления дискретными двухпараметрическими системами, описываемые системами двумерных разностных уравнений типа Вольтерра. Но многие процессы являются многоэтапными или составными (см., например, [3-5]).

Исходя из этого в предлагаемой работе рассматривается одна двухэтапная задача оптимального управления, описываемая системами двух разностных уравнений, первая из которых есть дискретный аналог гиперболического уравнения с краевыми условиями

Гурса, а вторая является разностным аналогом гиперболического интегро-дифференциального уравнения типа Вольтерра. При предложения открытости областей управления получены ряд необходимых условий оптимальности первого и второго порядков.

Постановка задачи. Пусть $U \subset R^r$ и$V \subset R^q$. заданные непустые, ограниченные и открытые множества, $t_0, t_1, t_2, x_0, x_1, -$заданные числа, причем разности$t_1 - t_0$,$t_2 - t_1$ и $x_1 - x_0 -$ есть натуральные числа, $u(t,x), v(t,x) - r$и q-мерные соответственно,дискретные управляющие вектор функции.

Рассмотрим задачу нахождения минимального значения терминального функционала

$$J(u,v) = \varphi_1\big(z(t_1,x_1)\big) + \varphi_2\big(y(t_2,x_1)\big) \quad (1)$$

при ограничениях

$$u(t,x) \in U \subset R^r, (t,x) \in D_1 = \{(t,x): t = t_0, t_0+1, \dots, t_1 - 1; x = x_0, x_0+1, \dots, x_1 - 1\}, \quad (2)$$

$$v(t,x) \in V \subset R^q, (t,x) \in D_2 = \{(t,x): t = t_1, t_1+1, \dots, t_2 - 1; x = x_0, x_0+1, \dots, x_1 - 1\}. \quad (3)$$

$$z(t+1,x+1) = f\big(t,x,z(t,x),u(t,x)\big), (t,x) \in D_1, (4)$$

$$z(t_0,x) = a(x), x \in X = \{x = x_0, x_0+1, \dots, x_1\}, (5)$$

$$z(t,x_0) = b_1(t), t \in T_1 = \{t_0, t_0+1, \dots, t_1\},$$

$$a(x_0) = b(t_0),$$

$$y(t+1,x+1) = \sum_{\tau=t_1}^{t} \sum_{s=x_0}^{x} g\big(t,x,\tau,s,y(\tau,s),v(\tau,s)\big), (t,x) \in D_2, (6)$$

$$y(t_1,x) = G\big(z(t_1,x)\big), x \in X, (7)$$

$$y(t,x_0) = b_2(t), t \in T_2 = \{t_1, t_1+1, \dots, t_2\},$$

$$G\big(z(t_1,x_0)\big) = b_2(t_1).$$

Здесь $f(t,x,z,u)$ $(g(t,\tau,y,v)) -$ заданная$n(m)$-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (z,u) при всех $(t,x)\big((t,x,\tau,s)\big)((y,v))$,$a(x), b_1(t), b_2(t)$ −заданные дискретные вектор-функции соответствующих размерностей,$G(z)$ −заданная дважды непрерывно дифференцируемая m-мерная вектор-функция,$\varphi_1(z), \varphi_2(y)$ −заданные дважды непрерывно-дифференцируемые скалярные функции.

Каждую пару $(u^0(t,x), v^0(t,x))$, управляющих функций с вышеприведенными свойствами, назовем допустимым управлением.

Допустимое управление $(u^0(t,x), v^0(t,x))$ доставляющее минимальное значение функционалу (1), при ограничениях (2)-(7), назовем оптимальным управлением.

Специальное приращение функционала качества.

Считая$(u^0(t,x), v^0(t,x), z^0(t,x), y^0(t,x))$ фиксированным допустимымпроцессом, через $(\bar{u}(t,x) = u^0(t,x) + \Delta u(t,x), \bar{v}(t,x) = v^0(t,x) + \Delta v(t,x), \bar{z}(t,x) = z^0(t,x) + \Delta z(t,x), \bar{y}(t,x) = y^0(t,x) + \Delta y(t,x)$обозначим произвольный допустимый процесс.

Тогда приращение $(\Delta z(t,x), \Delta y(t,x))$ состояния$(z^0(t,x), y^0(t,x))$ будет решением следующей разностной краевой задачи:

$$\Delta z(t+1,x+1) = f\big(t,x,\bar{z}(t,x),\bar{u}(t,x)\big) - f\big(t,x,z^0(t,x),u^0(t,x)\big)\Big), (8)$$

$$\Delta z(t_0,x) = 0, x \in X, (9)$$

$$\Delta z(t,x_0) = 0, t \in T_1,$$

$$\Delta y(t+1,x+1) = \sum_{\tau=t_1}^{t}\sum_{s=x_0}^{x}\Big(g\big(t,x,\tau,s,\bar{y}(\tau,s),\bar{v}(\tau,s)\big) - g\big(t,x,\tau,s,y(\tau,s),v(\tau,s)\big)\Big),$$

$$(t,x) \in D_2, (10)$$

$$\Delta y(t_1,x) = G\big(\bar{z}(t_1,x)\big) - G\big(z^0(t_1,x)\big), x \in X, (11)$$

$$\Delta y(t,x_0) = 0, t \in T_2.$$

Пусть $p^0(t,x), q^0(t,x)$ пока произвольные nи m-мерные соответственно, вектор-функции. Из (8) и (10) получим справедливость тождеств

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0\prime}(t,x)\Delta z(t+1,x+1) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0\prime}(t,x)\big[f\big(t,x,\tau,s,\bar{z}(\tau,s),\bar{u}(\tau,s)\big) -$$

$$- f\big(t,x,\tau,s,z^0(\tau,s),u^0(\tau,s)\big)\big]\Big], (12)$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0\prime}(t,x)\Delta y(t+1,x+1) = \sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Bigg[\sum_{\tau=t_1}^{t}\sum_{s=x_0}^{x} q^{0\prime}(t,x)\big[g\big(t,x,\tau,s,\bar{y}(\tau,s),\bar{v}(\tau,s)\big) -$$

$$- g\big(t,x,\tau,s,y^0(\tau,s),v^0(\tau,s)\big)\big]\Bigg]. (13)$$

Используя двумерный аналог теоремы Фубини (см., напр., [2,6,7]), получим, что

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Bigg[\sum_{\tau=t_1}^{t}\sum_{s=x_0}^{x} q^{0\prime}(t,x)\big[g\big(t,x,\tau,s,\bar{y}(\tau,s),\bar{v}(\tau,s)\big) - g\big(t,x,\tau,s,y^0(\tau,s),v^0(\tau,s)\big)\big]\Bigg] =$$

$$= \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Bigg[\sum_{\tau=t}^{t_2}\sum_{s=x}^{x_1} q^{0\prime}(\tau,s)\big[g\big(\tau,s,t,x,\bar{y}(\tau,s),\bar{v}(\tau,s)\big) - g\big(t,x,\tau,s,y^0(\tau,s),v^0(\tau,s)\big)\big]\Bigg]. (14)$$

Введя обозначения

$$H(t,x,z,u,p^0) = p^{0\prime}(t,x) f\big(t,x,z(t,x),u(t,x)\big),$$

$$M(t,x,y,v,q^0) = \sum_{\tau=t}^{t_2}\sum_{s=x}^{x_1} q^{0\prime}(\tau,s) g\big(\tau,s,t,x,y(t,x),v(t,x)\big),$$

запишем приращение функционала качества (1), учитывая введенные обозначения и тождества (12)-(14). Имеем

$$\Delta J(u^0,v^0) = J(\bar{u},\bar{v}) - J(u^0,v^0) = \Big(\varphi_1\big(\bar{z}(t_1,x_1)\big) - \varphi_1\big(z^0(t_1,x_1)\big)\Big) + \Big(\varphi_2\big(\bar{y}(t_2,x_1)\big) - \varphi_2\big(y^0(t_2,x_1)\big)\Big) +$$

$$+ \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0\prime}(t,x)\Delta z(t+1,x+1) - (15)$$

$$- \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\big[H(t,x,\bar{z}(t,x),\bar{u}(t,x),p^0(t,x)) - H\big(t,x,z^0(t,x),u^0(t,x),p^0(t,x)\big)\big] +$$

$$+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t,x)\Delta y(t+1,x+1)-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\big[M\big(t,x,\bar{y}(t,x),\bar{v}(t,x),q^0(t,x)\big)-$$

$$-M\big(t,x,y^0(t,x),v^0(t,x),p^0(t,x)\big)\big].$$

Займемся преобразованием слагаемых

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(t,x)\Delta z(t+1,x+1)\,, (16)$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t,x)\Delta y(t+1,x+1)\ . (17)$$

Сделая замену переменных $t+1=\alpha, x+1=\beta$ из (16) получим, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(t,x)\Delta z(t+1,x+1)=\sum_{t=t_0+1}^{t_1}\sum_{x=x_0+1}^{x_1} p^{0'}(t-1,x-1)\Delta z(t,x)=$$

$$=\sum_{x=x_0+1}^{x_1} p^{0'}(t_1-1,x-1)\Delta z(t_1,x)-\sum_{x=x_0+1}^{x_1} p^{0'}(t_0-1,x-1)\Delta z(t_0,x)+ \quad (18)$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0+1}^{x_1} p^{0'}(t-1,x-1)\Delta z(t,x)=p^{0'}(t_1-1,x_1-1)\Delta z(t_1,x_1)-$$

$$-p^{0'}(t_1-1,x_0-1)\Delta z(t_1,x_0)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(t_1-1,x-1)\Delta z(t_1,x)-p^{0'}(t_0-1,x_1-1)\Delta z(t_0,x_1)+$$

$$-p^{0'}(t_0-1,x_0-1)\Delta z(t_0,x_0)-\sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(t_0-1,x-1)\Delta z(t_0,x)+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1} p^{0'}(t-1,x_1-1)\Delta z(t,x_1)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1} p^{0'}(t-1,x_0-1)\Delta z(t,x_0)+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(t-1,x-1)\Delta z(t,x)=p^{0'}(t_1-1,x_1-1)\Delta z(t_1,x_1)+$$

$$+\sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(t_1-1,x-1)\Delta z(t_1,x)+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1} p^{0'}(t-1,x_1-1)\Delta z(t,x_1)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(t-1,x-1)\Delta z(t,x)\,.$$

Далее аналогичным образом, учитывая краевые условия (7) из (17) получаем, что

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t,x)\Delta y(t+1,x+1)=\sum_{t=t_1+1}^{t_2}\sum_{x=x_0+1}^{x_1} q^{0'}(t-1,x-1)\Delta y(t,x)=$$

$$=\sum_{x=x_0+1}^{x_1} q^{0'}(t_2-1,x-1)\Delta y(t_2,x)-\sum_{x=x_0+1}^{x_1} q^{0'}(t_1-1,x-1)\Delta y(t_1,x)+$$

$$+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0+1}^{x_1} q^{0'}(t-1,x-1)\Delta y(t,x) = q^{0'}(t_2-1,x_1-1)\Delta y(t_2,x_1) -$$

$$-q^{0'}(t_2-1,x_0-1)\Delta y(t_2,x_0) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t_2-1,x-1)\Delta y(t_2,x) -$$

$$-q^{0'}(t_1-1,x_1-1)\Delta y(t_1,x_1) + q^{0'}(t_1-1,x_0-1)\Delta y(t_1,x_0) -$$

$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t_1-1,x-1)\Delta y(t_1,x) + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} q^{0'}(t-1,x_1-1)\Delta y(t,x_1) -$$

$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t-1,x_0-1)\Delta y(t,x_0) - \sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t-1,x-1)\Delta y(t,x) =$$

$$= q^{0'}(t_2-1,x_1-1)\Delta y(t_2,x_1) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t_2-1,x-1)\Delta y(t_2,x) -$$

$$-q^{0'}(t_1-1,x_1-1)\Delta y(t_1,x_1) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t_1-1,x-1)\Delta y(t_1,x) - \quad (19)$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1} q^{0'}(t-1,x_1-1)\Delta y(t,x_1) + \sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t-1,x-1)\Delta y(t,x)\,.$$

Учитывая тождества (18), (19) формула приращения (15) критерия качества записывается в виде:

$$\Delta J(u^0,v^0) = \left(\varphi_1\left(\bar{z}(t_1,x_1)\right) - \varphi_1\left(z^0(t_1,x_1)\right)\right) + \left(\varphi_2\left(\bar{y}(t_2,x_1)\right) - \varphi_2\left(y^0(t_2,x_1)\right)\right) +$$

$$+p^{0'}(t_1-1,x_1-1)\Delta z(t_1,x_1) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(t_1-1,x-1)\Delta z(t_1,x) +$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1} p^{0'}(t-1,x_1-1)\Delta z(t,x_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(t-1,x-1)\Delta z(t,x) +$$

$$+q^{0'}(t_2-1,x_1-1)\Delta y(t_2,x_1) - q^{0'}(t_1-1,x_1-1)\Delta y(t_1,x_1) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t_2-1,x-1)\Delta y(t_2,x) -$$

$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t_1-1,x-1)\Delta y(t_1,x) + \sum_{t=t_0}^{t_2-1} q^{0'}(t-1,x_1-1)\Delta y(t,x_1) +$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t-1,x-1)\Delta y(t,x) -$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[H(t,x,\bar{z}(t,x),\bar{u}(t,x),p^0(t,x)) - H\left(t,x,z^0(t,x),u^0(t,x),p^0(t,x)\right)\right] -$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[M\left(t,x,\bar{y}(t,x),\bar{v}(t,x),q^0(t,x)\right) - M\left(t,x,y^0(t,x),v^0(t,x),q^0(t,x)\right)\right]. \quad (20)$$

Поскольку

$$\Delta y(t_1,x)=G\big(\bar z(t_1,x)\big)-G\big(z^0(t_1,x)\big),$$

то формула приращения (20) может быть записана в виде

$$\Delta J(u^0,v^0)=\Big(\varphi_1\big(\bar z(t_1,x_1)\big)-\varphi_1\big(z^0(t_1,x_1)\big)\Big)+\Big(\varphi_2\big(\bar y(t_2,x_1)\big)-\varphi_2\big(y^0(t_2,x_1)\big)\Big)+$$
$$+p^{0'}(t_1-1,x_1-1)\Delta z(t_1,x_1)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}p^{0'}(t_1-1,x-1)\Delta z(t_1,x)+$$
$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}p^{0'}(t-1,x_1-1)\Delta z(t,x_1)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}p^{0'}(t-1,x-1)\Delta z(t,x)+$$
$$+q^{0'}(t_2-1,x_1-1)\Delta y(t_2,x_1)-q^{0'}(t_1-1,x_1-1)\Big(G\big(\bar z(t_1,x)\big)-G\big(z^0(t_1,x)\big)\Big)+$$
$$+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}q^{0'}(t_2-1,x-1)\Delta y(t_2,x)-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}q^{0'}(t_1-1,x-1)\Big(G\big(\bar z(t_1,x)\big)-G\big(z^0(t_1,x)\big)\Big)+$$
$$+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}q^{0'}(t-1,x_1-1)\Delta y(t,x_1)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}q^{0'}(t-1,x-1)\Delta y(t,x)-$$
$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\big[H(t,x,\bar z(t,x),\bar u(t,x),p^0(t,x))-H\big(t,x,z^0(t,x),u^0(t,x),p^0(t,x)\big)\big]-$$
$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\big[M\big(t,x,\bar y(t,x),\bar v(t,x),q^0(t,x)\big)-M\big(t,x,y^0(t,x),v^0(t,x),q^0(t,x)\big)\big].\quad(21)$$

Введя обозначение

$$N\big(x,z(t_1,x)\big)=q^{0'}(t_1-1,x-1)G\big(z(t_1,x)\big),$$

а затем используя формулу Тейлора, формула приращения (21) записывается в виде

$$\Delta J(u^0,v^0)=\frac{\partial\varphi'_1\big(z^0(t_1,x_1)\big)}{\partial z}\Delta z(t_1,x_1)+\frac{1}{2}\Delta z'(t_1,x_1)\frac{\partial^2\varphi_1\big(z^0(t_1,x_1)\big)}{\partial z^2}\Delta z(t_1,x_1)+$$
$$+o_1(\|\Delta z(t_1,x_1)\|^2)+\frac{\partial\varphi'_2\big(y^0(t_2,x_1)\big)}{\partial y}\Delta y(t_2,x_1)+\frac{1}{2}\Delta y'(t_2,x_1)\frac{\partial^2\varphi_2\big(z^0(t_2,x_1)\big)}{\partial y^2}\Delta y(t_2,x_1)+$$
$$+o_2(\|\Delta y(t_2,x_1)\|^2)+p^{0'}(t_1-1,x_1-1)\Delta z(t_1,x_1)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}p^{0'}(t_1-1,x-1)\Delta z(t_1,x)+$$
$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}p^{0'}(t-1,x_1-1)\Delta z(t,x_1)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}p^{0'}(t-1,x-1)\Delta z(t,x)-$$
$$-N'_z\big(x_1,z^0(t_1,x_1)\big)\Delta z(t_1,x_1)-\frac{1}{2}\Delta z'(t_1,x_1)N_{zz}\big(x_1,z^0(t_1,x_1)\big)\Delta z(t_1,x_1)-o_3(\|\Delta z(t_1,x_1)\|^2)+$$
$$+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}q^{0'}(t_2-1,x)\Delta y(t_2,x)-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}N'_z\big(x_1,z^0(t_1,x)\big)\Delta z(t_1,x)-$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Delta z'(t_1,x)N_{zz}\big(x,z^0(t_1,x)\big)\Delta z(t_1,x)-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}o_4(\|\Delta z(t_1,x)\|^2)+$$

$$+\sum_{t=t_1}^{t_2-1} q^{0'}(t-1,x_1-1)\Delta y(t,x_1)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{0'}(t-1,x-1)\Delta y(t,x)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[H_z'(t,x,z^0(t,x),u^0(t,x),p^0(t,x))-H_u'\left(t,x,z^0(t,x),u^0(t,x),p^0(t,x)\right)\right]\Delta u(t,x)-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}(\Delta z'(t,x)H_{zz}(t,x,z^0(t,x),u^0(t,x),p^0(t,x))\Delta z(t,x)+$$

$$+2\Delta u'(t,x)H_{uz}(t,x,z^0(t,x),u^0(t,x),p^0(t,x))\Delta z(t,x)+$$

$$+\Delta u'(t,x)H_{uu}(t,x,z^0(t,x),u^0(t,x),p^0(t,x))\Delta u(t,x)\Big)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_5((\|\Delta z(t,x)\|+\|\Delta y(t,x)\|)^2)-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[M_y'\left(t,x,y^0(t,x),v^0(t,x),q^0(t,x)\right)\Delta y(t,x)+M_v'\left(t,x,y^0(t,x),v^0(t,x),q^0(t,x)\right)\Delta v(t,x)\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left(\Delta y'(t,x)M_{yy}(t,x,y^0(t,x),v^0(t,x),q^0(t,x)\right)\Delta y(t,x)+$$

$$+2\Delta v'(t,x)H_{vy}(t,x,y^0(t,x),v^0(t,x),q^0(t,x))\Delta y(t,x)+$$

$$+\Delta v'(t,x)H_{vv}(t,x,y^0(t,x),v^0(t,x),q^0(t,x))\Delta v(t,x)\Big)-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_6((\|\Delta y(t,x)\|+\|\Delta v(t,x)\|)^2). \quad (22)$$

Предположим, что до сих пор являющиеся произвольными вектор функциями $p^0(t,x), q^0(t,x)$ удовлетворяют соотношениям

$$p^0(t-1,x-1)=H_z\left(t,x,z^0(t,x),u^0(t,x),p^0(t,x)\right), \quad (23)$$

$$p^0(t_1-1,x-1)=N_z\left(x,z^0(t_1,x)\right),$$

$$p^0(t_1-1,x_1-1)=-\frac{\partial\varphi_1\left(z^0(t_1,x_1)\right)}{\partial z}+N_z\left(x_1,z^0(t_1,x_1)\right), \quad (24)$$

$$q^0(t-1,x-1)=M_y\left(t,x,y^0(t,x),v^0(t,x),q^0(t,x)\right),$$

$$q^0(t_2-1,x-1)=0, \quad (25)$$

$$q^0(t-1,x_1-1)=0,$$

$$q^0(t_2-1,x_1-1)=-\frac{\partial\varphi_2\left(y^0(t_2,x_1)\right)}{\partial y}. \quad (26)$$

Тогда формула приращения (22) функционала качества примет вид

$$\Delta J(u^0,v^0)=-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} H_u'\left(t,x,z^0(t,x),u^0(t,x),p^0(t,x)\right)\Delta u(t,x)-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} M_v'\left(t,x,y^0(t,x),v^0(t,x),q^0(t,x)\right)\Delta v(t,x)+$$

$$+\frac{1}{2}\Delta z'(t_1,x_1)\frac{\partial^2\varphi_1\left(z^0(t_1,x_1)\right)}{\partial z^2}\Delta z(t_1,x_1)+\frac{1}{2}\Delta y'(t_2,x_1)\frac{\partial^2\varphi_2\left(z^0(t_2,x_1)\right)}{\partial y^2}\Delta y(t_2,x_1)-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}(\Delta z'(t,x)H_{zz}(t,x,z^0(t,x),u^0(t,x),p^0(t,x))\Delta z(t,x)+$$
$$+2\Delta u'(t,x)H_{uz}(t,x,z^0(t,x),u^0(t,x),p^0(t,x))\Delta z(t,x)+$$
$$+\Delta u'(t,x)H_{uu}(t,x,z^0(t,x),u^0(t,x),p^0(t,x))\Delta u(t,x))-$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}(\Delta y'(t,x)M_{yy}(t,x,y^0(t,x),v^0(t,x),q^0(t,x))\Delta y(t,x)+$$
$$+2\Delta v'(t,x)H_{vy}(t,x,y^0(t,x),v^0(t,x),q^0(t,x))\Delta y(t,x)+$$
$$+\Delta v'(t,x)H_{vv}(t,x,y^0(t,x),v^0(t,x),q^0(t,x))\Delta v(t,x))+$$
$$+o_1(\|\Delta z(t_1,x_1)\|^2)+o_2(\|\Delta y(t_2,x_1)\|^2)-o_3(\|\Delta z(t_1,x_1)\|^2)-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}o_4(\|\Delta z(t_1,x)\|^2)-$$
$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}o_5(\|\Delta z(t,x)\|^2)-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}o_6(\|\Delta y(t,x)\|^2). \quad (27)$$

Первая и вторая вариации функционала качества. Пусть ε произвольное достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u(t,x)\in R^r, (t,x)\in D_1$ произвольная дискретная, ограниченная вектор-функция (допустимая вариация управления). Полагая

$$\Delta u_\varepsilon(t,x)=\varepsilon\delta u(t,x),$$
$$\delta v(t,x)=0. \quad (28)$$

и через $(\Delta z_\varepsilon(t,x),\Delta y_\varepsilon(t,x))$ обозначим специальное приращение состояния $(z^0(t,x),y^0(t,x))$, отвечающее специальному приращению (28) управления $(u^0(t,x),v^0(t,x))$.

Используя краевую задачу (8)-(11) можно доказать, что

$$\Delta z_\varepsilon(t,x)=\varepsilon\delta z(t,x)+o(\varepsilon:t,x), \quad (29)$$
$$\Delta y_\varepsilon(t,x)=\varepsilon\delta y(t,x)+o(\varepsilon:t,x). \quad (30)$$

где $(\delta z(t,x),\delta y(t,x))$(вариация состояния $(z^0(t,x),y^0(t,x))$) является решением линейной краевой задачи (уравнения в вариациях):

$$\delta z(t+1,x+1)=f_z\big(t,x,z^0(t,x),u^0(t,x)\big)\delta z(t,x)+f_u\big(t,x,z^0(t,x),u^0(t,x)\big)\delta u(t,x), \quad (31)$$
$$\delta z(t_0,x)=0, \quad (32)$$
$$\delta z(t,x_0)=0.$$
$$\delta y(t+1,x+1)=\sum_{\tau=t_1}^{t}\sum_{x=x_0}^{x}g_y\big(t,x,\tau,s,y^0(\tau,s),v^0(\tau,s)\big)\delta y(\tau,s), \quad (33)$$
$$\delta y(t_1,x)=G_z\big(z^0(t_1,x)\big)\delta z(t_1,x) \quad (34)$$
$$\delta y(t,x_0)=0.$$

Учитывая (28), (30) из формулы приращения (27) получим справедливость разложения

$$J(u^0+\Delta u_\varepsilon,v^0)-J(u^0,v^0)=-\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}H_u'\big(t,x,z^0(t,x),u^0(t,x),p^0(t,x)\big)\,\Delta u(t,x)-$$

$$-\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}[\delta z'(t,x)H_{zz}(t,x,z^0(t,x),u^0(t,x),p^0(t,x))\delta z(t,x)+$$
$$+2\delta u'(t,x)H_{uz}(t,x,z^0(t,x),u^0(t,x),p^0(t,x))\delta z(t,x)+$$
$$+\delta u'(t,x)H_{uu}(t,x,z^0(t,x),u^0(t,x),p^0(t,x))\Delta\delta(t,x))-$$
$$-\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta y'(t,x)M_{yy}(t,x,y^0(t,x),v^0(t,x),q^0(t,x))\delta y(t,x)+ \quad (35)$$
$$+o(\varepsilon^2)+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\delta z'(t_1,x_1)\frac{\partial^2\varphi_1(z^0(t_1,x_1))}{\partial z^2}\delta z(t_1,x_1)+\delta y'(t_2,x_1)\frac{\partial^2\varphi_2(z^0(t_2,x_1))}{\partial y^2}\Delta\delta(t_2,x_1)-\right.$$
$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta z'(t_1,x)N_{zz}(x,z^0(t_1,x))\delta z(t_1,x)-$$
$$\left.-\delta z'(t_1,x_1)N_{zz}(x_1,z^0(t_1,x_1))\delta z(t_1,x_1)\right).$$

Если специальное приращение управляющей функции $v^0(t,x)$ определить по формуле

$$\Delta v_\mu(t,x)=\mu\delta v(t,x), (36)$$

где $\mu-$ произвольное, достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta v(t,x)\in R^q,(t,x)\in D_2$ произвольная дискретная, ограниченная вектор-функция, то из (27) получаем, что

$$\Delta J_\mu(u^0,v^0)=J(u^0,v^0+\mu\delta v)-J(u^0,v^0)=$$
$$=-\mu\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}M_v'(t,x,y^0(t,x),v^0(t,x),q^0(t,x))\delta v(t,x)-\frac{\mu^2}{2}\left(\delta c(t_2,t_1)\frac{\partial^2\varphi_2(y^0(t_2,x_1))}{\partial y^2}\delta c(t_2,x_1)-\right. \quad (37)$$
$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}(\delta c'(t,x)M_{yy}(t,x,y^0(t,x),v^0(t,x),q^0(t,x))\delta c(t,x)+$$
$$+2\delta v'(t,x)H_{vc}(t,x,y^0(t,x),v^0(t,x),q^0(t,x))\delta c(t,x)+$$
$$\left.+\delta v'(t,x)H_{vv}(t,x,y^0(t,x),v^0(t,x),q^0(t,x))\delta v(t,x)\right)+o(\mu^2),$$

где $\delta c(t,x)$ вариация состояния $(z^0(t,x),y^0(t,x))$, отвечающая вариации $\delta v(t,x)$ управляющей функции $v^0(t,x)$, являющаяся решением следующего уравнения в вариациях

$$\delta c(t+1,x+1)=\sum_{\tau=t_1}^{t}\sum_{x=x_0}^{x}\left[g'_y(t,x,\tau,s,y^0(\tau,s),v^0(\tau,s))\delta c(\tau,s)+\right.$$
$$\left.+g_v(t,x,\tau,s,y^0(\tau,s),v^0(\tau,s))\delta v(\tau,s)\right], (38)$$
$$\delta c(t_1,x)=0, (39)$$
$$\delta c(t,x_0)=0.$$

В силу открытости областей управления U,V, из разложений (35), (37) на основе основного результата вариационного исчисления следует, что если $(u^0(t,x),v^0(t,x))$ оптимальное управление, то для всех $\delta u(t,x)\in R^r,(t,x)\in D_1$ и $\delta v(t,x)\in R^q,(t,x)\in D_2$соответственно выполняются соотношения

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}H_u'(t,x,z^0(t,x),u^0(t,x),p^0(t,x))\,\delta u(t,x)=0, \quad (40)$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} M_v'\big(t,x,y^0(t,x),v^0(t,x),q^0(t,x)\big)\delta v(t,x)=0, (41)$$

$$\delta z'(t_1,x_1)\frac{\partial^2\varphi_1\big(z^0(t_1,x_1)\big)}{\partial z^2}\delta z(t_1,x_1)+\delta y'(t_2,x_1)\frac{\partial^2\varphi_2\big(z^0(t_2,x_1)\big)}{\partial y^2}\Delta\delta(t_2,x_1)-$$

$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta z'(t_1,x)N_{zz}\big(x,z^0(t_1,x)\big)\delta z(t_1,x)-\delta z'(t_1,x_1)N_{zz}\big(x_1,z^0(t_1,x_1)\big)\delta z(t_1,x_1)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}[\delta z'(t,x)H_{zz}(t,x,z^0(t,x),u^0(t,x),p^0(t,x))\delta z(t,x)+$$

$$+2\delta u'(t,x)H_{uz}(t,x,z^0(t,x),u^0(t,x),p^0(t,x))\delta z(t,x)+$$

$$+\delta u'(t,x)H_{uu}(t,x,z^0(t,x),u^0(t,x),p^0(t,x))\Delta\delta(t,x)]-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta y'(t,x)M_{yy}(t,x,y^0(t,x),v^0(t,x),q^0(t,x))\delta y(t,x)\geq 0, (42)$$

$$\Bigg(\delta c'(t_2,x_1)\frac{\partial^2\varphi_2\big(y^0(t_2,x_1)\big)}{\partial y^2}\delta c(t_2,x_1)-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\big(\delta c'(t,x)M_{yy}(t,x,y^0(t,x),v^0(t,x),q^0(t,x))\delta c(t,x)+$$

$$+2\delta v'(t,x)H_{vc}(t,x,y^0(t,x),v^0(t,x),q^0(t,x))\delta c(t,x)+$$

$$+\delta v'(t,x)H_{vv}(t,x,y^0(t,x),v^0(t,x),q^0(t,x))\delta v(t,x)\big)\geq 0. (43)$$

Как видно, тождества (40), (41) являются неявными необходимыми условиями оптимальности первого порядка, а неравенства (42), (43) представляют собой неявные необходимые условия оптимальности второго порядка. Поэтому, из них следовало бы получить явные необходимые условия оптимальности, носящие конструктивный характер.

Полагая в тождествах (40), (41)

$$\delta u(t,x)=\begin{cases}u,(t,x)=(\theta,\xi),\\0,(t,x)\neq(\theta,\xi),\end{cases}$$

$$\delta v(t,x)=\begin{cases}v,(t,x)=(\theta,\xi),\\0,(t,x)\neq(\theta,\xi),\end{cases}$$

где $u\in R^r$ и$v\in R^q$ произвольные векторы, соответственно, а $(\theta,\xi)\in T_1\times X$, $(\theta,\xi)\in T_2\times X$соответственно произвольные точки, из них сразу получаем, что

$$H_u'\big(\theta,\xi,z^0(\theta,\xi),u^0(\theta,\xi),p^0(\theta,\xi)\big)u=0,$$

$$M_v'\big(\theta,\xi,y^0(\theta,\xi),v^0(\theta,\xi),q^0(\theta,\xi)\big)v=0.$$

Из полученных соотношений следует следующее необходимое условие оптимальности первого порядка

Теорема 1. (аналог уравнения Эйлера). *Для* оптимальности допустимого управления $(u^0(t,x),v^0(t,x))$ необходимо, чтобы соотношения

$$H_u\big(\theta,\xi,z^0(\theta,\xi),u^0(\theta,\xi),p^0(\theta,\xi)\big)=0, (44)$$

$$M_v\big(\theta,\xi,y^0(\theta,\xi),v^0(\theta,\xi),q^0(\theta,\xi)\big)=0\ (45)$$

выполнялись для всех $(\theta,\xi)\in D_1$,$(\theta,\xi)\in D_2$соответственно.

Займемся выводом необходимых условий оптимальности второго порядка.

Пусть $R_1(t,x,\tau,s)$ $(n\times n)$ матричная функция, являющаяся решением краевой задачи

$$R_1(t,x,\tau-1,s-1)=R_1(t,x,\tau,s)f_z\big(\tau,s,z^0(\tau,s),u^0(\tau,s)\big),\ (46)$$

$$R_1(t,x,t-1,s-1)=0,\ (47)$$

$$R_1(t,x,\tau-1,x-1)=0,$$

$$R_1(t,x,t-1,x-1)=E_1,$$

где $E_1-\ (n\times n)$ единичная матрица.

Через $R_2(t,x,\tau,s)$ обозначим$(m\times m)$ матричную функцию, являющуюся решением задач

$$R_2(t,x,\tau-1,s-1)=\sum_{\alpha=\tau}^{t-1}\sum_{\beta=s}^{x-1}R_2(t,x,\alpha,\beta)g_y\big(\alpha,\beta,\tau,s,y^o(\tau,s)\big),\ (48)$$

$$R_2(t,x,t-1,s-1)=0,\ (49)$$

$$R_2(t,x,\tau-1,x-1)=0,$$

$$R_2(t,x,t-1,x-1)=E_2$$

$(E_2-(m\times m)$ единичная матрица).

Тогда на основании результатов работы [2] решения краевых задач (46)-(47), (48)-(49) могут быть представлены соответственно в виде

$$\delta z(t,x)=\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_1(t,x,\tau,s)f_u\big(\tau,s,z^0(\tau,s),u^0(\tau,s)\big)\delta u(\tau,s),\ (50)$$

$$\delta y(t,x)=R_2(t,x,t_1-1,x-1)\delta y(t_1,x)+\sum_{s=x_0}^{x-1}R_2(t,x,t_1-1,s-1)\delta y(t_1,s),\ (51)$$

$$\delta c(t,x)=\sum_{\tau=t_1}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[\sum_{\alpha=\tau}^{t-1}\sum_{\beta=s}^{x-1}R_2(t,x,\alpha,\beta)\,g_v\big(\alpha,\beta,\tau,s,y^0(\tau,s),v^0(\tau,s)\big)\delta v(\tau,s)\right].(52)$$

Займемся преобразованием представление (51)

В силу (51) имеем

$$\delta y(t,x)=R_2(t,x,t_1-1,x-1)G_z(z^0(t_1,x))\delta z(t_1,x)+$$
$$+\sum_{s=x_0}^{x-1}R_2(t,x,t_1-1,s-1)G_z\big(z^0(t_1,s)\big)\delta z(t_1,s).\ (53)$$

Из (50) следует, что

$$\delta z(t_1,x)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_1(t_1,x,\alpha,s)f_u\big(\alpha,s,z^0(\tau,s),u^0(\alpha,s)\big)\delta u(\alpha,s),\ (54)$$

$$\delta z(t_1,s)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_1(t_1,s,\tau,\beta)f_u\big(\tau,\beta,z^0(\tau,\beta),u^0(\tau,\beta)\big)\delta u(\tau,\beta).\ (55)$$

Принимая во внимание представление (54), (55) в (53), будем иметь

$$\delta y(t,x) =$$

$$= \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x-1} R_2(t,x,t_1-1,x-1)\,G_z(z^0(t_1,x))R_1(t_1,x,\tau,s)f_u\big(\tau,s,z^0(\tau,s),u^0(\tau,s)\big)\delta u(\tau,s) +$$

$$+ \sum_{s=x_0}^{x-1}\sum_{\alpha=t_0}^{t_1-1}\sum_{\beta=x_0}^{s-1} R_2(t,x,t_1-1,s-1)\,G_z\big(z^0(t_1,s)\big)R_1(t_1,x,\tau,\beta)\times \quad (56)$$

$$\times f_u\big(\tau,\beta,z^0(\tau,\beta),u^0(\tau,\beta)\big)\delta u(\tau,\beta).$$

Далее получаем, что

$$\sum_{s=x_0}^{x-1}\sum_{\beta=x_0}^{x-1} R_2(t,x,t_1-1,s-1)\,G_z\big(z^0(t_1,s)\big)R_1(t_1,x,\tau,\beta)\times$$

$$\times f_u\big(\tau,\beta,z^0(\tau,\beta),u^0(\tau,\beta)\big)\delta u(\tau,\beta) = \sum_{s=x_0}^{x-1}\sum_{\beta=s+1}^{x-1} R_2(t,x,t_1-1,\beta-1)\,G_z\big(z^0(t_1,\beta)\big)R_1(t_1,\beta,\tau,s)\times$$

$$\times f_u\big(\tau,s,z^0(\tau,s),u^0(\tau,s)\big)\delta u(\tau,s).$$

Поэтому полагая

$$Q_1(t,x,\tau,s) = R_2(t,x,t_1-1,\beta-1)G_z\big(z^0(t_1,\beta)\big)R_1(t_1,\beta,\tau,s) +$$

$$+ \sum_{\beta=s+1}^{x-1} R_2(t,x,t_1-1,\beta-1)\,G_z\big(z^0(t_1,\beta)\big)R_1(t_1,\beta,\tau,s)$$

представление (56) представляется в следующем виде

$$\delta y(t,x) = \quad (57)$$

$$= \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x-1} Q_1(t,x,\tau,s)\,f_u\big(\tau,s,z^0(\tau,s),u^0(\tau,s)\big)\delta u(\tau,s).$$

Теперь предположим, что

$$\delta u(t,x) \equiv 0, \delta v(t,x) \neq 0.$$

Тогда решение краевой задачи (38)-(39) может быть представлено в виде

$$\delta c(t,x) = \sum_{\tau=t_1}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[\sum_{\alpha=\tau}^{t-1}\sum_{\beta=s}^{x-1} R_2(t,x,\alpha,\beta)\,g_v\big(\alpha,\beta,\tau,s,y^0(\tau,s),v^0(\tau,s)\big)\delta v(\tau,s)\right]. \quad (58)$$

Используя представления (50), (57), (58) займемся преобразованием отдельных слагаемых в неравенствах (42), (43).

Рассмотрим слагаемое

$$\delta z'(t_1,x_1)\frac{\partial^2\varphi_1\big(z^0(t_1,x_1)\big)}{\partial z^2}\delta z(t_1,x_1) = \sum_{\tau=t_1}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}\sum_{\alpha=t_0}^{t-1}\sum_{\beta=x_0}^{x-1}\delta u'(\tau,s)f'_u\big(\tau,s,z^0(\tau,s),u^0(\tau,s)\big)R_1'(t_1,x_1,\tau,s)\times$$

$$\times\frac{\partial^2\varphi_1\big(z^0(t_1,x_1)\big)}{\partial z^2}f_u\big(\alpha,\beta,z^0(\alpha,\beta),u^0(\alpha,\beta)\big)\delta u(\alpha,\beta).$$

Далее

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta z'(t,x)H_{zz}(t,x,z^0(t,x),u^0(t,x),p^0(t,x))\delta z(t,x)=$$

$$=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left(\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}\delta u'(\tau,s)f'_u\big(\tau,s,z^0(\tau,s),u^0(\tau,s)\big)R_1'(t,x,\tau,s)\right)\times$$

$$\times H_{zz}(t,x,z^0(t,x),u^0(t,x),p^0(t,x))\left(\sum_{\alpha=t_0}^{t-1}\sum_{\beta=t_0}^{t-1}R_1(t,x,\alpha,\beta)\times\right.$$

$$\left.\times f_u\big(\alpha,\beta,z^0(\alpha,\beta),u^0(\alpha,\beta)\big)\delta u(\alpha,\beta)\right)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\sum_{\alpha=t_0}^{t_1-1}\sum_{\beta=x_0}^{x_1-1}\delta u'(\tau,s)f_u\big(\tau,s,z^0(\tau,s),u^0(\tau,s)\big)\times$$

$$\times\left[\sum_{t=\max(\tau,\alpha)+1}^{t_1-1}\sum_{x=\max(s,\beta)+1}^{x_1-1}R_1'(t,x,\tau,s)\times H_{zz}(t,x,z^0(t,x),u^0(t,x),p^0(t,x))R_1(t,x,\alpha,\beta)\right]\delta u(\alpha,\beta),$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta u'(t,x)H_{uz}(t,x,z^0(t,x),u^0(t,x),p^0(t,x))\delta z(t,x)=$$

$$=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left(\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}\delta u'(t,x)H_{uu}(t,x,z^0(t,x),u^0(t,x),p^0(t,x))R_1(t,x,\tau,s)\times\right.$$

$$\left.\times f_u\big(\tau,s,z^0(\tau,s),u^0(\tau,s)\big)\right)\delta u(\tau,s),$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta y'(t,x)M_{yy}(t,x,y^0(t,x),v^0(t,x),q^0(t,x))\delta y(t,x)=$$

$$=\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left(\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}\sum_{\alpha=t_0}^{t_1-1}\sum_{\beta=x_0}^{x_1-1}\delta u'(\tau,s)f_u\big(\tau,s,z^0(\tau,s),u^0(\tau,s)\big)Q_1'(t,x,\tau,s)\times\right.$$

$$\times M_{yy}(t,x,y^0(t,x),v^0(t,x),q^0(t,x))Q_1(t,x,\alpha,\beta)\times$$

$$\left.\times f_u\big(\alpha,\beta,z^0(\alpha,\beta),u^0(\alpha,\beta)\big)\delta u(\alpha,\beta)\right)=$$

$$=\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{\alpha=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\sum_{\beta=x_0}^{x_1-1}\Big(\delta u'(\tau,s)f_u\big(\tau,s,z^0(\tau,s),u^0(\tau,s)\big)\Big)\times$$

$$\times\left(\sum_{x=\max(s,\beta)+1}^{x_1-1}Q_1'(t,x,\tau,s)M_{yy}(t,x,y^0(t,x),v^0(t,x),q^0(t,x))Q_1(t,x,\alpha,\beta)\right)\times$$

$$\times f_u\big(\alpha,\beta,z^0(\alpha,\beta),u^0(\alpha,\beta)\big)\delta u(\alpha,\beta)=$$

$$=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\sum_{\alpha=t_0}^{t_1-1}\sum_{\beta=x_0}^{x_1-1}\delta u'(\tau,s)f_u\big(\tau,s,z^0(\tau,s),u^0(\tau,s)\big)\times$$

$$\times\left[\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=\max(s,\beta)+1}^{x_1-1}Q_1'(t,x,\tau,\beta)M_{yy}\big(t,x,y^0(t,x),v^0(t,x),q^0(t,x)\big)Q_1(t,x,\alpha,\beta)\right]\times$$

$$\times f_u\big(\alpha,\beta,z^0(\alpha,\beta),u^0(\alpha,\beta)\big)\delta u(\alpha,\beta).$$

Полагая

$$K_1(\tau,s,\alpha,\beta)=\sum_{t=\max(\tau,\alpha)+1}^{t_1-1}\sum_{x=\max(s,\beta)+1}^{x_1-1}R_1'(t,x,\tau,s)\times$$

$$\times H_{zz}(t,x,z^0(t,x),u^0(t,x),p^0(t,x))R_1(t,x,\alpha,\beta)+$$

$$+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=\max(s,\beta)+1}^{x_1-1}Q_1'(t,x,\tau,\beta)M_{yy}\big(t,x,y^0(t,x),v^0(t,x),q^0(t,x)\big)Q_1(t,x,\alpha,\beta)-$$

$$-R_1'(t_1,x_1,\tau,s)\frac{\partial^2\varphi_1\big(z^0(t_1,x_1)\big)}{\partial z^2}R_1(t_1,x_1,\alpha,\beta).$$

Неравенство (42) записывается в виде

$$\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\sum_{\alpha=t_0}^{t_1-1}\sum_{\beta=x_0}^{x_1-1}\delta u'(\tau,s)f_u\big(\tau,s,z^0(\tau,s),u^0(\tau,s)\big)K_1(\tau,s,\alpha,\beta)\times$$

$$\times f_u\big(\alpha,\beta,z^0(\alpha,\beta),u^0(\alpha,\beta)\big)\delta u(\alpha,\beta)+$$

$$+2\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left(\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}\delta u'(t,x)H_{uz}(t,x,z^0(t,x),u^0(t,x),p^0(t,x))R_1(t,x,\tau,s)\right)\times$$

$$\times f_u\big(\tau,s,z^0(\tau,s),u^0(\tau,s)\big)\Big)\delta z(\tau,s)+\ (59)$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta u'(t,x)H_{uu}\big(t,x,z^0(t,x),u^0(t,x),p^0(t,x)\big)\delta u(t,x)\le 0.$$

Перейдем к преобразованию неравенства (43) используя представление (58) для $\delta z(t,x)$.

Полагая

$$Q_2(t,x,\tau,s)=\sum_{\tau=t_1}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_2(t,x,\alpha,\beta)\,g_v\big(\alpha,\beta,\tau,s,z^0(\tau,s)\big)$$

из (58) получаем, что

$$\delta c(t,x)=\sum_{\tau=t_1}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}Q_2(t,x,\tau,s)\delta v(\tau,s).$$

Учитывая представление получаем, что

$$\delta c'(t_2,x_1)\frac{\partial^2\varphi_2\big(y^0(t_2,x_1)\big)}{\partial y^2}\delta c(t_2,x_1)=$$

$$=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\sum_{\alpha=t_0}^{t_1-1}\sum_{\beta=x_0}^{x_1-1}\delta v'(\tau,s)Q'_2(t_2,x_1,\tau,s)\frac{\partial^2\varphi_2\big(y^0(t_2,x_1)\big)}{\partial y^2}Q_2(t_2,x_1,\alpha,\beta)\delta v(\tau,s)$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta c'(t,x)M_{yy}(t,x,y^0(t,x),v^0(t,x),q^0(t,x))\delta c(t,x)=\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left(\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}\delta v'(\tau,s)Q_2(t,x,\tau,s)\right)'$$

$$\times M_{yy}(t,x,y^0(t,x),v^0(t,x),q^0(t,x))\left(\sum_{\alpha=t_1}^{t_2-1}\sum_{\beta=x_0}^{x_1-1}Q_2(t,x,\alpha,\beta)\delta v(\alpha,\beta)\right)=\sum_{\tau=t_1}^{t_2-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\sum_{\alpha=t_1}^{t_2-1}\sum_{\beta=x_0}^{x_1-1}\delta v'(\tau,s)\times$$

$$\times\left(\sum_{t=\max(\tau,\alpha)+1}^{t_2-1}\sum_{x=\max(s,\beta)+1}^{x_1-1} Q_2'(t,x,\tau,s)M_{yy}\big(t,x,y^0(t,x),v^0(t,x),q^0(t,x)\big)Q_2(t,x,\alpha,\beta)\right)\delta u(\alpha,\beta)$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\delta v'(t,x)M_{vy}(t,x,y^0(t,x),v^0(t,x),q^0(t,x))\delta c(t,x)=$$

$$=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left(\sum_{\tau=t_1}^{t_2-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}\delta v'(t,x)M_{vy}(t,x,y^0(t,x),v^0(t,x),q^0(t,x))Q_2(t,x,\tau,s)\,\delta v(\tau,s)\right)$$

Введя обозначение

$$K_2(\tau,s,\alpha,\beta)=-Q'_2(t_2,x_1,\tau,s)\frac{\partial^2\varphi_2\big(y^0(t_2,x_1)\big)}{\partial y^2}Q_2(t_2,x_1,\alpha,\beta)+$$

$$=\sum_{t=\max(\tau,\alpha)+1}^{t_2-1}\sum_{x=\max(s,\beta)+1}^{x_1-1} Q_2'(t,x,\tau,s)M_{yy}\big(t,x,y^0(t,x),v^0(t,x),q^0(t,x)\big)Q_2(t,x,\alpha,\beta),$$

неравенство (59) записывается в виде

$$\sum_{\tau=t_1}^{t_2-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\sum_{\alpha=t_1}^{t_2-1}\sum_{\beta=x_0}^{x_1-1}\delta v'(\tau,s)K_2(\tau,s,\alpha,\beta)\,\delta v(\alpha,\beta)+$$

$$+2\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left(\sum_{\tau=t_1}^{t_2-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}\delta v'(t,x)M_{vy}\big(t,x,y^0(t,x),v^0(t,x),q^0(t,x)\big)Q_2(t,x,\tau,s)\delta v(\tau,s)\right)+$$

$$+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x-1}\delta v'(t,x)M_{vv}(t,x,y^0(t,x),v^0(t,x),q^0(t,x))\,\delta v(t,x)\le 0.\ (60)$$

Сформулируем полученный результат

Теорема 2. Если допустимое управление$(u^0(t,x),v^0(t,x))$ является решением уравнения Эйлера, то для его оптимальности в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы неравенства (59), (60) выполнялись для всех $u(t,x)\in R^r,(t,x)\in D_1$ и $\delta v(t,x)\in R^q,(t,x)\in D_2$ соответственно.

Неравенства (59), (60) являются довольно общим, но в принципе конструктивно проверяемыми необходимыми условиями оптимальности второго порядка. Из них можно получить еще легче проверяемые необходимые условия оптимальности, но они будут менее информативными. Приведем одну из них.

Пусть $(\theta,\xi)\in D_1\ ((\theta,\xi)\in D_2),u\in R^r,v\in R^q$ произвольные точки.

Положим

$$\delta u(t,x)=\begin{cases}u,(t,x)=(\theta,\xi),\\0,(t,x)\neq(\theta,\xi),\end{cases}\ (61)$$

$$\delta v(t,x)=\begin{cases}v,(t,x)=(\theta,\xi),\\0,(t,x)\neq(\theta,\xi).\end{cases}\ (62)$$

Теорема 3.Для оптимальности классической экстремали $(u^0(t,x),v^0(t,x))$ необходимо, чтобы неравенства

$$u'f'_u\big(\theta,\xi,z^0(\theta,\xi),u^0(\theta,\xi)\big)K_1(\theta,\xi,\theta,\xi)f_u\big(\theta,\xi,z^0(\theta,\xi),u^0(\theta,\xi)\big)u + \quad (63)$$

$$+u'H_{uu}\big(\theta,\xi,z^0(\theta,\xi),u^0(\theta,\xi),p^0(\theta,\xi)\big)u \le 0,$$

$$v'K_2(\theta,\xi,\theta,\xi)v + v'M_{vv}\big(\theta,\xi,y^0(\theta,\xi),y^0(\theta,\xi),q^0(\theta,\xi)\big)v \le 0 \quad (64)$$

выполнялись для всех $(\theta,\xi) \in D_1, u \in R^r$ и $(\theta,\xi) \in D_2, v \in R^q$ соответственно.

Неравенства (63), (64) доказывается с использованием (61), (62) в неравенствах (59), (60) соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амирова А.А, Необходимые условия оптимальности в одной задаче управления для двумерного разностного уравнения типа Вольтерра // Докл. НАН Азербайджана, 2012 №3, с. 3-8.
2. Мансимов К.Б., Масталиев Р.О. Оптимизация процессов, описываемых разностными уравнениями Вольтерра. Lap. Lambert Academic Publishing Ru. 2017. 265 p.
3. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление разрывными системами. Н. Наука, 1987, 226 с.
4. Батурин В.А., Лемперт А.А. Многоэтапные процессы и методы улучшения в задачах оптимального управления // Вычислительные технологии. 2003, т.8, с. 103-108.
5. Исмайлов Р.Р., Мансимов К.Б. Об условиях оптимальности в одной ступенчатой задаче управления // Журн. Вычисл. матем. и мат. физ. 2006, №10, с. 1758-1770.
6. Колмановский В.Б. О предельной периодичности решений некоторых систем Вольтерра // Автом. и телемех. 2001, №5, с. 36-43.
7. Колмановский В.Б. Об асимптотической эквивалентности решений некоторых разностных уравнений Вольтерра // Автом. и телемех. 2001, №4, с. 47-56.
8. Габасов Р Кириллова Ф.М.Особые оптимальные управления.М. Книжный дом ЛИБРОКОМ, 2013, 256 с.
9. Мансимов К.Б.Дискретные системы.Баку, изд-во БГУ.2013.151 с.

JOURNAL OF BAKU ENGINEERING UNIVERSITY- MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
2020. Volume 4, Number 2 *Pages 95-101*

УДК 517.977.56

ОБ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ С МНОГОТОЧЕЧНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ КАЧЕСТВА

РЗАЕВА В.Г.

Сумгаитский Государственный Университет

РЕЗЮМЕ

Рассматривается одна задача оптимального управления, описываемая двумя системами двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра в различных областях фазового пространства.

В форме принципа максимума Понтрягина доказано необходимое и достаточное условие оптимальности.

Ключевые слова:интегральное уравнение типа Вольтерра, необходимое и достаточное условие оптимальности,принцип максимума Понтрягина.

ON A LINEAR CONTROL PROBLEM WITH A MULTI-POINT QUALITY FUNCTIONAL

ABSTRACT

We consider one optimal control problem described by two systems of two-dimensional integral equations of the Volterra type in different regions of the phase space.

A necessary and sufficient optimality condition is proved in the form of Pontryagin's maximum principle.

Key words: integral equation of Volterra type, necessary and sufficient conditions for optimality, Pontryagin's maximum principle.

Введение. В работах [1-4] и др. изучен ряд задач оптимального управления, описываемые в разных отрезках времени обыкновенными дифференциальными уравнениями. Такие задачи оптимального управления называются ступенчатыми задачами оптимального управления или же задачи оптимального управления с переменной структурой.

В предлагаемой работе изучается одна задача оптимального управления,описываемая в различных областях линейными двумерными интегральными уравнениями типа Вольтерра с линейным критерием качества. Доказано необходимое и достаточное условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина.

Постановка задачи. Пусть $U_1 \subset R^r, U_2 \subset R^q$ заданные непустые и ограниченные множества, $D_1 = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1], D_2 = [t_1, t_2] \times [x_0, x_1]$ заданные прямоугольники, причем$t_1 < t_2, u_1(t,x), u_2(t,x)$ измеримые и ограниченные соответственно r и q-мерные вектор-функции, удовлетворяющие ограничениям

$$u_1(t,x) \in U_1 \subset R^r, (t,x) \in D_1, (1)$$

$$u_2(t,x) \in U_2 \subset R^q, (t,x) \in D_2. (2)$$

Предположим, что управляемый процесс описывается системами линейных интегральных уравнений типа Вольтерра

$$z(t,x) = \int_{t_0}^{t} \int_{x_0}^{x} \left[A_1(t,x,\tau,s)z(\tau,s) + f_1\left(t,x,\tau,s,u_1(\tau,s)\right)\right] ds d\tau \,, (t,x) \in D_1, (3)$$

$$y(t,x) = \int_{t_1}^{t} \int_{x_0}^{x} \left[A_2(t,x,\tau,s)y(\tau,s) + f_2\left(t,x,\tau,s,u_2(\tau,s)\right)\right] ds d\tau + Gz(t_1,x), (t,x) \in D_2. (4)$$

Здесь $A_i(t,x,\tau,s), i=1,2-$ заданные $(n\times n)$-мерные непрерывные по совокупности переменных соответственно матричные функции, $f_i(t,x,\tau,s,u_i)$ −заданные непрерывные n-мерные вектор-функции, G −заданная $(n\times n)$ постоянная матрица.

Пару $\big(u_1(t,x),u_2(t,x)\big)$, удовлетворяющую ограничениям (1)-(2), назовем допустимым управлением. Предполагается, что интегральные уравнения (3), (4) при каждом заданном допустимом управлении имеют единственное непрерывное решение.

Пусть $(T_i,X_i)(t_0<T_1<\cdots<T_k\le t_1,x_0<X_1<\cdots<X_k\le x_1),(\theta_i,\xi_i)(t_0<\theta_1<\cdots<\theta_k\le t_2,x_0<\xi_1<\cdots<\xi_k\le x_1)$ заданные точки, а $c_i,d_i,i=\overline{1,k}$ заданные n-мерные постоянные векторы.

На решениях интегральных уравнений (3), (4), порожденных всевозможными управлениями определим линейный многоточечный функционал

$$S(u_1,u_2)=\sum_{i=1}^{k}c_i'\,z(T_i,X_i)+\sum_{i=1}^{k}d_i'\,y(\theta_i,\xi_i).\ (5)$$

Рассмотрим задачу нахождения минимального значения функционала (5) при ограничениях (1)-(4).

Допустимое управление $\big(u_1(t,x),u_2(t,x)\big)$, доставляющее минимальное значение функционалу (5) при ограничениях (3), (4), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u_1(t,x),u_2(t,x),z(t,x),y(t,x))-$ оптимальным процессом.

Применяя один вариант метода приращений, установим необходимое и достаточное условие оптимальности типа принципа максимума Понтрягина.

Необходимое и достаточное условие оптимальности.

Считая $(u_1(t,x),u_2(t,x),z(t,x),y(t,x))$ фиксированным допустимым процессом, через $\big(\bar u_1(t,x)=u_1(t,x)+\Delta u_1(t,x),\bar u_2(t,x)=u_2(t,x)+\Delta u_2(t,x),\bar z(t,x)=z(t,x)+\Delta z(t,x),\bar y(t,x)=y(t,x)+\Delta y(t,x)\big)$ обозначим произвольный допустимый процесс и запишем приращение функционала (5), при $\Delta u_2(t,x)=0$. Имеем

$$\Delta_{\bar u_1}S(u_1,u_2)=S(\bar u_1,u_2)-S(u_1,u_2)=\sum_{i=1}^{k}c_i'\,\Delta z(T_i,X_i)+\sum_{i=1}^{k}d_i'\,\Delta y(\theta_i,\xi_i).\ (6)$$

Из (3), (4) ясно, что при $\Delta u_2(t,x)=0,\big(\Delta z(t,x),\Delta y(t,x)\big)$ является решением системы интегральных уравнений

$$\Delta z(t,x)=\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\Big[A_1(t,x,\tau,s)\Delta z(\tau,s)+\big(f_1\big(t,x,\tau,s,\bar u_1(\tau,s)\big)-f_1\big(t,x,\tau,s,u_1(\tau,s)\big)\big)\Big]ds d\tau\,,\ (7)$$

$$\Delta y(t,x)=\int_{t_1}^{t}\int_{x_0}^{x}A_2(t,x,\tau,s)\Delta y(\tau,s)ds d\tau+G\Delta z(t_1,x).\ (8)$$

Пусть $\alpha_i(t,x),i=\overline{1,k},\beta_i(t,x),i=\overline{1,k}-$ характеристические функции соответственно областей $[t_0,T_i]\times[x_0,X_i],[t_1,\theta_i]\times[x_0,\xi_i]$, а $\gamma_i(x),i=\overline{1,k}-$ характеристические функции отрезков $[x_0,\xi_i]$. Тогда из соотношений (7) и (8) следует, что

$$\Delta z(T_i,X_i)=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\alpha_i(t,x)[A_1(T_i,X_i,t,x)\Delta z(\tau,s)+\big(f_1\big(T_i,X_i,t,x,\bar u_1(t,x)\big)-f_1\big(T_i,X_i,t,x,u_1(t,x)\big)\big)\Big]dxdt,\ (9)$$

$$\Delta y(\theta_i,\xi_i)=\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\beta_i(t,x)A_2(\theta_i,\xi_i,t,x)\Delta y(t,x)dxdt+G\Delta z(t_1,\xi_i).\ (10)$$

Пусть $\psi_i(t,x),\ i=1,2-$ пока произвольные n-мерные вектор-функции.

Используя операцию скалярного произведения из (7) и (8) получаем, что

$$\int_{t_1}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi_1'(t,x)\Delta z(t,x)dxdt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi_1'(t,x)\left[\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}(A_1(t,x,\tau,s)\Delta z(\tau,s)+\right.$$

$$\left.+f_1\big(t,x,\tau,s,\bar{u}_1(\tau,s)\big)-f_1\big(t,x,\tau,s,u_1(\tau,s)\big)dsd\tau\right]dxdt,\ (11)$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\psi_2'(t,x)\Delta y(t,x)dxdt=\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\psi_2'(t,x)\left(\int_{t_1}^{t}\int_{x_0}^{x}B(t,x,\tau,s)\Delta y(\tau,s)dsd\tau\right)dxdt+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\psi_2'(t,x)G\,\Delta z(t_1,x)dxdt.\ (12)$$

Используя формулу Дирихле (см., напр., [5]) тождества (11), (12) могут быть представлены в виде

$$\int_{t_1}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi_1'(t,x)\Delta z(t,x)dxdt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{t}^{t_1}\int_{x}^{x_1}\psi_1'(\tau,s)(A_1(\tau,s,t,x)\Delta z(t,x)+\right.$$

$$\left.+f_1\big(\tau,s,t,x,\bar{u}_1(t,x)\big)-f_1\big(\tau,s,t,x,u_1(t,x)\big)\right)dsd\tau\Big]dxdt,\ (13)$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\psi_2'(t,x)\Delta y(t,x)dxdt=\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{t}^{t_2}\int_{x}^{x_1}\psi_2'(\tau,s)A_2(\tau,s,t,x)\Delta y(t,x)dsd\tau\right)dxdt+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\psi_2'(t,x)G\,\Delta z(t_1,x)dxdt.\ (14)$$

Принимая во внимание соотношения (9), (10) в формуле приращения (6) получим, что

$$\Delta_{\bar{u}_1}S(u_1,u_2)=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\sum_{i=1}^{k}c_i'\,\alpha_i(t,x)A_1(T_i,X_i,t,x)\Delta z(t,x)dxdt+$$

$$+\int_{t_1}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}c_i'\alpha_i(t,x)\left(f_1\big(T_i,X_i,t,x,\bar{u}_1(t,x)\big)-f_1\big(T_i,X_i,t,x,u_1(t,x)\big)\right)dxdt+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\sum_{i=1}^{k}\beta_i(t,x)d_i'\,A_2(\theta_i,\xi_i,t,x)\Delta y(t,x)dxdt+\sum_{i=1}^{k}d_i'\,G\Delta z(t_1,\xi_i).\ (15)$$

Поскольку

$$\Delta z(t_1,\xi_i)=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\gamma_i(x)[A_1(t_1,\xi_i,t,x)\Delta z(t,x)+\left(f_1\big(t_1,\xi_i,t,x,\bar{u}_1(t,x)\big)-f_1\big(t_1,\xi_i,t,x,u_1(t,x)\big)\right)]\,dxdt,\ (16)$$

то учитывая (13), (14), (16) в (15) получим, что

$$\Delta_{\bar{u}_1} S(u_1,u_2)=\sum_{i=1}^{k}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} c_i'\alpha_i(t,x)[A_1(T_i,X_i,t,x)\Delta z(t,x)+$$

$$+f_1\big(T_i,X_i,t,x,\bar{u}_1(t,x)\big)-f_1\big(T_i,X_i,t,x,u_1(t,x)\big)\big]dxdt+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1} d_i'\beta_i(t,x)A_2(\theta_i,\xi_i,t,x)\Delta y(t,x)dxdt+$$

$$+\sum_{i=1}^{k} d_i'G\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\gamma_i(x)[A_1(t_1,\xi_i,t,x)\Delta z(t,x)+$$

$$+\Big(f_1\big(t_1,\xi_i,t,x,\bar{u}_1(t,x)\big)-f_1\big(t_1,\xi_i,t,x,u_1(t,x)\big)\Big)\Big]dxdt+$$

$$+\int_{t_1}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi_1'(t,x)\Delta z(t,x)dxdt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Bigg[\int_{t}^{t_1}\int_{x}^{x_1}\psi_1'(\tau,s)(A_1(\tau,s,t,x)\Delta z(t,x)+$$

$$+f_1\big(\tau,s,t,x,\bar{u}_1(t,x)\big)-f_1\big(\tau,s,t,x,u_1(t,x)\big)ds d\tau\Big]dxdt+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\psi_2'(t,x)\Delta y(t,x)dxdt-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\Bigg[\int_{t}^{t_2}\int_{x}^{x_1}\psi_2'(\tau,s)A_2(\tau,s,t,x)\Delta y(t,x)ds d\tau\Bigg]dxdt+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\psi_2'(t,x)G\Bigg[\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x}[A_1(t_1,x,\tau,s)\Delta z(\tau,s)+$$

$$+\Big(f_1\big(t_1,x,\tau,s,\bar{u}_1(\tau,s)\big)-f_1\big(t_1,x,\tau,s,u_1(\tau,s)\big)\Big)ds d\tau\Big]dxdt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Bigg[\sum_{i=1}^{k} c_i'\,\alpha_i(t,x)[A_1(T_i,X_i,t,x)\Delta z(t,x)+f_1\big(T_i,X_i,t,x,\bar{u}_1(t,x)\big)-f_1\big(T_i,X_i,t,x,u_1(t,x)\big)]\Bigg]dxdt+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\Bigg[\sum_{i=1}^{k} d_i'\beta_i(t,x)\,A_2(\theta_i,\xi_i,t,x)\Delta y(t,x)dxdt+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\sum_{i=1}^{k} d_i'G\,\gamma_i(x)[A_1(t_1,\xi_i,t,x)\Delta z(t,x)+$$

$$+\Big(f_1\big(t_1,\xi_i,t,x,\bar{u}_1(t,x)\big)-f_1\big(t_1,\xi_i,t,x,u_1(t,x)\big)\Big)\Big]dxdt+$$

$$+\int_{t_1}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi_1'(t,x)\Delta z(t,x)dxdt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Bigg[\int_{t}^{t_1}\int_{x}^{x_1}\psi_1'(\tau,s)(A_1(\tau,s,t,x)\Delta z(t,x)+$$

$$+f_1\big(\tau,s,t,x,\bar{u}_1(t,x)\big)-f_1\big(\tau,s,t,x,u_1(t,x)\big)ds d\tau\Big]dxdt+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\psi_2'(t,x)\Delta y(t,x)dxdt-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\int_{t}^{t_2}\int_{x}^{x_1}\psi_2'(\tau,s)A_2(\tau,s,t,x)\Delta y(t,x)ds d\tau\,dxdt+$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Bigg[\int_{t_1}^{t_2}\int_{x}^{x_1}\psi_2'(\tau,s)G[A_1(t_1,s,t,x)\Delta z(t,x)d\tau ds\Bigg]dxdt-\quad(17)$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\int_{x}^{x_1}\int_{t_1}^{t_2}\psi_2'(\tau,s)G\Big(f_1\big(t_1,s,t,x,\bar{u}_1(t,x)\big)-f_1\big(t_1,s,t,x,u_1(t,x)\big)\Big)\Big]d\tau ds\,dxdt.$$

Предположим, что $\psi_i(t,x), i = 1,2$ удовлетворяют соотношениям

$$\psi_1(t,x) = \int_t^{t_1}\int_x^{x_1} A_1{}'(\tau,s,t,x)\psi_1(\tau,s)dsd\tau$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_x^{x_1} A_1'(t_1,s,t,x)G'\psi_2(\tau,s)dsd\tau - \sum_{i=1}^{k}\alpha_i(t,x)A_1'(T_i,X_i,t,x)c_i -$$

$$-\sum_{i=1}^{k} A_1'(t_1,\xi_i,t,x)G'd_i\gamma_i(x),$$

$$\psi_2(t,x) = \int_t^{t_2}\int_x^{x_1} A_2{}'(\tau,s,t,x)\psi_2(\tau,s)dsd\tau - \sum_{i=1}^{k}\beta_i(t,x)A_2'(\theta_i,\xi_i,t,x)d_i\,. \quad (18)$$

Тогда формула приращения (17) примет вид

$$\Delta_{u_1}S(u_1,u_2) = \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[H_1\big(t,x,\psi_1(t,x),\bar{u}_1(t,x)\big) - H_1\big(t,x,\psi_1(t,x),u_1(t,x)\big)\right]dxdt\,, \quad (19)$$

где по определению

$$H_1\big(t,x,\psi_1(t,x),\psi_2(t,x),u_1(t,x)\big) = \int_t^{t_1}\int_x^{x_1}\psi_1{}'(\tau,s)f_1\big(\tau,s,t,x,u_1(t,x)\big)dsd\tau -$$

$$-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(t,x)c_i'f_1\ \big(T_i,X_i,t,x,u_1(t,x)\big) - \sum_{i=1}^{k}d_i'Gf_1\ \big(t_1,\xi_i,t,x,u_1(t,x)\big) +$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_x^{x_1}\psi_2'(\tau,s)Gf_1\ \big(t_1,s,t,x,u_1(t,x)\big)dsd\tau.$$

Теперь предположим, что $\Delta\bar{u}_1(t,x) \equiv 0$,а$\Delta\bar{u}_2(t,x) \neq 0$.

Тогда ясно, что $\Delta z(t,x) = 0$ и поэтому

$$\Delta_{\bar{u}_2}S(u_1,u_2) = S(u_1,\bar{u}_2) - S(u_1,u_2) = \sum_{i=1}^{k} d_i{}'\,\Delta y(\theta_i,\xi_i). \quad (20)$$

При этом приращение $\Delta y(t,x)$ состояния $y(t,x)$ будет решением интегрального уравнения

$$\Delta y(t,x) = \int_{t_1}^{t}\int_{x_0}^{x}[A_2(t,x,\tau,s)y(\tau,s) +$$

$$+\left(f_2\big(t,x,\tau,s,\bar{u}_2(\tau,s)\big) - f_2\big(t,x,\tau,s,u_2(\tau,s)\big)\right)\Big]\,dsd\tau. \quad (21)$$

Из (21) получаем, что

$$\Delta y(\theta_i,\xi_i) = \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\beta_i(t,x)[A_2(\theta_i,\xi_i,t,x)\Delta y(t,x) + \left(f_2\big(\theta_i,\xi_i,t,x,\bar{u}_2(t,x)\big) - f_2\big(\theta_i,\xi_i,t,x,u_2(t,x)\big)\right)\Big]\,dxdt. \quad (22)$$

С учетом (21), (22) в формуле приращения (20) получим

$$\Delta_{u_1} S(u_1,u_2)=\sum_{i=1}^{k}\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1} d_i'\beta_i(t,x)A_2(\theta_i,\xi_i,t,x)\Delta y(t,x)dxdt+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\sum_{i=1}^{k} d_i'\,\beta_i(t,x)\left(f_2\big(\theta_i,\xi_i,t,x,\bar{u}_2(t,x)\big)-f_2\big(\theta_i,\xi_i,t,x,u_2(t,x)\big)\right)dxdt+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\psi_2'(t,x)\Delta y(t,x)dxdt-\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{t}^{t_2}\int_{x}^{x_1}\psi_2'(\tau,s)A_2(\tau,s,t,x)dsd\tau\right)\Delta y(t,x)dxdt-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{t}^{t_2}\int_{x}^{x_1}\psi_2'(\tau,s)\left(f_2\big(\tau,s,t,x,\bar{u}_2(t,x)\big)-f_2\big(\tau,s,t,x,u_2(t,x)\big)\right)dsd\tau\right)dxdt. \quad (23)$$

Введем аналог функции Гамильтона-Понтрягина

$$H_2(t,x,\psi_2,u_2)=\int_{t}^{t_2}\int_{x}^{x_1}\psi_2'(\tau,s)f_2\big(\tau,s,t,x,u_2(t,x)\big)dsd\tau-\sum_{i=1}^{k} d_i'\,\beta_i(t,x)f_2\big(\theta_i,\xi_i,t,x,u_2(t,x)\big).$$

Тогда из (23) получаем, что, если $\psi_2(t,x)$ является решением сопряженной системы (18), то

$$\Delta_{u_2} S(u_1,u_2)=-\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{x_1}\left[H_2\big(t,x,\bar{u}_2(t,x),\psi_2(t,x)\big)-H_1\big(t,x,u_2(t,x),\psi_2(t,x)\big)\right]dxdt\,. \quad (24)$$

Частные формулы приращения (19), (24) позволяют сформулировать и доказать необходимое и достаточное условие оптимальности управления $\big(u_1(t,x),u_2(t,x)\big)$.

Пусть $(\theta,\xi)\in[t_0,t_1]\times[x_0,x_1]$ произвольная точка *Л*ебега (правильная точка (см., напр., [6])), управляющей функции $u_1(t,x),v_1\in U_1-$ произвольный вектор, а $\varepsilon>0$ произвольное достаточно малое число, такое, что $\theta+\varepsilon<t_1,\xi+\varepsilon<x_1$. .

Положим

$$\Delta u_1(t,x{:}\,\varepsilon)=\begin{cases}v_1-u_1(t,x),(t,x)\in[\theta,\theta+\varepsilon]\times[\xi,\xi+\varepsilon),\\ 0,(t,x)\in D_1\backslash[\theta,\theta+\varepsilon]\times[\xi,\xi+\varepsilon).\end{cases} \quad (25)$$

Применяя теорему о среднем, из (19) получаем справедливость разложения

$$S\big(u_1(t,x)+\Delta u_1(t,x{:}\,\varepsilon),u_2(t,x)\big)-S\big(u_1(t,x),u_2(t,x)\big)=$$

$$=-\varepsilon^2\left(H_1(\theta,\xi,\psi_1,\psi_2,v_1)-H_1\big(\theta,\xi,\psi_1,\psi_2,u_1(\theta,\xi)\big)\right)+o(\varepsilon^2). \quad (26)$$

Далее пусть $(\theta,\xi)\in[t_1,t_2)\times[x_0,x_1)$ произвольная правильная точка управления $u_2(t,x),v_2\in U_2-$ произвольный вектор, а $\mu>0$ достаточно малое произвольное число, такое, что $\theta+\varepsilon<t_2,\xi+\varepsilon<x_1$. Специальное приращение управляющей функции $u_2(t,x)$ определим по формуле

$$\Delta u_2(t,x{:}\,\mu)=\begin{cases}v_2-u_2(t,x),(t,x)\in[\theta,\theta+\mu)\times[\xi,\xi+\mu),\\ 0,(t,x)\in D_2\backslash[\theta,\theta+\mu)\times[\xi,\xi+\mu).\end{cases} \quad (27)$$

С учетом (27) получаем, что

$$S\big(u_1(t,x),u_2(t,x)+\Delta u_2(t,x{:}\,\mu)\big)-S\big(u_1(t,x),u_2(t,x)\big)=$$

$$=-\mu^2\left(H_2(\theta,\xi,\psi_2,v_2)-H_2\big(\theta,\xi,\psi_2,u_2(\theta,\xi)\big)\right)+o(\mu^2). \quad (28)$$

С помощью разложений (26), (28) доказывается

Теорема. *Для* оптимальности допустимого управления $\big(u_1(t,x),u_2(t,x)\big)$ в рассматриваемой задаче необходимо и достаточно, чтобы соотношения

$$\max_{v_1\in U_1} H_1(\theta,\xi,\psi_1,\psi_2,v_1)=H_1\big(\theta,\xi,\psi_1,\psi_2,u_1(\theta,\xi)\big),$$

$$\max_{v_2\in U_2} H_2(\theta,\xi,\psi_1,\psi_2,v_2)=H_2\big(\theta,\xi,\psi_1,\psi_2,u_2(\theta,\xi)\big)$$

выполнялись *для* всех $(\theta,\xi)\in[t_0,t_1]\times[x_0,x_1],(\theta,\xi)\in[t_1,t_2)\times[x_0,x_1)$соответственно.

Доказанная теорема является аналогом принципа максимума Понтрягина *для* рассматриваемой задачи.

Замечание. Используя приведенную схему, можно доказать достаточное условие оптимальности типа принципа максимума Понтрягина, в случае многоточечного, нелинейного и выпуклого функционала качества.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ащепков *Л*.Т. Оптимальное управление разрывными системами. Н. Наука, 1987-226 с.
2. Розова В.Н. Оптимальное управление ступенчатыми системами с неинтегральным функционалом // Вестник РУДН, Сер. прикл. матем. и компьютерная математика. 2002, № 1(1), с. 131-136.
3. Арсенащвили А.И., Тадумадзе Т.А. Необходимые условия оптимальности *для* управляемых систем с переменной структурой // Труды ИПМ им. И.Н.Векуа Тбилисского гос. университета. Тбилиси, 1988, т. 27. с. 35-48.
4. Исмайлов Р.Р., Мансимов К.Б. Об условиях оптимальности в одной ступенчатой задаче управления // Журн. Выч. мат. и мат. физики. 2006, №10, с. 1758-1770.
5. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979, 432 с.
6. Понтрягин *Л*.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М. Наука, 1984, 384 с.

2020. Volume 4, Number 2 *Pages 102-110*

UOT 517.956.6

FAKTORIZASIYA ÜSULU ILƏ IKI ÖLÇÜLÜ LAPLAS TƏNLIYININ FUNDAMENTAL HƏLLINDƏN $\frac{4}{3}$-TƏRTIBLI TƏNLIYIN FUNDAMENTAL HƏLLININ ALINMASI

Allahşükür Əzizağa oğlu Quliyev[1];

Nihan Əlipənah oğlu Əliyev[2];

Natiq Səhrab oğlu İbrahimov[3];

Lənkəran Dövlət Universiteti[1];

Bakı Dövlət Universiteti[2];

Lənkəran Dövlət Universiteti[3]

quliyev_allahsukur@mail.ru

XÜLASƏ

Burada iki ölçülü Laplas tənliyinin operatoru tərtibləri $\frac{4}{3}$ və $\frac{2}{3}$ olan operatorlara faktorizə olunmaqla Laplasın fundamental həllindən $\frac{4}{3}$ tərtibli tənliyin fundamental həlli alınmışdır. Faktorizasiya zamanı vuruqların yerini dəyişməklə Laplasın fundamental həllindən $\frac{2}{3}$ tərtibli xüsusi törəməli tənlik üçün də fundamental həllin qurulması mümkün idi.

Açar sözlər: Laplas tənliyi, fundamental həll, faktorizasiya üsulu, $\frac{4}{3}$tərtibli diferensial operator, $\frac{2}{3}$tərtibli diferensial operator, kəsr tərtib xüsusi törəməli tənliyin fundamental həlli.

ВВЕДЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ДВУХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПОРЯДОК $\frac{4}{3}$ ОТ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА МЕТОДОМ ФАКТОРИЗАЦИИ.

РЕЗЮМЕ

Излагаемая работа посвящена факторизацию двумерного оператора Лапласа к оператору порядок $\frac{4}{3}$ и $\frac{2}{3}$ так, чтобы получит фундаментальное решение двумерного уравнения порядок $\frac{4}{3}$ от фундаментального решения уравнения Лапласа. Учитывая коммутативность полученных методов факторизации оператора,из проведенной схемы также получается фундаментальное решение двумерного уравнения порядка$\frac{2}{3}$.

Ключевые слова: уравнение Лапласа, фундаментальные решения, метод факторизация, дифференциальный оператор порядок$\frac{4}{3}$, дифференциальный оператор порядок$\frac{2}{3}$, фундаментальное решение уравнения с частными производными дробного порядка.

DETERMINATION OF THE FUNDAMENTAL SOLUTION OF THE EQUATION OF ORDER $\frac{4}{3}$ FROM THE FUNDAMENTAL SOLUTION OF THE TWO-DIMENSIONAL LAPLACE EQUATION BY THE FACTORIZATION METHOD

ABSTRACT

In the work the fundamental solution of the equation of order $\frac{4}{3}$is obtainedfrom the fundamental solution of the Laplace equation by factorization of the two-dimensional Laplace operator by the operators of order $\frac{4}{3}$and$\frac{2}{3}$. It is also possible to construct the fundamental solution for the partial derivative equation of order $\frac{2}{3}$ from the fundamental solution of the Laplace equation by replacing the mulpipliers during the factorization.

Keywords: Laplace equation, fundamental solution, factorization method, differential operator of order$\frac{4}{3}$, differential operator of order$\frac{2}{3}$, fundamental solution.

Giriş: Məlumdur ki, həllini bildiyimiz adi və ya xüsusi törəməli diferensial tənliyi diferensiallamaqla göstərmək olar ki, tərtibi aşağı olan diferensial tənliyin həlli, tərtibi yuxarı olan tənliyi də ödəyir. Ancaq biz burada tərs əməl ilə məşğul olacağıq. Başqa sözlə desək, yüksək tərtibli diferensial tənliyin fundamental həllinin köməyilə aşağı tərtibli diferensial tənliyin fundamental həllini alacağıq. Demək olar ki, bu yolla iki ölçülü, ikinci tərtib elliptik tip olan Laplas tənliyinin fundamental həllindən birinci tərtib elliptik tip olan Koşi-Riman tənliyinin fundamental həllini almaq olar. Lakin biz burada iki ölçülü Laplas tənliyinin fundamental həllindən, kəsr tərtibli $\frac{2}{3}$ və ya $\frac{4}{3}$ tərtibli xüsusi törəməli tənliyin fundamental həllini alacağıq. Bu enmə üsulunu, yüksək tərtibli diferensial tənliyin həllindən aşağı tərtibli diferensial tənliyin həllinin alınması üsulunu "faktorizasiya üsulu" adlandıracağıq.

Bu üsulu həm adi, həm də xüsusi törəməli diferensial tənliklərə tətbiq etmək olar. Biz bu üsulla artıq bir neçə hala baxmışıq. Əvvəlki işlərdə $\frac{1}{2}$ və $\frac{1}{3}$ tərtib xüsusi törəməli tənliklərin fundamental həllini almışıq [2], [3].

Məsələnin qoyuluşu: Yuxarıda söylədiyimiz kimi, iki ölçülü ikinci tərtib elliptik tip olan Laplas tənliyinə baxaq.

$$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_1^2}=0, \quad (1)$$

burada $x=(x_1,x_2)$. Məlumdur ki, (1) tənliyinin fundamental həlli [1]

$$U(x)=\frac{1}{2\pi}\cdot\ln|x|\,, \qquad |x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}\,, \quad (2)$$

fünksiyasıdır. Belə ki,

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2}\equiv(D_2^2+D_1^2)U(x)=\delta(x)=\delta(x_1)\delta(x_2), \quad (3)$$

burada $\delta(x_k)$, $k=1,2$. Dirakın "delta" fünksiyasıdır. Laplas operatorunu aşağıdakı şəkildə faktorizasiya edək.

$$D_2^2+D_1^2=(D_2^{\frac{2}{3}}+\alpha D_1^{\frac{2}{3}})(D_2^{\frac{4}{3}}+\beta D_1^{\frac{2}{3}}D_2^{\frac{2}{3}}+\gamma D_1^{\frac{4}{3}})=$$

$$=D_2^2+\beta D_1^{\frac{2}{3}}D_2^{\frac{4}{3}}+\gamma D_1^{\frac{4}{3}}D_2^{\frac{2}{3}}+\alpha D_1^{\frac{2}{3}}D_2^{\frac{4}{3}}+\alpha\beta D_1^{\frac{4}{3}}D_2^{\frac{2}{3}}+\alpha\gamma D_1^2. \quad (4)$$

Alınan ifadəni başladığımız ifadə ilə tutuşdursaq alarıq:

$$\begin{cases}\beta+\alpha=0,\\ \gamma+\alpha\beta=0,\\ \alpha\gamma=1,\end{cases} \qquad (5)$$

Buradan da,

$$\alpha=1,\ \ \beta=-1,\ \ \ \gamma=1 \quad (6)$$

olduğunu almış oluruq.

Onda yuxarıda apardığımız faktorizasiya aşağıdakı şəklə düşər.

$$D_2^2 + D_1^2 = (D_2^{\frac{2}{3}} + D_1^{\frac{2}{3}})(D_2^{\frac{4}{3}} - D_1^{\frac{2}{3}} D_2^{\frac{2}{3}} + D_1^{\frac{4}{3}}), \quad (7)$$

və ya

$$D_2^2 + D_1^2 = (D_2^{\frac{4}{3}} - D_1^{\frac{2}{3}} D_2^{\frac{2}{3}} + D_1^{\frac{4}{3}})(D_2^{\frac{2}{3}} + D_1^{\frac{2}{3}}). \quad (8)$$

Beləliklə (3) və (8)-dən alarıq:

$$(D_2^{\frac{4}{3}} - D_1^{\frac{2}{3}} D_2^{\frac{2}{3}} + D_1^{\frac{4}{3}})(D_2^{\frac{2}{3}} + D_1^{\frac{2}{3}})U(x) = \delta(x). \quad (9)$$

Burada aşağıdakı şəkildə işarələmə aparsaq:

$$D_2^{\frac{2}{3}} U(x) + D_1^{\frac{2}{3}} U(x) = V(x), \quad (10)$$

onda (9)-dan alarıq:

$$D_2^{\frac{4}{3}} V(x) - D_1^{\frac{2}{3}} D_2^{\frac{2}{3}} V(x) + D_1^{\frac{4}{3}} V(x) = \delta(x). \quad (11)$$

Yəni $V(x)$ fünksiyası (11) tənliyinin fundamental həllidir. Bu fundamental həllin alınması üçün (2) və (10)-dan istifadə edək:

$$V(x) = D_2^{\frac{2}{3}} U(x) + D_1^{\frac{2}{3}} U(x) = \frac{1}{2\pi} D_2^{\frac{2}{3}} \ln|x| + \frac{1}{2\pi} D_1^{\frac{2}{3}} \ln|x| = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} \ln \sqrt{x_1^2 + t^2}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} \ln \sqrt{x_2^2 + \tau^2}\, d\tau. \quad (12)$$

Alınan (10) ifadəsində

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} \ln \sqrt{x_1^2 + t^2}\, dt, \quad (13)$$

və

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} \ln \sqrt{x_2^2 + \tau^2}\, d\tau, \quad (14)$$

şəklində qəbul edib, onları ayrı-ayrılıqda hesablayaq.

Hissə-hissə inteqrallama və xüsusi törəmənin xassələrindən istifadə edərək aşağıdakı ifadəni alarıq.

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} \ln \sqrt{x_1^2 + t^2}\, dt = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^{x_2} \frac{d}{dt} \frac{(x_2 - t)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}!} \ln \sqrt{x_1^2 + t^2}\, dt =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{(x_2 - t)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}!} \ln \sqrt{x_1^2 + t^2} \Big|_{t=0}^{x_2} - \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}!} \frac{t\, dt}{x_1^2 + t^2} \right] = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x_2^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} \ln x_1 + \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} \frac{t\, dt}{x_1^2 + t^2} \right] = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x_2^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} \ln x_1 + G \right], \quad (15)$$

burada aşağıdakı kimi işarələmə qəbul edilmişdir:

$$G=\int_0^{x_2}\frac{(x_2-t)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!}\frac{t\,dt}{x_1^2+t^2}. \quad (15.1)$$

Bu inteqralda $x_2-t=\eta^3$ əvəzləməsini aparsaq, aşağıdakını alarıq:

$$G=\int_0^{x_2}\frac{(x_2-t)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!}\frac{t\,dt}{x_1^2+t^2}=-\int_{\sqrt[3]{x_2}}^{0}\frac{\eta^{-2}}{(-\frac{2}{3})!}\frac{(x_2-\eta^3)\cdot 3\eta^2\,d\eta}{x_1^2+(x_2-\eta^3)^2}=\frac{3}{(-\frac{2}{3})!}\int_0^{\sqrt[3]{x_2}}\frac{x_2-\eta^3}{\eta^6-2x_2\eta^3+x_1^2+x_2^2}d\eta=$$

$$=\frac{3}{(-\frac{2}{3})!}\int_0^{\sqrt[3]{x_2}}\frac{x_2-\eta^3}{\left(\eta^3-(x_2+ix_1)\right)\left(\eta^3-(x_2-ix_1)\right)}d\eta. \quad (16)$$

Burada inteqralaltı fünksiyanı sadə kəsrlərə ayırsaq aşağıdakı kimi nəticə alacağıq:

$$G=\frac{3}{(-\frac{2}{3})!}\left[-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt[3]{x_2}}\frac{d\eta}{\eta^3-(x_2+ix_1)}-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt[3]{x_2}}\frac{d\eta}{\eta^3-(x_2-ix_1)}\right]=\frac{3}{(-\frac{2}{3})!}[G_1+G_2], \quad (17)$$

burada,

$$G_1=-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt[3]{x_2}}\frac{d\eta}{\eta^3-(x_2+ix_1)}\ ,\ G_2=-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt[3]{x_2}}\frac{d\eta}{\eta^3-(x_2-ix_1)}\ , \quad (18)$$

qəbul etsək və inteqralaltı fünksiyaları yenidən sadə kəsrlərə ayırıb hesablasaq alarıq.

$$G_1=-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt[3]{x_2}}\frac{d\eta}{\eta^3-(x_2+ix_1)}=-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt[3]{x_2}}\frac{d\eta}{(\eta-\sqrt[3]{x_2+ix_1})(\eta^2+\eta\sqrt[3]{x_2+ix_1}+\sqrt[3]{(x_2+ix_1)^2})}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt[3]{x_2}}\left(\frac{\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x_2+ix_1)^2}}}{\eta-\sqrt[3]{x_2+ix_1}}-\frac{\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x_2+ix_1)^2}}\eta+\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x_2+ix_1}}}{\eta^2+\eta\sqrt[3]{x_2+ix_1}+\sqrt[3]{(x_2+ix_1)^2}}\right)d\eta=$$

$$=-\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt[3]{(x_2+ix_1)^2}}\int_0^{\sqrt[3]{x_2}}\left(\frac{1}{\eta-\sqrt[3]{x_2+ix_1}}-\frac{\eta+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x_2+ix_1}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x_2+ix_1}}{(\eta+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x_2+ix_1})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{x_2+ix_1})^2}\right)d\eta.$$

Burada alınan sadə kəsrlərin ibtidai fünksiyasını tapıb, sərhəd qiymətlərini yerinə yazsaq, onda

$$G_1=-\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt[3]{(x_2+ix_1)^2}}\left[\ln\left|\eta-\sqrt[3]{x_2+ix_1}\right|\Big|_{\eta=0}^{\sqrt[3]{x_2}}-\frac{1}{2}\ln\left|(\eta+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x_2+ix_1})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{x_2+ix_1})^2\right)\Big|_{\eta=0}^{\sqrt[3]{x_2}}-\right.$$

$$\left.-\sqrt{3}\,arctg\frac{\eta+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x_2+ix_1}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{x_2+ix_1}}\Big|_{\eta=0}^{\sqrt[3]{x_2}}\right]=-\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt[3]{(x_2+ix_1)^2}}\left[\ln\frac{\sqrt[3]{x_2}-\sqrt[3]{x_2+ix_1}}{-\sqrt[3]{x_2+ix_1}}-\right.$$

$$-\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt[3]{x_2}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x_2+ix_1})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{x_2+ix_1})^2}{\sqrt[3]{(x_2+ix_1)^2}}-\sqrt{3}\left(arctg\frac{2\cdot\sqrt[3]{x_2}+\sqrt[3]{x_2+ix_1}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{x_2+ix_1}}-arctg\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg]=$$

$$=-\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt[3]{(x_2+ix_1)^2}}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt[3]{x_2+ix_1}-\sqrt[3]{x_2})^3}{ix_1}-\sqrt{3}\left(arctg\frac{2\cdot\sqrt[3]{x_2}+\sqrt[3]{x_2+ix_1}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{x_2+ix_1}}-\frac{\pi}{6}\right)\right]. \quad (19)$$

Eyni qayda ilə G_2 – nihesablayaq:

$$G_2=-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt[3]{x_2}}\frac{d\eta}{\eta^3-(x_2-ix_1)}=-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt[3]{x_2}}\frac{d\eta}{(\eta-\sqrt[3]{x_2-ix_1})(\eta^2+\eta\sqrt[3]{x_2-ix_1}+\sqrt[3]{(x_2-ix_1)^2})}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt[3]{x_2}}\left(\frac{\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x_2-ix_1)^2}}}{\eta-\sqrt[3]{x_2-ix_1}}-\frac{\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x_2-ix_1)^2}}\eta+\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x_2-ix_1}}}{\eta^2+\eta\sqrt[3]{x_2-ix_1}+\sqrt[3]{(x_2-ix_1)^2}}\right)d\eta=$$

$$=-\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt[3]{(x_2-ix_1)^2}}\int_0^{\sqrt[3]{x_2}}\left(\frac{1}{\eta-\sqrt[3]{x_2-ix_1}}-\frac{\eta+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x_2-ix_1}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x_2-ix_1}}{(\eta+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x_2-ix_1})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{x_2-ix_1})^2}\right)d\eta.$$

Burada da alınan sadə kəsrlərin ibtidai fünksiyasını tapıb, sərhəd qiymətlərini yerinə yazsaq aşağıdakı ifadəni alarıq.

$$G_2=-\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt[3]{(x_2-ix_1)^2}}\left[\ln\left|\eta-\sqrt[3]{x_2-ix_1}\right|_{\eta=0}^{\sqrt[3]{x_2}}-\frac{1}{2}\ln\left|(\eta+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x_2-ix_1})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{x_2-ix_1})^2)\right|_{\eta=0}^{\sqrt[3]{x_2}}-\right.$$

$$\left.-\sqrt{3}\,arctg\frac{\eta+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x_2-ix_1}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{x_2-ix_1}}\right|_{\eta=0}^{\sqrt[3]{x_2}}\Bigg]=-\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt[3]{(x_2-ix_1)^2}}\left[\ln\frac{\sqrt[3]{x_2}-\sqrt[3]{x_2-ix_1}}{-\sqrt[3]{x_2-ix_1}}-\right.$$

$$-\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt[3]{x_2}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x_2-ix_1})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{x_2-ix_1})^2}{\sqrt[3]{(x_2-ix_1)^2}}-\sqrt{3}\left(arctg\frac{2\cdot\sqrt[3]{x_2}+\sqrt[3]{x_2-ix_1}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{x_2-ix_1}}-arctg\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg]=$$

$$=-\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt[3]{(x_2-ix_1)^2}}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt[3]{x_2-ix_1}-\sqrt[3]{x_2})^3}{-ix_1}-\sqrt{3}\left(arctg\frac{2\cdot\sqrt[3]{x_2}+\sqrt[3]{x_2-ix_1}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{x_2-ix_1}}-\frac{\pi}{6}\right)\right]. \quad (20)$$

Alınan (17) və (18) ifadələrini (15)-də və daha sonra (13)-də nəzərə alsaq aşağıdakı kimi nəticə alarıq.

$$I_2=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{x_2^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!}\ln x_1+\frac{3}{(-\frac{2}{3})!}\left[-\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt[3]{(x_2+ix_1)^2}}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt[3]{x_2+ix_1}-\sqrt[3]{x_2})^3}{ix_1}-\sqrt{3}\left(arctg\frac{2\cdot\sqrt[3]{x_2}+\sqrt[3]{x_2+ix_1}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{x_2+ix_1}}-\frac{\pi}{6}\right)\right)-\right.\right.$$

$$-\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt[3]{(x_2-ix_1)^2}}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt[3]{x_2-ix_1}-\sqrt[3]{x_2})^3}{-ix_1}-\sqrt{3}\left(arctg\frac{2\cdot\sqrt[3]{x_2}+\sqrt[3]{x_2-ix_1}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{x_2-ix_1}}-\frac{\pi}{6}\right)\right)\Bigg]\Bigg\}. \quad (21)$$

Beləliklə biz I_2-ni hesablamış olduq.

Analoji qayda ilə I_1-i hesablayaq.

$$I_1=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_1}\int_0^{x_1}\frac{(x_1-\tau)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!}\ln\sqrt{x_2^2+\tau^2}\,d\tau=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_1}\int_0^{x_1}\frac{d}{d\tau}\frac{(x_1-\tau)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}!}\ln\sqrt{x_2^2+\tau^2}\,d\tau=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{(x_1-\tau)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}!}\ln\sqrt{x_2^2+\tau^2}\Bigg|_{\tau=0}^{x_1}-\int_0^{x_1}\frac{(x_1-\tau)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}!}\frac{\tau d\tau}{x_2^2+\tau^2}\right]=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{x_1^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!}\ln x_2+\int_0^{x_1}\frac{(x_1-\tau)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!}\frac{\tau d\tau}{x_2^2+\tau^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{x_1^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!}\ln x_2+F\right], \quad (22)$$

burada aşağıdakı kimi işarələmə qəbul edilmişdir:

$$F=\int_0^{x_1}\frac{(x_1-\tau)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!}\frac{\tau d\tau}{x_2^2+\tau^2} \quad (22.1)$$

Bu inteqralda $x_1-\tau=\xi^3$ əvəzləməsini aparsaq, aşağıdakını alarıq:

$$F=\int_0^{x_1}\frac{(x_1-\tau)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!}\frac{\tau d\tau}{x_2^2+\tau^2}=\int_{\sqrt[3]{x_1}}^{0}\frac{\xi^{-2}}{(-\frac{2}{3})!}\frac{(x_1-\xi^3)\cdot 3\xi^2\,d\xi}{x_2^2+(x_1-\xi^3)^2}=\frac{3}{(-\frac{2}{3})!}\int_0^{\sqrt[3]{x_1}}\frac{x_1-\xi^3}{\xi^6-2x_1\xi^3+x_1^2+x_2^2}d\xi=$$

$$=\frac{3}{(-\frac{2}{3})!}\int_0^{\sqrt[3]{x_1}}\frac{x_1-\xi^3}{\left(\xi^3-(x_1+ix_2)\right)\left(\xi^3-(x_1-ix_2)\right)}d\xi. \quad (23)$$

Burada inteqralatı funksiyanı sadə kəsrlərə ayırsaq aşağıdakını alacağıq.

$$F=\frac{3}{(-\frac{2}{3})!}\left[-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt[3]{x_1}}\frac{d\xi}{\left(\xi^3-(x_1+ix_2)\right)}-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt[3]{x_1}}\frac{d\xi}{\left(\xi^3-(x_1-ix_2)\right)}\right]=\frac{3}{(-\frac{2}{3})!}\left[F_1+F_2\right], \quad (24)$$

burada,

$$F_1=-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt[3]{x_1}}\frac{d\xi}{\xi^3-(x_1+ix_2)},\ F_2=-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt[3]{x_1}}\frac{d\xi}{\xi^3-(x_1-ix_2)}, \quad (25)$$

qəbul etsək və inteqralaltı funksiyaları yenidən sadə kəsrlərə ayırıb hesablasaq alarıq.

$$F_1=-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt[3]{x_1}}\frac{d\xi}{\xi^3-(x_1+ix_2)}=-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt[3]{x_1}}\frac{d\xi}{(\xi-\sqrt[3]{x_1+ix_2})(\xi^2+\xi\sqrt[3]{x_1+ix_2}+\sqrt[3]{(x_1+ix_2)^2})}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt[3]{x_1}}\left(\frac{\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x_1+ix_2)^2}}}{\xi-\sqrt[3]{x_1+ix_2}}-\frac{\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x_1+ix_2)^2}}\xi+\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x_1+ix_2}}}{\xi^2+\xi\sqrt[3]{x_1+ix_2}+\sqrt[3]{(x_1+ix_2)^2}}\right)d\xi=$$

$$= -\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt[3]{(x_1+ix_2)^2}}\int_0^{\sqrt[3]{x_1}}\left(\frac{1}{\xi-\sqrt[3]{x_1+ix_2}}-\frac{\xi+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x_1+ix_2}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x_1+ix_2}}{(\xi+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x_1+ix_2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{x_1+ix_2})^2}\right)d\xi.$$

Burada alınan sadə kəsrlərin ibtidai fünksiyasını tapıb, sərhəd qiymətlərini yerinə yazaq.

Onda,

$$F_1 = -\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt[3]{(x_1+ix_2)^2}}\left[\ln\left|\xi-\sqrt[3]{x_1+ix_2}\right|_{\xi=0}^{\sqrt[3]{x_1}}-\frac{1}{2}\ln\left|(\xi+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x_1+ix_2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{x_1+ix_2})^2\right)\right|_{\xi=0}^{\sqrt[3]{x_1}}-$$

$$-\sqrt{3}\,arctg\frac{\xi+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x_1+ix_2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{x_1+ix_2}}\Bigg|_{\xi=0}^{\sqrt[3]{x_1}}\Bigg] = -\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt[3]{(x_1+ix_2)^2}}\left[\ln\frac{\sqrt[3]{x_1}-\sqrt[3]{x_1+ix_2}}{-\sqrt[3]{x_1+ix_2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt[3]{x_1}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x_1+ix_2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{x_1+ix_2})^2}{\sqrt[3]{(x_1+ix_2)^2}}-\sqrt{3}\left(arctg\frac{2\cdot\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_1+ix_2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{x_1+ix_2}}-arctg\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt[3]{(x_1+ix_2)^2}}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt[3]{x_1+ix_2}-\sqrt[3]{x_1})^3}{ix_2}-\sqrt{3}\left(arctg\frac{2\cdot\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_1+ix_2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{x_1+ix_2}}-\frac{\pi}{6}\right)\right]. \quad (26)$$

Analoji qayda ilə F_2 −nihesablayaq.

$$F_2 = -\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt[3]{x_1}}\frac{d\xi}{\xi^3-(x_1-ix_2)} = -\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt[3]{x_1}}\frac{d\xi}{(\xi-\sqrt[3]{x_2-ix_1})(\xi^2+\xi\sqrt[3]{x_2-ix_1}+\sqrt[3]{(x_2-ix_1)^2})} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt[3]{x_1}}\left(\frac{\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x_1-ix_2)^2}}}{\xi-\sqrt[3]{x_1-ix_2}}-\frac{\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x_1-ix_2)^2}}\xi+\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x_1-ix_2}}}{\xi^2+\xi\sqrt[3]{x_1-ix_2}+\sqrt[3]{(x_1-ix_2)^2}}\right)d\xi =$$

$$= -\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt[3]{(x_1-ix_2)^2}}\int_0^{\sqrt[3]{x_1}}\left(\frac{1}{\xi-\sqrt[3]{x_1-ix_2}}-\frac{\xi+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x_1-ix_2}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x_1-ix_2}}{(\xi+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x_1-ix_2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{x_1-ix_2})^2}\right)d\xi.$$

Burada da alınan sadə kəsrlərin ibtidai fünksiyasını tapıb, sərhəd qiymətlərini yerinə yazsaq aşağıdakı ifadəni alarıq.

$$F_2 = -\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt[3]{(x_1-ix_2)^2}}\left[\ln\left|\xi-\sqrt[3]{x_1-ix_2}\right|_{\xi=0}^{\sqrt[3]{x_1}}-\frac{1}{2}\ln\left|(\xi+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x_1-ix_2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{x_1-ix_2})^2\right)\right|_{\xi=0}^{\sqrt[3]{x_1}}-$$

$$-\sqrt{3}\,arctg\frac{\xi+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x_1-ix_2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{x_1-ix_2}}\Bigg|_{\xi=0}^{\sqrt[3]{x_1}}\Bigg] = -\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt[3]{(x_1-ix_2)^2}}\left[\ln\frac{\sqrt[3]{x_1}-\sqrt[3]{x_1-ix_2}}{-\sqrt[3]{x_1-ix_2}}-\right.$$

$$-\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt[3]{x_1}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x_1-ix_2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{x_1-ix_2})^2}{\sqrt[3]{(x_1-ix_2)^2}}-\sqrt{3}\left(arctg\frac{2\cdot\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_1-ix_2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{x_1-ix_2}}-arctg\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg]=$$

$$=-\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt[3]{(x_1-ix_2)^2}}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt[3]{x_1-ix_2}-\sqrt[3]{x_2})^3}{-ix_2}-\sqrt{3}\left(arctg\frac{2\cdot\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_1-ix_2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{x_1-ix_2}}-\frac{\pi}{6}\right)\right]. \quad (27)$$

Yuxarıdakı (22) ifadəsində (24)-ü nəzərə alsaq:

$$F=\frac{3}{(-\frac{2}{3})!}\Bigg[-\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt[3]{(x_1+ix_2)^2}}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt[3]{x_1+ix_2}-\sqrt[3]{x_1})^3}{ix_2}-\sqrt{3}\left(arctg\frac{2\cdot\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_1+ix_2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{x_1+ix_2}}-\frac{\pi}{6}\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt[3]{(x_1-ix_2)^2}}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt[3]{x_1-ix_2}-\sqrt[3]{x_2})^3}{-ix_2}-\sqrt{3}\left(arctg\frac{2\cdot\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_1-ix_2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{x_1-ix_2}}-\frac{\pi}{6}\right)\right]\Bigg], \quad (28)$$

münasibəti alınmışolar.

Eyni zamanda $I_1=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{x_1^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!}\ln x_2+F\right]$ olduğundan,

$$I_1=\frac{1}{2\pi}\Bigg\{\frac{x_1^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!}\ln x_2+\frac{3}{(-\frac{2}{3})!}\Bigg[-\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt[3]{(x_1+ix_2)^2}}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt[3]{x_1+ix_2}-\sqrt[3]{x_1})^3}{ix_2}-$$

$$-\sqrt{3}\left(arctg\frac{2\cdot\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_1+ix_2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{x_1+ix_2}}-\frac{\pi}{6}\right)\right)-\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt[3]{(x_1-ix_2)^2}}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt[3]{x_1-ix_2}-\sqrt[3]{x_2})^3}{-ix_2}-$$

$$-\sqrt{3}\left(arctg\frac{2\cdot\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_1-ix_2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{x_1-ix_2}}-\frac{\pi}{6}\right)\right)\Bigg]\Bigg\}. \quad (29)$$

İndi isə (12) ifadəsinə qayıdıb, (21) və (29)-u nəzərə almaqla onu aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$V(x)=I_2+I_1,$$

olduğundan, aşağıdakı hökmü alarıq.

Teorem:Törəməsinin tərtibi $\frac{4}{3}$ olan, bircinsli (bütün hədlərdə törəmələrin tərtibi eynidir) sabit əmsallı xüsusi törəməli (11) tənliyinin fundamental həlli

$$V(x)=\frac{1}{2\pi(-\frac{2}{3})!}\Bigg\{x_2^{-\frac{2}{3}}\ln x_1-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{(x_2+ix_1)^2}}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt[3]{x_2+ix_1}-\sqrt[3]{x_2})^3}{ix_1}-\sqrt{3}\left(arctg\frac{2\cdot\sqrt[3]{x_2}+\sqrt[3]{x_2+ix_1}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{x_2+ix_1}}-\frac{\pi}{6}\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{(x_2-ix_1)^2}}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt[3]{x_2-ix_1}-\sqrt[3]{x_2})^3}{-ix_1}-\sqrt{3}\left(arctg\frac{2\cdot\sqrt[3]{x_2}+\sqrt[3]{x_2-ix_1}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{x_2-ix_1}}-\frac{\pi}{6}\right)\right]+$$

$$+x_1^{-\frac{2}{3}}\ln x_2-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{(x_1+ix_2)^2}}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt[3]{x_1+ix_2}-\sqrt[3]{x_1})^3}{ix_2}-\right.$$

$$\left.-\sqrt{3}\left(arctg\frac{2\cdot\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_1+ix_2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{x_1+ix_2}}-\frac{\pi}{6}\right)\right]-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{(x_1-ix_2)^2}}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt[3]{x_1-ix_2}-\sqrt[3]{x_2})^3}{-ix_2}-\right.$$

$$\left.\left.-\sqrt{3}\left(arctg\frac{2\cdot\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_1-ix_2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{x_1-ix_2}}-\frac{\pi}{6}\right)\right]\right\} \quad (30)$$

şəklindədir.

ƏDƏBİYYAT

1. В.С.Владимиров. Уравнения математической физики, Москва, «Наука», 1981, 512 стр.
2. N.Əliyev, A.Quliyev. Koşi-Riman tənliyinin fundamental həllindən yarımtərtibli elliptik tip tənliyin fundamental həllini almaq üçün faktorizasiya üsulu. Elmi xəbərlər, Təbiət elmlər seriyası N-2, Lənkəran Dövlət Universiteti-2017, s.s., 67-72.
3. N.Əliyev, N.İbrahimov, A.Quliyev. A factorization method for the determination of the fundamental solution to the linear $\frac{1}{3}$-order ellipic equation, XXXI International Conference Problems of Decision Making Under Uncertainties (PDMU-2018) July 3-8, Lankaran-Baku, Republic of Azerbaijan. p.p., 14-16.

2020. Volume 4, Number 2 *Pages 111-119*

UOT 519.64

DİRAK OPERATORUNUN MƏXSUSİ ƏDƏDLƏRİNİN TƏKRARLANMASI HAQQINDA

FƏRZULLAZADƏ Abid Qalib oğlu

Lənkəran Dövlət Universiteti,

General Həzi Aslanov 50, Lənkəran, AZ4200, Azərbaycan

abid.ferzullazade@mail.ru

XÜLASƏ

Məqalədə kanonik şəkli M.G. Qasımov tərəfindən verilən Dirak sisteminin və ayrılmayan sərhəd şərtlərinin doğurduğu sərhəd məsələsinə baxılır. Sərhəd şərtlərindən birinə spektral parametrin xətti funksiyası daxildir. Baxılan sərhəd məsələsinin məxsusi ədədlərinin təkrarlanması araşdırılır. Məxsusi ədədlərin (həmçinin sərhəd məsələsinin xarakteristik funksiyasının sıfırlarının) iki dəfə təkrarlanması üçün zəruri və kafi şərtlər tapılır. Bu şərtlərdə Dirak tənliyinin həll komponentlərinin qiymətləri və sərhəd şərtlərinin əmsalları iştirak edir. Qeyd edək ki, məqalədə alınan nəticələrdən diferensial operatorlar üçün spektral analizin düz və tərs məsələlərinin tədqiqində istifadə oluna bilər. Belə ki, məxsusi ədədlərin təkrarlanması üçün alınan şərtlər spektrin strukturunun araşdırılmasında, operatorların məxsusi ədədlərinin qarşılıqlı yerləşmə qaydasının müəyyən edilməsində və bərpa məsələlərində kafi şərtlərin tapılmasında mühüm əhəmiyyət kəsb edir.

Açar sözlər: Dirak operatoru, ayrılmayan sərhəd şərtləri, məxsusi ədədlərin təkrarlanması.

ON THE MULTİPLİCİTİES OF THE EİGENVALUES OF THE DİRAC OPERATOR

ABSTRACT

The paper considers the boundary value problem generated by nonseparated boundary conditions and the Dirac system in the canonical form issued by M.G. Gasimov. One of the boundary conditions includes a linear function of the spectral parameter. The multiplicity of the eigenvalues of the considered boundary value problem is investigated. Necessary and sufficient conditions for double eigenvalues (and also zeros of the characteristic function of the boundary value problem) are obtained. Under these conditions, there are the values of the components of the solution to the Dirac equation and the coefficients of the boundary conditions. Note that in this paper the results obtained can be used to study direct and inverse problems of spectral analysis for differential operators. It can be added that the conditions obtained for the multiplicity of the eigenvalues are important in studying the structure of the spectrum, in determining the rule for the mutual arrangement of the eigenvalues of operators, and in finding sufficient conditions for recovery problems.

Key words: Dirac operator, nonseparated boundary conditions, the multiplicity of the eigenvalues.

О КРАТНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА ДИРАКА

РЕЗЮМЕ

В работе рассматривается краевая задача, порожденными неразделенными граничными условиями и системой Дирака в каноническом виде выданном М.Г. Гасымовом. В одно из граничных условий входит линейная функция спектрального параметра. Исследуется кратности собственных значений рассматриваемой краевой задачи. Получены необходимые и достаточные условия для двухкратных собственных значений (а также нулей характеристический функции краевой задачи). В этих условиях имеется значения компонентов решения уравнения Дирака и коэффициенты граничных условий. Отметим, что в данной работе полученные результаты могут быть использованы при исследовании прямых и обратных задач спектрального анализа для дифференциальных операторов. Можно добавить, что получаемые условия для кратности собственных значений имеет важное значение при исследовании структуры спектра, при определении правила взаимного расположения собственных чисел операторов и при нахождении достаточных условий восстановительных задач.

Ключевые слова: оператор Дирака, неразделенные граничные условия, кратность собственных значений.

1. Giriş

Məlumdur [1] ki, birölçülü stasionar Dirak sisteminin kanonik şəkli aşağıdakı kimidir:

$$BY'(x)+Q(x)Y(x)=\lambda Y(x), \quad (1)$$

burada $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $Q(x)=\begin{pmatrix}p(x) & q(x)\\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix}$, $Y(x)=\begin{pmatrix}y_1(x)\\ y_2(x)\end{pmatrix}$.

$W_2^1[0,\pi]$ ilə $[0,\pi]$ parçasında törəməsi kvadratı ilə cəmlənən (yəni $L_2[0,\pi]$-yə daxil olan) mütləq kəsilməz funksiyalardan ibarət olan Sobolev fəzasını işarə edək. Fərz edək ki, (1) tənliyinin $Q(x)$ matris funksiyasının $p(x)$ və $q(x)$ elementləri $W_2^1[0,\pi]$ fəzasına daxildir.

$[0,\pi]$ parçasında (1) kanonik Dirak tənliyinin və

$$A_0Y(0)+A_1Y(\pi)=0 \quad (2)$$

ümumi sərhəd şərtlərinin doğurduğu sərhəd məsələsinə baxaq, burada

$$A_0=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}, \ A_1=\begin{pmatrix}a_{13} & a_{14}\\ a_{23} & a_{24}\end{pmatrix},$$

a_{ik} $\left(i=1,2;\ k=\overline{1,4}\right)$ istənilən kompleks ədədlərdir.

Tərif. Əgər λ parametrinin $\lambda=\lambda_0$ qiymətində (1) tənliyinin (2) sərhəd şərtlərini ödəyən $Y_0(x)$ trivial olmayan həlli varsa, onda λ_0 ədədinə (1), (2) sərhəd məsələsinin məxsusi ədədi, $Y_0(x)$ vektor-funksiyasına isə həmin sərhəd məsələsinin λ_0 məxsusi ədədinə uyğun məxsusi vektor-funksiyası deyilir. Verilən λ_0 məxsusi ədədi üçün (1), (2) məsələsinin xətti asılı olmayan həllərinin sayı λ_0 məxsusi ədədinin təkrarlanma dərəcəsi adlanır.

Tutaq ki, (2) sərhəd şərtlərində

$$A_0=\begin{pmatrix}\alpha\lambda+\beta & 1\\ -\overline{\omega} & 0\end{pmatrix}, \ A_1=\begin{pmatrix}\omega & 0\\ \gamma & 1\end{pmatrix}.$$

Onda sərhəd şərtləri

$$\begin{cases}y_2(0)+(\alpha\lambda+\beta)y_1(0)+\omega y_1(\pi)=0\\ y_2(\pi)+\gamma y_1(\pi)-\overline{\omega}y_1(0)=0\end{cases}, \quad (3)$$

şəklinə düşər, burada $\lambda-$spektral parametr, $\alpha,\beta,\gamma-$ həqiqi ədədlər, ω isə kompleks ədəddir. (1), (3) sərhəd məsələsini D ilə işarə edəcəyik.

Ayrılan sərhəd şərtli ($\alpha=\omega=0$) Dirak operatorunun spektral xassələri [2, 3, 4, 5, 6, 7] və başqa elmi işlərdə tədqiq olunmuşdur. Sərhəd şərtləri ayrılmayan (o cümlədən periodik, antiperiodik, kvaziperiodik, ümumiləşmiş periodik) olduqda [8, 9, 10, 11, 12, 13], sərhəd şərtlərinə spektral parametr daxil olan hallarda isə [14, 15, 16, 17, 18] məqalələrində Dirak sistemi üçün spektral analizin düz və tərs məsələləri həll edilmişdir.

Bu məqalədə $\alpha\omega\neq 0$ olduqda, yəni ayrılmayan sərhəd şərtlərinin birinə spektral parametrin xətti funksiyası daxil olan halda D sərhəd məsələsinin məxsusi ədədlərinin (həmçinin D xarakteristik funksiyasının sıfırlarının) təkrarlanması üçün zəruri və kafi şərtlər tapılmışdır.

2. Sərhəd məsələsinin məxsusi ədədlərinin təkrarlanması

$C(x,\lambda)=\begin{pmatrix} c_1(x,\lambda) \\ c_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$ və $S(x,\lambda)=\begin{pmatrix} s_1(x,\lambda) \\ s_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$ ilə (1) tənliyinin

$$C(0,\lambda)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ S(0,\lambda)=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

başlanğıc şərtlərini ödəyən həllərini işarə edək. Bu həllərin Vronski determinantı eyniliklə 1-ə bərabərdir, yəni

$$c_1(x,\lambda)s_2(x,\lambda)-c_2(x,\lambda)s_1(x,\lambda)\equiv 1. \quad (5)$$

(1) tənliyinin ümumi həlli

$$Y(x,\lambda)=M_1C(x,\lambda)+M_2S(x,\lambda)$$

şəklində olacaqdır, burada M_1 və M_2 istənilən sabitlərdir. Bu həlli (3) sərhəd şərtlərində nəzərə alsaq və (5) eyniliyindən istifadə etsək, asanlıqla göstərmək olar ki, D sərhəd məsələsinin xarakteristik funksiyası

$$d(\lambda)=2\,\mathrm{Re}\,\omega-c_2(\pi,\lambda)-\gamma c_1(\pi,\lambda)+|\omega|^2 s_1(\pi,\lambda)+(\alpha\lambda+\beta)[s_2(\pi,\lambda)+\gamma s_1(\pi,\lambda)] \quad (6)$$

şəklindədir. Bu funksiyanın sıfırları D məsələsinin məxsusi ədədləridir. Məlumdur [17, səh. 191] ki, $\alpha<0$ olduqda D məsələsinin məxsusi ədədləri həqiqidir. Aşağıda hər yerdə fərz edəcəyik ki, $\alpha<0$.

Teorem 1. λ_0 ədədi yalnız və yalnız o zaman D sərhəd məsələsinin iki dəfə təkrarlanan məxsusi ədədi olar ki, ω sıfırdan fərqli həqiqi ədəd olsun və

$$\alpha\lambda_0+\beta+\omega c_1(\pi,\lambda_0)=0, \quad (7)$$

$$s_2(\pi,\lambda_0)+\gamma s_1(\pi,\lambda_0)=0 \quad (8)$$

bərabərlikləri ödənsin.

İsbatı. Tutaq ki, λ_0 ədədi D sərhəd məsələsinin iki dəfə təkrarlanan məxsusi ədədidir. Onda $\lambda=\lambda_0$ qiyməti üçün (1) tənliyinin (3) sərhəd şərtlərini ödəyən iki xətti asılı olmayan $Y_1(x)$ və $Y_2(x)$ həlləri var. (1) tənliyinin hər hansı başqa həlli $Y_1(x)$ və $Y_2(x)$ həllərinin xətti kombinasiyası kimi (3) sərhəd şərtlərini ödəyəcəkdir. Xüsusi halda bu $C(x,\lambda_0)$ və $S(x,\lambda_0)$ həlləri üçün doğrudur. (3) və (4) münasibətlərinə əsasən

$$\begin{pmatrix} \alpha\lambda_0+\beta & 1 \\ -\overline{\omega} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1(\pi,\lambda_0) \\ c_2(\pi,\lambda_0) \end{pmatrix}=0,$$

$$\begin{pmatrix} \alpha\lambda_0+\beta & 1 \\ -\overline{\omega} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1(\pi,\lambda_0) \\ s_2(\pi,\lambda_0) \end{pmatrix}=0.$$

Buradan alırıq ki,

$$\alpha\lambda_0+\beta+\omega c_1(\pi,\lambda_0)=0,$$

$$s_2(\pi,\lambda_0)+\gamma s_1(\pi,\lambda_0)=0,$$
$$-\overline{\omega}+\gamma c_1(\pi,\lambda_0)+c_2(\pi,\lambda_0)=0,$$
$$1+\omega s_1(\pi,\lambda_0)=0. \quad (9)$$

Deməli, (7) və (8) münasibətləri ödənir. (9) bərabərliyinə əsasən $\omega=-\frac{1}{s_1(\pi,\lambda_0)}$. λ_0 həqiqi ədəd olduğundan $s_1(\pi,\lambda_0)$ həqiqi olur. Deməli, ω sıfırdan fərqli həqiqi ədəddir.

Tərsinə, tutaq ki, $\omega-$sıfırdan fərqli həqiqi ədəddir və (7) və (8) bərabərlikləri ödənir. Göstərək ki, λ_0 bu məsələnin iki dəfə təkrarlanan məxsusi ədədidir. (5) eyniliyinə əsasən

$$c_1(x,\lambda)\left[s_2(x,\lambda)+\gamma s_1(x,\lambda)\right]-s_1(x,\lambda)\left[c_2(x,\lambda)+\gamma c_1(x,\lambda)\right]\equiv 1. \quad (10)$$

(8) və (10)-dan asanlıqla alınır ki,

$$c_2(\pi,\lambda_0)+\gamma c_1(\pi,\lambda_0)=-\frac{1}{s_1(\pi,\lambda_0)}. \quad (11)$$

$d(\lambda_0)=0$ bərabərliyində (6), (8), (11) münasibətlərini və ω-nın həqiqi ədəd olmasını nəzərə alsaq,

$$2\omega+\frac{1}{s_1(\pi,\lambda_0)}+\omega^2 s_1(\pi,\lambda_0)=0$$

bərabərliyini alarıq. Buradan asanlıqla tapırıq ki,

$$\omega s_1(\pi,\lambda_0)=-1.$$

Onda

$$d(\lambda_0)=2\omega-c_2(\pi,\lambda_0)-\gamma c_1(\pi,\lambda_0)+\omega^2 s_1(\pi,\lambda_0)+$$
$$+(\alpha\lambda_0+\beta)\left[s_2(\pi,\lambda_0)+\gamma s_1(\pi,\lambda_0)\right]=$$
$$=2\omega-c_2(\pi,\lambda_0)-\gamma c_1(\pi,\lambda_0)-\omega=0,$$

yəni

$$\gamma c_1(\pi,\lambda_0)+c_2(\pi,\lambda_0)=\omega.$$

(7), (8) şərtlərindən, (4)-dən və son iki bərabərlikdən istifadə etməklə aşağıdakı münasibətlər alınır:

$$c_2(0,\lambda)+(\alpha\lambda_0+\beta)c_1(0,\lambda)+\omega c_1(\pi,\lambda)=\alpha\lambda_0+\beta+\omega c_1(\pi,\lambda)=0,$$
$$c_2(\pi,\lambda)+\gamma c_1(\pi,\lambda)-\overline{\omega}c_1(0,\lambda)=\omega-\omega=0;$$
$$s_2(0,\lambda)+(\alpha\lambda_0+\beta)s_1(0,\lambda)+\omega s_1(\pi,\lambda)=1+\omega s_1(\pi,\lambda)=0,$$
$$s_2(\pi,\lambda)+\gamma s_1(\pi,\lambda)-\overline{\omega}s_1(0,\lambda)=s_2(\pi,\lambda)+\gamma s_1(\pi,\lambda)=0.$$

Deməli, (1) tənliyinin $C(x,\lambda_0)$ və $S(x,\lambda_0)$ şəklində həlləri (3) sərhəd şərtlərini ödəyir və buna görə də onlar D məsələsinin məxsusi vektor-funksiyalarıdır. Bu həllər xətti asılı olmadığından λ_0 iki dəfə təkrarlanan məxsusi ədəd olur. Teorem isbat olundu.

3. Xarakteristik funksiyanın sıfırlarının təkrarlanması

D sərhəd məsələsinin $d(\lambda)$ xarakteristik funksiyasının sıfırlarının təkrarlanması haqqında aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 2. λ_0 ədədinin D sərhəd məsələsinin $d(\lambda)$ xarakteristik funksiyasının təkrarlanan sıfrı olması üçün Teorem 2-nin şərtlərinin ödənməsi zəruri və kafidir.

İsbatı. ***Zərurilik.*** Tutaq ki, λ_0 ədədi $d(\lambda)$ funksiyasının təkrarlanan sıfrıdır, yəni $d(\lambda_0)=\dot{d}(\lambda_0)=0$ (funksiya üzərindəki nöqtə λ-ya görə törəməni göstərir). İsbat edək ki, ω sıfırdan fərqli həqiqi ədəddir və (7), (8) bərabərlikləri ödənir.

Əvvəlcə göstərək ki,

$$s_2(\pi,\lambda_0)+\gamma s_1(\pi,\lambda_0)\neq 0, \quad (12)$$

olarsa, onda $\dot{d}(\lambda_0)\neq 0$. Məlumdur [5, səh. 257] ki,

$$\begin{aligned}\dot{c}_j(x,\lambda)&=\int_0^x R_j^T(x,t,\lambda)\ C(t,\lambda)dt,\\ \dot{s}_j(x,\lambda)&=\int_0^x S^T(t,\lambda)\ R_j(x,t,\lambda)dt,\end{aligned} \quad (13)$$

burada

$$R_j(x,t,\lambda)=s_j(x,\lambda)C(t,\lambda)-c_j(x,\lambda)S(t,\lambda),\ j=1,2.$$

T isə transponirə işarəsidir. $d(\lambda)$ xarakteristik funksiyasından λ-ya görə törəmə alaq:

$$\dot{d}(\lambda)=-\dot{c}_2(\pi,\lambda)-\gamma\dot{c}_1(\pi,\lambda)+|\omega|^2\dot{s}_1(\pi,\lambda)+$$
$$+(\alpha\lambda+\beta)[\dot{s}_2(\pi,\lambda)+\gamma\dot{s}_1(\pi,\lambda)]+\alpha[s_2(\pi,\lambda)+\gamma s_1(\pi,\lambda)].$$

(13) düsturlarından istifadə etsək,

$$\dot{d}(\lambda)=-\int_0^\pi R_2^T(\pi,t,\lambda)C(t,\lambda)dt-\gamma\int_0^\pi R_1^T(\pi,t,\lambda)C(t,\lambda)dt+|\omega|^2\int_0^\pi S^T(t,\lambda)R_1(\pi,t,\lambda)dt+$$
$$+(\alpha\lambda+\beta)\left[\int_0^\pi S^T(t,\lambda)R_2(\pi,t,\lambda)dt+\gamma\int_0^\pi S^T(t,\lambda)R_1(\pi,t,\lambda)dt\right]+\alpha[s_2(\pi,\lambda)+\gamma s_1(\pi,\lambda)]=$$
$$=\int_0^\pi\left[f(\lambda)C^T(t,\lambda)C(t,\lambda)+g(\lambda)C^T(t,\lambda)S(t,\lambda)+r(\lambda)S^T(t,\lambda)S(t,\lambda)\right]dt-\alpha f(\lambda) \quad (14)$$

alınar, burada

$$f(\lambda)=-s_2(\pi,\lambda)-\gamma s_1(\pi,\lambda),$$

$$g(\lambda)=c_2(\pi,\lambda)+\gamma\, c_1(\pi,\lambda)+|\omega|^2 s_1(\pi,\lambda)+(\alpha\lambda+\beta)\ \left(s_2(\pi,\lambda)+\gamma\ s_1(\pi,\lambda)\right),$$

$$r(\lambda)=-|\omega|^2 c_1(\pi,\lambda)-(\alpha\lambda+\beta)(c_2(\pi,\lambda)+\gamma c_1(\pi,\lambda)).$$

$d(\lambda_0)=0$ olduğundan λ_0 ədədi D məsələsinin məxsusi ədədidir. Tutaq ki, $H(x)=\begin{pmatrix}h_1(x)\\ h_2(x)\end{pmatrix}$ buna uyğun məxsusi vektor-funksiyadır. $C(x,\lambda_0)$ və $S(x,\lambda_0)$ funksiyaları (1) tənliyinin $\lambda=\lambda_0$ olduqda (4) başlanğıc şərtlərini ödəyən fundamental həllər sistemi olduğundan

$$H(x)=h_1(0)C(x,\lambda_0)+h_2(0)S(x,\lambda_0). \quad (15)$$

Onda aydındır ki,

$$|h_1(x)|^2+|h_2(x)|^2=H^T(x)\overline{H(x)}=|h_1(0)|^2 C^T(x,\lambda_0)C(x,\lambda_0)+$$

$$+|h_2(0)|^2 S^T(x,\lambda_0)S(x,\lambda_0)+\left[h_1(0)\ \overline{h_2(0)}\ +\overline{h_1(0)}\ h_2(0)\right]C^T(x,\lambda_0)S(x,\lambda_0). \quad (16)$$

(3) şərtlərindən ikincisini nəzərə almaqla (15)-dən $x=\pi$ olduqda alarıq:

$$h_2(0)=\frac{\overline{\omega}-c_2(\pi,\lambda_0)-\gamma c_1(\pi,\lambda_0)}{s_2(\pi,\lambda_0)+\gamma s_1(\pi,\lambda_0)}h_1(0).$$

Onda

$$|h_2(0)|^2=h_2(0)\overline{h_2(0)}=\frac{|\omega|^2+\left[c_2(\pi,\lambda_0)+\gamma c_1(\pi,\lambda_0)\right]\left[c_2(\pi,\lambda_0)+\gamma c_1(\pi,\lambda_0)-2\,\mathrm{Re}\,\omega\right]}{\left[s_2(\pi,\lambda_0)+\gamma s_1(\pi,\lambda_0)\right]^2}|h_1(0)|^2.$$

$$d(\lambda_0)=2\,\mathrm{Re}\,\omega-c_2(\pi,\lambda_0)-\gamma c_1(\pi,\lambda_0)+\omega^2 s_1(\pi,\lambda_0)+$$

$$+(\alpha\lambda_0+\beta)\left[s_2(\pi,\lambda_0)+\gamma s_1(\pi,\lambda_0)\right]=0$$

münasibətindən

$$c_2(\pi,\lambda_0)+\gamma\, c_1(\pi,\lambda_0)-2\,\mathrm{Re}\,\omega=|\omega|^2 s_1(\pi,\lambda_0)+(\alpha\lambda_0+\beta)\left[s_2(\pi,\lambda_0)+\gamma\, s_1(\pi,\lambda_0)\right].$$

Bu bərabərlikdən və (10) eyniliyindən istifadə edərək aşağıdakıları yaza bilərik:

$$|h_2(0)|^2=\frac{|\omega|^2+\left[c_2(\pi,\lambda_0)+\gamma c_1(\pi,\lambda_0)\right]\left[|\omega|^2 s_1(\pi,\lambda_0)+(\alpha\lambda_0+\beta)\left[s_2(\pi,\lambda_0)+\gamma s_1(\pi,\lambda_0)\right]\right]}{\left[s_2(\pi,\lambda_0)+\gamma s_1(\pi,\lambda_0)\right]^2}|h_1(0)|^2=$$

$$=\frac{|\omega|^2 c_1(\pi,\lambda_0)+(\alpha\lambda_0+\beta)(c_2(\pi,\lambda_0)+\gamma c_1(\pi,\lambda_0))}{s_2(\pi,\lambda_0)+\gamma\, s_1(\pi,\lambda_0)}|h_1(0)|^2=\frac{r(\lambda_0)}{f(\lambda_0)}|h_1(0)|^2.$$

Oxşar qaydada hesablama aparsaq,

$$h_1(0)\overline{h_2(0)}+\overline{h_1(0)}h_2(0)=\frac{g(\lambda_0)}{f(\lambda_0)}|h_1(0)|^2$$

alınar. Son iki bərabərliyi (16)-da nəzərə alaq:

$$|h_1(x)|^2 + |h_2(x)|^2 =$$

$$= \left[f(\lambda_0) C^T(\lambda_0, x) C(\lambda_0, x) + g(\lambda_0) C^T(\lambda_0, x) S(\lambda_0, x) + r(\lambda_0) S^T(\lambda_0, x) S(\lambda_0, x) \right] \frac{|h_1(0)|^2}{f(\lambda_0)} .$$

Bu bərabərliyi sıfırdan π -yədək inteqrallasaq və (14)-dən istifadə etsək,

$$\int_0^{\pi} \left[|h_1(x)|^2 + |h_2(x)|^2 \right] dx - \alpha |h_1(0)|^2 = \frac{|h_1(0)|^2}{f(\lambda_0)} \dot{d}(\lambda_0),$$

münasibətini alarıq. $\alpha < 0$ olduğundan sol tərəf sıfırdan fərqlidir. Onda $\dot{d}(\lambda_0) \neq 0$.

İndi isə fərz edək ki, $\lambda = \lambda_0$ ədədi $d(\lambda)$ funksiyasının təkrarlanan sıfırıdır. Əgər (12) bərabərsizliyi ödənərsə, onda indicə isbat etdiyimizə görə $\dot{d}(\lambda_0) \neq 0$. Bu isə $\dot{d}(\lambda_0) = 0$ bərabərliyinə ziddir. Ona görə də

$$s_2(\pi, \lambda_0) + \gamma s_1(\pi, \lambda_0) = 0. \quad (17)$$

(10) eyniliyində (17)-ni yerinə yazmaqla (11) bərabərliyini alarıq. Buradan $d(\lambda_0) = 0$ olmasına əsasən

$$2 \operatorname{Re} \omega + \frac{1}{s_1(\pi, \lambda_0)} + |\omega|^2 s_1(\pi, \lambda_0) = 0 .$$

Bu bərabərlik göstərir ki,

$$2 s_1(\pi, \lambda_0) \operatorname{Re} \omega + 1 + \left[(\operatorname{Re} \omega)^2 + (\operatorname{Im} \omega)^2 \right] s_1^2(\pi, \lambda_0) = 0 \text{ və ya}$$

$$\left[1 + s_1(\pi, \lambda_0) \operatorname{Re} \omega \right]^2 + \left[s_1(\pi, \lambda_0) \operatorname{Im} \omega \right]^2 = 0.$$

Buna görə də $1 + s_1(\pi, \lambda_0) \operatorname{Re} \omega = 0$ və $s_1(\pi, \lambda_0) \operatorname{Im} \omega = 0$.

(11)-dən aydındır ki, $s_1(\pi, \lambda_0) \neq 0$. Onda sonuncu iki bərabərlikdən çıxır ki, ω sıfırdan fərqli həqiqi ədəddir və $1 + \omega s_1(\pi, \lambda_0) = 0$. Deməli,

$$g(\lambda_0) = c_2(\pi, \lambda_0) + \gamma c_1(\pi, \lambda_0) - \omega = \omega - \omega = 0$$

və $f(\lambda_0) = 0$, $\dot{d}(\lambda_0) = 0$ olduğundan (14)-dən alırıq ki,

$$r(\lambda_0) \int_0^{\pi} S^T(x, \lambda_0) S(x, \lambda_0) dx = 0. \quad (18)$$

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, $\lambda = \lambda_0$ olduqda $S(x, \lambda_0)$ həlli (1) tənliyinin (3) sərhəd şərtlərini ödəyən həllidir, yəni $S(x, \lambda_0)$ həlli D məsələsinin məxsusi vektor-funksiyasıdır. Ona görə də

$$\int_0^{\pi} S^T(x, \lambda_0) S(x, \lambda_0) dx \neq 0.$$

Buradan və (18) bərabərliyindən çıxır ki, $r(\lambda_0) = 0$. Onda

$$-|\omega|^2 c_1(\pi, \lambda_0) - (\alpha \lambda_0 + \beta)(c_2(\pi, \lambda_0) + \gamma c_1(\pi, \lambda_0)) = 0$$

münasibətini (11) və $1+\omega s_1(\pi,\lambda_0)=0$ bərabərliklərinin köməyi ilə

$$-|\omega|^2 c_1(\pi,\lambda_0)+(\alpha\lambda_0+\beta)\frac{1}{s_1(\pi,\lambda_0)}=-|\omega|^2 c_1(\pi,\lambda_0)-\omega(\alpha\lambda_0+\beta)=0$$

şəklində yazmaq olar. ω sıfırdan fərqli həqiqi ədəd olduğundan

$$\alpha\lambda_0+\beta+\omega c_1(\pi,\lambda_0)=0.$$

Beləliklə, aldıq ki, λ_0 ədədi $d(\lambda)$ xarakteristik funksiyasının təkrarlanan sıfrı olarsa, onda ω sıfırdan fərqli həqiqi ədəd olur və (7), (8) bərabərlikləri ödənilir.

Kafilik. Tutaq ki, (7), (8) və $d(\lambda_0)=0$ münasibətləri ödənir, ω isə sıfırdan fərqli həqiqi ədəddir. Göstərək ki, $\dot{d}(\lambda_0)=0$. (8) və (10) bərabərliklərindən istifadə etməklə (11) münasibətinin doğruluğunu asanlıqla göstərmək olar. ω-nın həqiqi olmasına əsasən yaza bilərik:

$$d(\lambda_0)=2\omega-c_2(\pi,\lambda_0)-\gamma c_1(\pi,\lambda_0)+\omega^2 s_1(\pi,\lambda_0)=0.$$

Buradan və (11)-dən

$$2\omega+\frac{1}{s_1(\pi,\lambda_0)}+\omega^2 s_1(\pi,\lambda_0)=0.$$

Sonuncu bərabərliyin hər tərəfini $s_1(\pi,\lambda_0)$-ə vursaq, $[\omega s_1(\pi,\lambda_0)+1]^2=0$ olduğunu alarıq. Deməli, $\omega s_1(\pi,\lambda_0)=-1$. Onda (11)-ə əsasən yaza bilərik ki,

$$c_2(\pi,\lambda_0)+\gamma c_1(\pi,\lambda_0)=\omega. \quad (19)$$

(7)-nin hər tərəfini ω-ya vurub (19)-dən istifadə etsək,

$$\omega^2 c_1(\pi,\lambda_0)+(\alpha\lambda_0+\beta)(c_2(\pi,\lambda_0)+\gamma c_1(\pi,\lambda_0))=0$$

münasibətini alarıq.

Beləliklə, $f(\lambda_0)=0$, $g(\lambda_0)=0$ və $r(\lambda_0)=0$ bərabərlikləri ödənir. Onda (14)-dən çıxır ki, $\dot{d}(\lambda_0)=0$. Teorem isbat olundu.

ƏDƏBİYYAT

1. M.G. Gasymov, B.M. Levitan. *The inverse problem for the Dirac system* [in Russian], Dokl. Akad. Nauk SSSR, Vol.167, No.5, p.967-970, 1966
2. Z.S. Aliev, H.Sh. Rzayeva. *Oscillations of the eigenvector functions of the one-dimensional Dirac operator* [in Russian], Dokl. Akad. Nauk Rus., Vol.469, No.3, p.273-277, 2016
3. M.G. Gasymov, T.T. Dzabiev. *Solution of the inverse problem by two spectra for the Dirac equation on a finite interval* [in Russian], Dokl. Akad. Nauk Azerb. SSR, Vol.22, No 7, p.3-6, 1966
4. V.M., Kurbanov, A.M. Abdullayeva. *Bessel property and basicity of the system of root vector-functions of Dirac operator with summable coefficient*, Operators and Matrices, Vol.12, No.4, p.943-954, 2018
5. B. M. Levitan, I. S. Sargsyan. *Sturm-Liouville and Dirac Operators* [in Russian], Nauka, Moscow, 1988
6. Kh.R. Mamedov, O. Akcay. *Inverse problem for a class of Dirac operators by the Weyl function,* Dynamic Systems and Appl., Vol.26, No1, p.183-196, 2017
7. Ch.-Fu Yang, D.-Q. Liu. *Half-inverse problem for the Dirac operator,* Appl. Math. Letters, Vol.87, p.172-178, 2019

8. N.V. Abbasli, I.M. Nabiev. *The uniqueness of the reconstruction of the Dirac system by three spectra* [in Russian], Journal of Contemporary Applied Mathematics, Vol.8, No.1, p.3-8, 2018

9. S. Currie, T.T. Roth, B.A. Watson. *Eigenvalue interlacing for first order differential systems with periodic 2×2 matrix potentials and quasi–periodic boundary conditions,* Operators and Matrices, Vol.12, No.2, p.489-499, 2018

10. T.V. Misyura. *A characteristic of the spectra of periodic and antiperiodic boundary value problems for the Dirac operator (I)* [in Russian], Teor. Funk. Funk. Anal. Prilozh., Kharkov, No.30, p.90–109, 1978

11. I.M. Nabiev. *Solution of a class of inverse problems for the Dirac operator,* Transact. of Academy of sci. of Azerbaijan, Vol.21, No1, p.146-157, 2001

12. I.M. Nabiev. *Properties of the eigenvalues of the Dirac operator* [in Russian], BSU Bulletin, Phys.-Math series, No.2, p.38-46, 2003

13. I.M. Nabiev. *Solution of the inverse quasi-periodic problem for the Dirac system* [in Russian], Math. Notes, Vol.89, No.6, p.885–893, 2011

14. T.Sh. Abdullayev, I.M. Nabiev. *An algorithm for reconstructing the Dirac operator with a spectral parameter in the boundary condition* [in Russian], Computational Mathematics and Mathematical Physics, Vol.56, No.2, p.256-262, 2016

15. R.Kh. Amirov, B. Keskin, A.S. Ozkan. *Direct and inverse problems for the Dirac operator with a spectral parameter linearly contained in a boundary condition,* Ukrainian Math. J., Vol.61, No.9, p.1365-1379, 2009

16. M. Arslantaş, Y. Güldü. *Half-inverse problem for Dirac operator with boundary and transmission conditions dependent spectral parameter polynomially,* Cumhuriyet Sci. J., Vol.40, No.4, p.902-908. 2019

17. A.G. Ferzullazadeh, I.M. Nabiev. *Some properties of the spectrum of the Dirac operator with a spectral parameter in the boundary condition,* Proc. of Institute of Math. and Mech. of NAS of Azerbaijan, Vol.46, No. 2, p.189-196, 2020

18. K. Li, M. Zhang, J. Cai, Z. Zheng. *Completeness theorem for eigenparameter dependent dissipative Dirac operator with general transfer conditions,* Hindawi, J. Func. Spaces, Vol.2020, Article ID 8718930, 8 p., 2020

JOURNAL OF BAKU ENGINEERING UNIVERSITY- MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
2020. Volume 4, Number 2 *Pages 120-125*

УДК.517.977.56.

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ, ОПИСЫВАЕМАЯ РАЗНОСТНЫМ АНАЛОГОМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДИИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИИ

АГАМАЛЫЕВА А.И.

Бакинский Государственный Университет

kamilbmansimov@gmail.com

РЕЗЮМЕ

Рассматривается одна дискретная задача оптимального управления, описываемая разностным аналогом интегро-дифференциального уравнения типа Фредгольма. Установлен ряд необходимых условий оптимальности первого порядка.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение типа Фредгольма, необходимое условие оптимальности, дискретный принцип максимума, уравнения в вариациях.

AMS Subject Classification: 49K20.

ƏMƏK DİNAMİKASININ İNTEGRO FARKLI TƏDQİQATININ FƏRQLİ ANALOGU İLE TƏSVİR EDİLƏN BİR OPTİMAL NƏZARƏT PROBLEMİNDƏ GƏRƏKLİ OPTIMAL ŞƏRT

XÜLASƏ

Fredholm tipli bir inteqro-diferensial tənliyin fərq analoqu ilə təsvir olunan bir diskret optimal idarəetmə problemini nəzərdən keçiririk. Bir sıra zəruri birinci dərəcəli optimallıq şərtləri müəyyən edilmişdir.

Açar sözlər: Fredholm tipli inteqro-diferensial tənlik, lazımi optimallıq şərti, diskret maksimum prinsip, variasiya tənlikləri.

A NECESSARY CONDITION OF OPTIMALITY IN ONE OPTIMAL CONTROL PROBLEM DESCRIBED BY THE DIFFERENCE ANALOG OF THE INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF POPULATION DYNAMICS

ABSTRACT

We consider one discrete optimal control problem described by a difference analog of an integro-differential equation of Fredholm type. A number of necessary first-order optimality conditions are established.

Key words: Fredholm type integro-differential equation, necessary optimality condition, discrete maximum principle, variational equations.

1. Постановка задачи. Пусть управляемый процесс описывается следующей системой разностных уравнений

$$z(t+1,x)=\sum_{s=x_0}^{x_1} f\left(t,x,s,z(t,s),u(t,s)\right),$$
$$t=t_0,t_0+1,\ldots,t_1-1;\ x=x_0,x_0+1,\ldots,x_1 \qquad (1)$$

с начальным условием

$$z(t_0,x)=a(x),\ \ x=x_0,x_0+1,\ldots,x_1. \qquad (2)$$

Здесь $f(t,x,s,z,u)$ – заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по z, t_0, t_1, x_0, x_1 – заданные числа, причем разность $t_1 - t_0$ и $x_1 - x_0$ есть натуральные числа, $a(x)$ – заданная n-мерная дискретная вектор-функция, $u(t,x)$ – r-мерный дискретный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества U, т.е.

$$u(t,x) \in U,\ t = t_0, t_0+1, \ldots, t_1 - 1;\ x = x_0, x_0+1, \ldots, x_1. \tag{3}$$

Такие управляющие функции назовем допустимыми.

На решениях системы (1)-(2) порожденных всевозможными допустимыми управлениями определим функционал

$$S(u) = \sum_{x=x_o}^{x_1} \varphi(z(t_1, x)). \tag{4}$$

Здесь $\varphi(z)$ – заданная непрерывно дифференцируемая скалярная функция.

Будем изучать задачу о минимуме функционала (4) при ограничениях (1)-(3).

Допустимое управление $u(t,x)$ доставляющий минимум функционалу (4) при ограничениях (1)-(4) назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u(t,x), z(t,x))$ – оптимальным процессом.

2. Аналог дискретного условия максимума. Предположим, что $(u(t,x), z(t,x))$ – фиксированный допустимый процесс, а множество

$$f(t,x,s,z(t,x),U) = \{\alpha : \alpha = f(t,x,s,z(t,x),v), v \in U\} \tag{5}$$

выпукло.

Пусть $\varepsilon \in [0,1]$ – произвольное число, $v(t,x)$ – произвольное допустимое управление такое, что

$$z(t+1,x;\varepsilon) = \sum_{s=x_0}^{x_1} f(t,x,s,z(t,s;\varepsilon),u(t,s;\varepsilon)) \equiv$$

$$\equiv \sum_{s=x_0}^{x_1} [f(t,x,s,z(t,s;\varepsilon),u(t,s)) + \varepsilon[f(t,x,s,z(t,s;\varepsilon),v(t,s)) - \tag{6}$$

$$- f(t,x,s,z(t,s;\varepsilon),u(t,s))]]$$

$$z(t_0,x;\varepsilon) = a(x),\ \ x = x_0, x_0+1, \ldots, x_1. \tag{7}$$

Это возможно в силу выпуклости множества (5).

Положим

$$y(t,x) = \frac{\partial z(t,x;\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Big/_{\varepsilon=0}. \tag{8}$$

В силу условий гладкости, наложенные на правую часть уравнения (6) получаем, что $y(t,x)$, определяемая формулой (8) является решением задачи (уравнения в вариациях)

$$y(t+1,x)=\sum_{s=x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial f(t,x,s,z(t,s),u(t,s))}{\partial z}y(t,s)+\right. \tag{9}$$
$$\left.+\left[f(t,x,s,z(t,s),v(t,s))-f(t,x,s,z(t,s),u(t,s))\right]\right],$$
$$y(t_0,x)=0,\ \ x=x_0,x_0+1,...,x_1. \tag{10}$$

Через $\psi(t,x)$ – обозначим пока произвольную n-мерную вектор-функцию. Умножая обе части соотношения (9) слева скалярно на $\psi(t,x)$, а затем суммируя обе части полученного соотношения по t и x от t_0 до t_1-1 и от x_0 до x_1 соответственно, получим:

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\psi'(t,x)y(t+1,x)=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\left[\sum_{s=x_0}^{x_1}\psi'(t,x)\frac{\partial f_z(t,x,s,z(t,s),u(t,s))}{\partial z}y(t,s)+\right.$$
$$\left.+\left[f(t,x,s,z(t,s),v(t,s))-f(t,x,s,z(t,s),u(t,s))\right]\right]=$$
$$=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\sum_{s=x_0}^{x_1}\psi'(t,s)\frac{\partial f_z(t,s,x,z(t,x),u(t,x))}{\partial z}y(t,x)+$$
$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1}\left[\sum_{s=x_0}^{x_1}\psi'(t,s)y(t,s)\left[f(t,s,x,z(t,x),v(t,x))-f(t,s,x,z(t,x),u(t,x))\right]\right]. \tag{11}$$

Применяя формулу Тейлора получаем справедливость разложений

$$S(u(t,x;\varepsilon))-S(u(t,x))=\frac{d}{d\varepsilon}\left[\sum_{x=x_0}^{x_1}\varphi(z(t_1,x;\varepsilon))\right]=\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x_1}\frac{\partial\varphi'(z(t_1,x))}{\partial z}y(t_1,x)+o(\varepsilon).$$

Отсюда, с учетом тождества (11), имеем:

$$S(u(t,x;\varepsilon))-S(u(t,x))=\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x_1}\frac{\partial\varphi'(z(t_1,x))}{\partial z}y(t_1,x)+$$
$$+\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\psi'(t,x)y(t+1,x)-\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\sum_{s=x_0}^{x_1}\psi'(t,s)y(t_1,x).$$
$$\frac{\partial f(t,s,x,z(t,x),u(t,x))}{\partial z}y(t,x)-\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\left[\sum_{s=x_0}^{x_1}\psi'(t,s)\left[f(t,s,x,z(t,x),v(t,x))-\right.\right. \tag{12}$$
$$\left.\left.f(t,s,x,z(t,x),u(t,x))\right]\right]+o(\varepsilon).$$

Нетрудно доказать, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\psi'(t,x)y(t+1,x)=\sum_{x=x_0}^{x_1}\left[\psi'(t_1-1,x)y(t_1,x)-\right.$$
$$\left.-\psi'(t_0-1,x)y(t_0,x)\right]+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\psi'(t-1,x)y(t,x). \tag{13}$$

Принимая во внимание соотношения (8)-(13) специальное приращение (12) критерия качества соответствующее допустимым управлениям $u(t,x;\varepsilon)$ и $u(t,x)$ представляется в виде

$$S(u(t,x;\varepsilon))-S(u(t,x))=\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x_1}\frac{\partial\varphi'(z(t_1,x))}{\partial z}y(t_1,x)+$$

$$+\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x_1}\psi'(t_1-1,x)y(t_1,x)+\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\psi'(t_1-1,x)y(t_1,x)-$$

$$-\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\left[\sum_{s=x_0}^{x_1}\psi'(t,s)\frac{\partial f(t,s,x,z(t,x),u(t,x))}{\partial z}y(t,x)\right]- \qquad (14)$$

$$-\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\left[\sum_{s=x_0}^{x_1}\psi'(t,s)\left[f(t,s,x,z(t,x),v(t,x))-f(t,s,x,z(t,x),u(t,x))\right]\right]+o(\varepsilon).$$

Пусть n-мерная вектор-функция $\psi(t,x)$ является решением задачи

$$\psi(t-1,x)=\sum_{s=x_0}^{x_1}\frac{\partial f'(t,s,x,z(t,x),u(t,x))}{\partial z}\psi(t,s), \qquad (15)$$

$$\psi(t_1-1,x)=-\frac{\partial\varphi(z(t_1,x))}{\partial z}. \qquad (16)$$

Задачу (15)-(16) назовем сопряженной системой в рассматриваемой задаче. При выполнении соотношений (15)-(16) формула приращения (14) примет вид

$$S(u(t,x;\varepsilon))-S(u(t,x))=\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1}\left[H(t,x,s,z(t,x),v(t,x),\psi(t,s))-\right.$$

$$\left.-H(t,x,s,z(t,x),u(t,x),\psi(t,s))\right]+o(\varepsilon), \qquad (17)$$

где по определению

$$H(t,x,s,z(t,x),v,\psi(t,s))=\psi'(t,s)f(t,x,s,z(t,x),v).$$

При помощи разложения (17) доказывается

Теорема 1. Если множество (5) выпукло. Тогда для оптимальности допустимого управления $u(t,x)$ в задаче (1)-(4) необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\sum_{s=x_0}^{x_1}\left[H(t,x,s,z(t,x),v(t,x),\psi(t,s))-H(t,x,s,z(t,x),u(t,x),\psi(t,s))\right]\le 0, \qquad (18)$$

выполнялось для всех $v(t,x)\in U,\ t=t_0,t_0+1,...,t_1-1,\quad x=x_0,x_0+1,...,x_1$.

3. *Линеаризованные условия оптимальности.* Предположим, что множество U выпуклое, а $f(t,x,s,z,u)$ непрерывна по совокупности переменных вместе с частными производными по (z,u).

Пусть $\mu\in[0,1]$ произвольное число, $v(t,x)-$произвольное допустимое управление.

Через $u(t,x;\mu)=u(t,x)+\mu[v(t,x)-u(t,x)]$ обозначим проварьированное («возмущение») управление. Допустим, что $z(t,x;\mu)$ является решением задачи (1)-(2), соответствующее допустимому управлению $u(t,x;\mu)$, т.е.

$$z(t+1,x;\mu)=\sum_{s=x_0}^{x_1} f\left(t,x,s,z(t,s;\mu),u(t,s;\mu)\right) \tag{20}$$

$$z(t_0,x;\mu)=a(x). \tag{21}$$

Введем обозначение

$$p(t,x)=\frac{\partial z(t,x;\mu)}{\partial\mu}\Bigg/_{\mu=0}. \tag{22}$$

Используя (20)-(22) и $u(t,x;\mu)$ доказывается, что

$$S(u(t,x;\mu))-S(u(t,x))=-\mu\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\sum_{s=x_0}^{x_1}\frac{\partial H'(t,x,s,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x))}{\partial u}(v(t,x)-u(t,x))+o(\mu).$$

Из полученного разложения следует

Теорема 2. Если множество U выпуклое, а $f(t,x,s,z,u)$ непрерывна по совокупности переменных вместе с частными производными по (z,u), то для оптимальности допустимого управления $u(t,x)$ в рассматриваемой задаче (1)-(4) необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\left[\sum_{s=x_0}^{x_1}\frac{\partial H'(t,x,s,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x))}{\partial u}\right](v(t,x)-u(t,x))\le 0,$$

выполнялось для всех $v(t,x)\in U,\ \ t=t_0,t_0+1,...,t_1-1,\quad x=x_0,x_0+1,...,x_1.$

4. Аналог уравнения Эйлера. Рассмотрим случай открытой области управления. Пусть множество U открытое, а $f(t,x,s,z,u)$ непрерывна по совокупности переменных вместе с частными производными по (z,u).

В силу открытой области управления специальное приращение управления $u(t,x)$ определим по формуле

$$\Delta u_\nu(t,x)=\nu\delta u(t,x),\ t=t_0,t_0+1,...,t_1-1,\quad x=x_0,x_0+1,...,x_1.$$

Здесь $\nu-$ достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u(t,x)\in R^r$ $t=t_0,t_0+1,...,t_1-1,\quad x=x_0,x_0+1,...,x_1$ произвольная ограниченная r-мерная вектор-функция (допустимая вариация управления).

При сделанных предположениях доказывается, что первая вариация в классическом смысле, (см. напр. [1, 2]) функционала качества (4) имеет вид

$$\delta^1 S(u;\delta u)=-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\sum_{s=x_0}^{x_1}\frac{\partial H'(t,x,s,z(t,x),u(t,x),\psi(t,s))}{\partial u}\delta u(t,x).$$

Следовательно, в силу того, что в случае открытости области управления первая вариация функционала качества равняется нулю получаем, что вдоль оптимального процесса $(u(t,x),z(t,x))$ для всех $\delta u(t,x)\in R^r$, $t=t_0,t_0+1,...,t_1-1;\ \ x=x_0,x_0+1,...,x_1$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\left[\sum_{s=x_0}^{x_1}\frac{\partial H'(t,x,s,z(t,x),u(t,x),\psi(t,s))}{\partial u}\right]\delta u(t,x)=0. \tag{23}$$

При помощи (23) доказывается

Теорема 3. Если множество U открытое, то для оптимальности допустимого управления $u(t,x)$ в задаче (1)-(4) необходимо, чтобы соотношение

$$\sum_{s=x_0}^{x_1} \frac{\partial H'(\theta,\xi,s,z(\theta,\xi),u(\theta,\xi),\psi(\theta,s))}{\partial u} = 0,$$

выполнялось для всех $\theta = t_0, t_0+1,\ldots,t_1-1, \quad \xi = x_0, x_0+1,\ldots,x_1.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Альсевичч В.В., Калинин А.И. и др. Методы оптимизации. Минск.Изд-во четыре четверти. 2011. 472 с.
2. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку, изд-во БГУ, 2013. 151 с.

JOURNAL OF BAKU ENGINEERING UNIVERSITY- MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
2020. Volume 4, Number 2 *Pages 126-136*

UOT: UOT:[002:004]:316.774

ƏMƏLİYYAT SİSTEMLƏRİ

RƏNA ƏSGƏROVA
Bakı Mühəndislik Universiteti
resgerova@beu.edu.az

XÜLASƏ

Əməliyyat sistemi –proqram və verilənlərin mütəşəkkilyığınıdır. Bu yığın hesablama sistemiresurslarının idarə olunması, EHM üçün proqramların yaradılmasının asanlaşdırılması, həmçinin EHM-in idarə edilməsi üçün nəzərdə tutulmuşdur. Əməliyyat sisteminəmüasir baxış həm də EHM resuslarının istehlakçısı kimi istifadəçinin baxışını əks etdirir. Əməliyyat sistemiistifadəçilə EHM avadanlığı arasında vasitəçi rolunu oynayan proqramdır. Əməliyyat sistemi istifadəçiyə proqramın rahat və effektiv şəkildə yerinə yetirilməsinə lazımı şərait təmin etmək üçün nəzərdə tutulmuşdur. Əməliyyat sistemi-kompüter resurslarını idarə edən, tətbiqi proqramların işə salınmasını, onların xarici qurğular və digər proqramlarla qarşılıqlı əlaqəsini, həmçinin istifadəçi ilə kompüter arasındakı dialoqu təmin edən proqram vasitələrinin məcmusudur. Əməliyyat sisteminin əsas funksiyalarından biri –informasiyanın daxiletmə-xaricetmə prosesinin avtomatlaşdırılması,verilənlərin yadda saxlanılması və onların idarə edilməsi, istifadəçi tərəfindən yerinə yetirilən tətbiqi proqramın idarə edilməsidir. Əməliyyat sisteminin nüvəsi onun əsas hissəsi hesab olunur. Əməliyyat sisteminin nüvəsi kompüter işə salındıqdan sonraəməli yaddaşa yüklənir və əmliyyat sistemini,yaddaşı, tətəbiqi proqramların yerinə yetirilməsini və onların aparatlarla qarşılıqlı əlaqəsiniidarə edir. Əməliyyat sisteminin nüvəsi, həmçininmüxtəlif proqramların prosessorlarla işardıcıllığını və vaxtını, aparat və proqramların nasazlığını təyin edir.

Açar sözlər:sistem, çoxməsələli, MS DOS, Linux, çoxistifadəçili. svopinq.

OPERATING SYSTEMS

ABSTRACT

An operating system is an organized collection of software and data. This set of computing systems is designed to manage resources, facilitate organizing the computer programs, as well as computer management. A modern view to the operating system also reflects the user's view as a consumer of computer resources. The operating system is a program that has a connection role between the user and the computer equipment. The operating system has been designed to provide the user with the necessary conditions for comfortable and efficient execution of the program. Operating system - a set of software tools that manage computer resources, enable the implementation of applications, their interaction with external devices and other programs, as well as the dialogue between the user and the computer. One of the main functions of the operating system is the automation of the process of input and output of information, storage and management of data, management of the application performed by the user. The core of the operating system is considered to be a main part. The kernel of the operating system is loaded into the RAM just after the computer is launched to work, and that controls the execution of the operating system, memory, application programs and their interaction with the hardware. The kernel of the operating system also determines the sequence and timing of various programs, and hardware and software faults working with processors.

Key words: system, multifaceted, MS Dos, multiuser, Linux.

ОПЕРАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ

РЕЗЮМЕ

Операционная система представляет собой организованный набор программного обеспечения и данных. Этот пакет предназначен для управления ресурсами компьютерной системы,облегчения создания компьютерных программ,а также управления компьютером.Современный взгляд на операционную систему также отражает взгляд пользователя как потребителя компьютерных ресурсов.Операционная система - это программа, которая выступает в качестве посредника между пользователем и компьютерным оборудованием. Операционная система предназначена для предоставления пользователю необходимых условий для комфортного и эффективного выполнения программы.Операционная система - управляет ресурсами компьютера,запускает приложения,взаимодействует с внешними устройствами и другими программами.,а также набор программных средств,обеспечивающих диалог между пользователем и компьютером.Одной из основных функций операционной системы является автоматизация процесса ввода и вывода информации,хранения данных и

управления ими.Ядро операционной системы является его основной частью: ядро операционной системы загружается в практическую память после запуска компьютера и управляет работой операционной системы, памяти,прикладных программ и их взаимодействием с устройствами. Ядро системы также определяет последовательность и синхронизацию различных программ,работающих с процессорами, аппаратными и программными сбоями.

Ключевые слова: система,многозадачность,MS DOS,Linux,многопользовательский.

Sistem (yunanca, systema-hissələrdən təşkil olunan birləşmədir)-qarşılıqlı əlaqəli, müntəzəm qarşılıqlı fəaliyyətdə olan obyektlərin toplusudur.

Kompürer sistemi bir və ya bir neçə kompüterdə, qarşılıqlı əlaqədə olmaqla, informasiya emalı prosesini yerinə yetirən daxili və periferiya qurğuları, elecə də proqram vasitələrindən ibarət olur.

O, özündə müxtəlif alt sistemləri birləşdirə bilər və daha iri sistemin alt sistem kimi fəaliyyət göstərə bilər. Proqram təminatına aid olan və sistemin fəaliyyətinin hazırlığına cavabdeh olan bir hissə ümumi hesablama sisteminin əməliyyat sistemini təşkil edir.

Əməliyyat sistemi-informasiya emalının idarə olunmasını və aparat vasitələrinin bir-biri ilə, həmçinin onların istifadəçilərlə qarşılıqlı əlaqəsini təmin edir. Əməliyyat sistemilazım olan proqramıkompüterin yaddaşına yükləyir və onun icrasına nəzarət edir. Əməliyyat sistemi, həmçinin istifadəçivə digər kompüterlərlə iş üçün qarşılıqlı əlaqəli inerfeys təqdim edir. Əməliyyat sisteminin digər hissəsi isə yaddaşa lazım olduqca yüksək səviyyəli məsələləri yerinə yetirir və istifadəçini tətbiqi proqramlarinterfeysi(API-Application Proqram İnterface) ilə təmin edir.

Müasir əməliyyat sistemlərinin böyük əksəriyyəti çoxməsələlidir, yəni kompüter resurslarının bir neçə tətbiqi proqram və məsələlərarası paylanmasını idarə edir. Belə ki,

- resurslardan birlikdə istifadə etməklə bir neçə proqram eyni vaxtda işləyə bilər;
- proqramlar verilənlərlə öz aralarında mübadilə edə bilər.

Bir neçə proqram (məsələn, mətn redaktoru, cədvəl prosesoru və hər hansı musiqi)yüklənərsə, onda hesablama sistemi çoxməsələli rejimdə işləyir. Bu rejimdə hər bir məsələ üçün prosesor vaxtı və yaddaş ayrılır, əmrlər yerinə yetirilir, hər bir proqram və ya istifadəçiyə müəyyən məlumatlar ötürülür. Mərkəzi prosessorda bir proqramdan digər proqramın yerinə yetirilməsinə keçid sürətlə baş verir. Çoxprosessorlu sistemlərdə və ya çoxnüvəli prosessorlarda proqramlar paralel olaraq yerinə yetirilirlər.

Əməliyyat sistemləri hər bir tətbiqi proqram üçün əməli yaddaşın bir hissəsini ayırırlar. Ona görə də tətbiqi proqramlar digər aparat resursları olansərt disk, printer və uzaq məsafədəki şəbəkəyə müraciətləri əməliyyat sistemlərinin rəhbərliyi altında icra edirlər.

Çoxməsələlik o demək deyildirki, istənilən sayda məsələni yükləmək olar. Nə qədər çox məsələ yüklənərsə, sistem bir o qədər yavaş işləyəcək, yaddaşda boş yerin ayrılması, qurğuların bölüşdürülməsi və ya onların növbəsinin təyin olunmasında çətinlik yaranacaqdır.

Əməliyyat sistemləri və proqramlar əməli yaddaşda mübadilə buferi və ya sadəcə bufer yaddaşı yarada bilərlər. Mübadilə buferi əməliyyat sisteminin bir hissəsi olmaqla bərabər, əməliyyat sistemi tərəfindən mühafizə olunur və surəti çıxarılmış fraqmenti əməli yaddaşda saxlayır. Amma bəzi proqramlar bir neçə fraqmenti mubadilə buferində müvəqqəti yığıb saxlaya

bilir. Qrafiki interfeys qovluq, pəncərələri və ya tətbiqi proqramların pəncərələri arasında verilənlərin köçürülməsinə imkan verir. Məsələn, Excel-də olan diaqramınvə veb saytdakı şəklin Word sənədinə yerləşdirilə bilinməsi buna bariz nümunə ola bilər.

Bildiyimiz kimi, kompüterlərdə əsas problem kimi əməli yaddaş tutumunun çatışmazlığıdır ki, bu problem yaddaşın idarə edilməsi texnologiyası olaraq virtual yaddaş (həqiqətdə olmayan) vasitəsilə həll edilir. Virtual yaddaş (virtual memory)əməli yaddaş və sərt diskdə müvəqqəti saxlanılan sahənin qarşılıqlı əlaqələndirilməsi nəticəsində istifadə olunmaq üçün əməliyyat sistemi tərəfindən yaradılır. Əməli yaddaşda təyin olunan cari yaddaşın imkanında böyük həcmə malik bir neçə proqramları yerinə yetirmək və böyük həcmli verilənlərin emal edilməsi üçün çoxməsələli əməliyyat sistemləri virtual yaddaşdan müvəqqəti olaraq istifadə edir.

Virtual yaddaş, bildiyimiz kimi, əməli yaddaşda məsələnin həlli üçün ayrılan virtual sahənin bir hissəsində qismən, dinamik şəkildə yerləşməklə bərabər, qalan hissəsi isə disk yaddaşında yerləşir. Əgər cari(aktiv) proqramın işləməsi üçün əməli yaddaş kifayət etmirsə, o zaman mikroprossesor tərəfindən istifadə edilməyən proqram və ya onun bir hissəsi əməli yaddaşdan silinərək diskə köçürülür. Bu boşalmış yerə aktiv proqramın lazımı fraqmenti yüklənir. Yaddaşdan silinən proqramlardan birinə idarəetmə verildikdə, o yenidən əməli yaddaşa yüklənir. Bunun nəticəsində yaddaşda olan digər tələb olunmayan proqramlar yaddaşdan silinir. Beləliklə, proqramlar sərt disk və əməli yaddaş arasında dinamik şəkildə dövr edir.

Virtual yaddaşla təmin olunma, eyni zamanda çoxlu sayda proqramların açılışına imkan verir. Lakin bu halda diskdən yaddaşa və yaddaşdan diskə yüklənmə əməliyyatları kompüterin məhsuldarlığını azaldır. Belə məqsədlər üçün istifadə olunan xarici yaddaşın bir hissəsi yüklənmə faylı, bu proses özü isə "svopnq"adlanır. Faylların bu cür yüklənmə həcmi əməli yaddaşın tutumundan bir neçə dəfə çox ola bilər. Qeyd edək ki, əgər icra olunan proqram qəzasız sona çatarsa, onda ƏS sərt diskdəki müvəqqəti faylı silir. Amma proqramın sona çatmasında hər hansı qəza və ya səhv yaranarsa, diskdə fayl fraqmenti qala bilər. Virtual yaddaşın sazlanması avtomatik və ya əl ilə yerinə yetirilir. Bu sazlanmanı əl ilə yalnız xüsusi biliyə malik istifadəçilər yerinə yetirə bilərlər.

Hər hansı konkret qurğunun əməliyyat sistemi ilə qarşılıqlı əlaqəsni yaratmaq üçün qurğunun drayveri adlanan xüsusi proqramdan istifadə olunur. Qurğuların drayverləri müxtəlif firmalar tərəfindən buraxılır və mümkün qurğuların siyahısı ƏS-nin instalyasiya olunması üçün istifadə olunan kompakt diskində və həmin firmanın Veb-səhifəsində olur. ƏS-nin instalyasiyası zamanı kompüterə qoşulan bütün qurğuların drayverləri quraşdırılır və tənzimlənir. Drayver ƏS-nin instalyasiya olunması zamanı istifadə olunan kompakt diskində yoxdursa, onda həmin qurğu üçün məxsusi olaraq nəzərdə tutulan digər kompakt diskdən quraşdırmaq olar.Qeyd edək ki, kompüterə qoşulan bütün qurğuların düzgün işlənməsi üçün hökmən uyğun drayverlər quraşdırılaraq, tənzimlənməlidir.

ƏS-də yeni periferiya qurğularının kompüterə qoşulması üçün peşəkar istifadəçi müəyyən biliklərə malik olmalıdır. Məsələn, konfiqurasiya faylını yamağı bacarmalı, lazımi drayverin qoşulması əmrinin strukturunu bilməlidir.

Bu mənada, əməliyyat sistemi özü sərbəst olaraq, konfiqurasiya fayllarını dəyişdirir, konkret texniki qurğunun avtomatik təyin olunmasını aydınlaşdırır və onun avtosazlanmasını təmin edir. Sanki istifadəçiyə lazım olan peşəkar bilikləri öz öhdəsinə götürür.

Bu cur texnologiya "Plug and Play"(qoş və işlə)adlanır.

Əməliyyat sistemlərini müxtəlif əlamətlərə görə təsnif etmək olar . Bu əlamətlərdən əsasları aşağıdakılardır:

1) sistemlə eyni vaxtda işləyən istifadəçilərin sayına görə: biristifadəçili, çoxistifadəçili;
2) sistemin idarəolunması ilə eyni vaxtda yerinə yetirlən məsələlərin sayına görə: birməsələli, çoxməsələli;
3) prossesorların sayına görə: birprossesorlu, çoxprossesorlu;
4) prossesorun mərtbələrinin sayina görə: 8-mərtəbəli, 16-mərtəbəli, 32-mərtəbəli, 64-mərtəbəli;
5) istifadəçi interfeysinin tipinə görə: əmrli(mətnli) və obyektyönlü(qrafiki)
6) informasiya emalı rejiminə görə: paket emallı, vaxt bölgülü, real vaxt miqyaslı;
7) resurlardan istifadənin tipinə görə: şəbəkə, lokal.

Birinci əlamətə görə, biristifadəçili ƏS-dən fərqli olaraq, çoxistifadəçili əməliyyat sistemləri kompüterdə eyni vaxtda müxtəlif terminallarla bir neçə istifadəçinin işləməsinə imkan verir.

İkinci əlamətinə görə, çoxməsələlik anlayışı mövcud hesablama sistemi çərçivəsində eyni vaxtda bir neçə proqramın yerinə yetirilməsidir. Birməsələli ƏS isə, eyni vaxtda yalnız bir proqramın yerinə yetirilməsinə imkan verir.

Üçüncü əlamətə görə, bir prossesorludan fərqli olaraq, çox prosessorlu ƏS bu və ya digər məsələnin həlli üçün bir neçə prossesor resusrslarının paylanması rejiminə imkan verir.

Dördüncü əlamətə görə, Əs-lər 8, 16, 32 və 64 mərtəbəlilərə bölünürlər. Əməliyyat sisteminin mərtəbəlilliyi prossesorun mərtəbəsi ilə təyin olunur.

Beşinci əlamətə görə, ƏS istifadəçi interfeysinin tipinə görə obyektyönlü(qrafik interfeysli)və əmrli (mətn interfeysli)kimi iki sinifə bölünür.

Altıncı əlamətə görə, ƏS-lər aşağıdakınövlərə bölünürlər:

- paket emalı: kompüterdə yerinə yetirilməli olan proqramlara uyğun olaraq tapşırıqlar paketi formalaşdırılır və mümkün üstünlük dərəcəsini nəzərə almaqla növbəli yerinə yetirilir;
- vaxt bölgülü: müxtəlif terminallardan bir neçə istifadəçinin eyni vaxtda kompüterə müraciə-tini yerinə yetirmək üçün ƏS xidməti xarakterli tapşırıqlara uyğun maşın resurslarını növbə ilə seçir.
- real vaxta görə: bu əməliyyat sistemləri (real –time operating system-RTOS)lazım olan bir sıra məsələləri eyni zamanda həll etməyə imkan verir və sistemdə baş verən hadisələrə lazınm olan reaksiyanı təmin edir. Bu sistemlərin əsas məsələsi verilənlərin emalının vaxtında yerinə yetirilməsidir. RTOS –un digər ƏS-dən fərqli əlamətlərindən biri istifadəçi sorğularına müəyyən olunmuş vaxt ərzində kompüterin cavabını təmin etməsidir.

Yeddinci əlamətə görə, ƏS-ləri şəbəkə və lokal olmaqla iki hissəyə bölünür. Şəbəkə ƏS verilənlərdən birlikdə istifadə etmək məqsədilə şəbəkədə birləşdirilmiş kompüter resurslarının idarəolumsaı üçün nəzərdə tutulub. Burada, həmçinin, şəbəkə resurslarının istifadəsi üçün çoxlu sayda servis imkanları mövcuddur.

DOS ailəsinin əməliyyat sistemləri. Bu ailənin birinci üzvü MS DOS (Microsoft Disk Operating System-Microsoft firmasının disk əməliyyatı sistemi) əməliyat sistemidir. Bu ƏS IBM PC kompüterlər üçün 1981-ci ildə yaradılmışdır.

DOS ailəsinin əməliyyat sistemləri birməsələlidir və aşağıdakı xarakterik xüsusiyyətlərə malikdir:

- istifadəçi tərəfindən daxil edilən əmrlərin köməyilə interfeysin həyata keçirilməsi ;
- Sistemin IBM tipli müxtəlif kompüterlərdə işlənməsini təmin etmək üçün struktur modulluluğu;
- Sistemin işləməsi üçünnisbətən kiçik ölçülü əməli yaddaşa (640 kbayt)malik olması.

DOS ailəsinin əməliyyat sistemlərinin mühüm çatışmazlığı-fərdi kompüter resurslarına və ƏS icazə olmadan müraciətdən mühafizə vasitələrinin olmamasıdır.

MS DOS əməliyyat sistemi aşağıdakı funksiyaları yerinə yetirən kompleks proqramlara malikdir:

- Proqramların icrasının idarə edilməsi;
- Fərdi kompüterresurslarının idarə edilməsi;
- Prossesorun və fərdi kompüterin xarici qurğularının iştirakı iləinformasiya emalının təşkili;
- Xarici yaddaşda informasiyanın saxlanılması və disklərə xidmət işinin yerinə yetirilməsi.

Bu əməliyyat sistemi diskdə saxlandığından, disk əməliyyat sistemi (DOS-Disc Operation System)adını alıb. MS DOS əməliyyat sisteminin proqramları lazım olduqda əməli yaddaşa yüklənir.

Hal-hazırda fərdi kompüterlər üçün Windows, UNIX və OS/2 əməliyyat sistemləri çox geniş yayılıb. IBM PC ilə uyuşan maşınlarda ən çox MS DOS, DR DOS və PC DOS əməliyyat sistemləriistifadə olunurdu. MS DOS Microsoft firması, DR DOS –Digital Researchfirması və PC DOS –IBM firması tərəfindən yaradılmışdır. İstifadəçi üçün bu əməliyyat sistemləri arasında elə bir fərq yoxdur.

MS DOS əməliyyat sistemi aşağıdakı əsas hissələrdən ibarətdir:

- Fayl sistemi;
- Xarici qurğuların drayverləri;
- əmrlər prossesoru

MS DOSəməliyyat sistemi əmrlər vasitəsilə yerinə yetirilən bir sıra xüsusi xidmət proqramlarına malikdir. Bu əmrlərin bir hissəsi diskdə adi proqram adi proqram faylı kimi yerləşir ki, bunlar da xarici əmrlər adlanır.

Qeyd etmək lazımdır ki, istifadəçilərin əksəriyyəti praktiki olaraq MS DOS –un bir çox əmrlərindən istifadə etmir. İstifadəçi hiss etmədən bu əmrlər qeyri-aşkar şəkildə yerinə yetirilir. Amma bəzi əmrlərin öyrənilməsi vacibdir. Əmrləri yerinə yetirərkən faylın yolu(marşurutu), daha doğrusu, yerləşdiyi ünvan göstərilməlidir, yəni, fayl hansı məntiqi disk və altkataloqda yerləşir. Əsas əmrlər aşağıdakılardır:

1. Cari diskin təyini .

<məntiqi disk>:

Bu əmrlə yeni cari disk təyin olunur. Məsələn,D: əmrini daxil etməklə, D cari disk kimi təyin olunur.

2. Carı kataloqun dəyişdirilməsi.

CD <yol>

Məsələn, CD/Windows/TEMP əmri ilə cari diskdəki carikataloq TEMPolur.

CD/-baş kataloqa keçid alınır.

3. Göstərilən disk və ya kataloqun mündəricatının ekranda əks olunması.

DIR <yol><faylın adı>[/P] [/W] [A: atribut] [/O: çeşidin növü]

/P-mündəricat ekranda bir sütunda yerləşir və hər dəfə ekran dolduqdan sonra, fasilə yaranır.

/ W-mündəricat ekranda bir sütunda yerləşir.

/A-verilmiş atributlara görə faylların mündəricatı ekranda əks olunur. Atributların siyahısı: D-kataloq və ya qovluq, R-yalnız oxunan fayllar, H-gizli faylar, S-sistem faylları, A-arxivləşmiş faylar.

/O-faylların mündəricatı çeçidlənməsi şəkildə ekranda əks olunur. Çeşidin növü-N əlifba üzrə, S-ölçü üzrə, E-genişlənmə üzrə, D tarix üzrə.

Məsələn:

dir-cari kataloqun mündəricatı ekrana xaric olunur;

dir*. exe-cari kataloqun bütün. exe genişlənməli faylları haqqında məlumat ekrana xaric olunur;

4. Faylların sürətinin alınması.

COPY<fayl1><fayl2>

Bu əmrin köməyilə fayl1-in fayl2 adlı surəti alınır. Məsələn COPY KAFEDRA. DOC KAF_COP. DOC əmri ilə cari kataloqdakı KAFEDRA. DOC faylın cari kataloqda KAF_COP. DOC adlı surəti alınır.

Qeyd etmək lazımdır ki, burada faylın adında qurğuların adlarından istifadə etmək olar. Məsələn, COPY SİYAHI. TXT, PRN əmri ilə SİYAHI. TXT faylının sürəti çap edilir.

COPY CON SİYAHI. TXT əmri ilə SİYAHI. TXT adlı mətn faylı yaradılır ki, bu fayla verilənlər klaviaturadan daxil edilir. Burada CON portu işarə edir və daxiletmədə klaviaturanı, xaricetmədə isə ekranı göstərir. Daxiletmə CTRL+Z və ya F6 klavişlərindən istifadə ilə sona çatır və cari kataloqda SİYAHI. TXT faylı yaranır.

COPY SİYAHI. TXT CON əmri ilə isə SİYAHI. TXT faylının sürəti ekranda alınır. COPY əmrinin köməyilə bir neçə faylı birləşdirərək başqa bir faylda sürətini almaq mümkündür. Məsələn, COPY FAYL1. TXT+FAYL2. TXT FAYL3. TXT əmri ilə FAYL1. TXT və FAYL2. TXT fayllarının tərkibi birləşərək FAYL3. TXT faylına yazılır.

5. Faylların silinməsi.

Faylların silinməsində DEL (ERASE) <fayl> əmrlərindən istifadə olunur. Bu əmrlər fayl və ya fayllar qrupunu silir.

Məsələn, DEL*doc əmri ilə cari kataloqdakı. doc genişlənməli fayllar silinir.

ERASE D: /file_1. txt-D diskindəki file_1. txt faylı silinir;

ERASE D: /* . bak-D diskindəki . bak genişlənməli bütün fayllar silinir;

DEL D: /files/?d?. *-D diskindəki files kataloqunda, adında d simvolu olan üç simvoldan ibarət bütün fayllar silinir.

6. Faylların adının dəyişdirilməsi.

Faylların adının dəyişdirilməsi üçün REN (RENAME)əmrindən istifadə olunur. Əmrin formatı: REN faylın_adı faylın_yeni_adı

Məsələn, REN test. txt info. dat-cari kataloqdakı test. txt faylının adı dəyişərək info. dat olur.

REN *. txt*. prn – cari kataloqdakı. txt genişlənməli fayllar, adları eyni qalmaqla genişlənməsi . prn olan fayllarla əvəz lunur.

7. Faylın tərkibinin ekrana xaric olunması.

Bir və ya bir neçə mətn faylının tərkibinin ekrana xaric olunmasında TYPE <fayl>əmrindən istifadə olunur.

Məsələn, TYPE file _dos/txt əmri ilə cari kataloqdakı file_dos. txt faylnın tərkibi ekranda əks olunur.

8. Kataloqların yaradılması.

MD(MKDİR) <kataloq>

Məsələn, MKDİR TEST_1-cari kataloqda TEST_1 kataloqu yaradılır;

MD E: /İNFORM/TEST_2-E diskinin İNFORM kataloqunda TEST_2 altkataloqu yaradılır.

9. Kataloqların silinməsi.

RD (RMDIR) <kataloq>

Məsələn, RD TEST_1-cari kataloqdan TEST_1 kataloqu silinir;

D: /İNFORM/TEST_2-D: disikinin İNFORM kataloqundanTEST_2 kataloqu silinir.

10. Kataloq adının və fayllarının yerinin dəyişdirilməsi.

Kataloq adını və faylların yerinin dəyişdirilməsi üçünMOVEəmrindən istifadəolunur. Kataloq adının dəyişdirilməsi üçün əmrin formatı:

MOVE kataloqun _adı yeni_kataloqun _adı

Məsələn, MOVE kitab infor-cari kataloqun kitab altkataloquna infor yeni adı verilir.

Move C: /temp tmp-C: diskindəki temp kataloqunun adı dəyişərək tmp olur.

Faylların yerinin dəyişdirilməsi üçün MOVE əmrinin formatı aşağıdakı kimidir:

MOVE fayl _1, fayl_2, ... fayl_N faylların_yerləşəcəyi_yeni kataloqun_adı

Məsələn, MOVE*. doc d: -cari kataloqdakı . doc genişlənməli fayllar D: diskinin baş kataloquna göndərilir.

MOVE*. txt AIS –cari kataloqun genişlənməli faylları AIS altkataloquna göndərilir.

MOVE prog_1. bak D: /prog_1. doc-cari kataloqdakı prog_1. bak faylının adı prog_1. doc olmaqla D: diskinə göndərilir.

11. Tarix və saat təyini.

Cari tarix və ya saatın əks olunması və ya dəyişdiriləsi üçün DATE və TIME əmrlərindən istifadə olunur. Bu əmrlərdən parametrsiz istifadə etdikdə cari tarix və ya saat əks olunur. Amma /T parametri ilə cari tarix və ya saatı dəyişdirmək mümkündür.

Məsələn, DATE/T 29. 09. 2015 əmri ilə yeni tarix təyin olunur.

TIME/T 19: 31 əmri ilə yeni saat təyin olunur.

12. Ekranın təmizlənməsi.

CLS əmrindən ekranın təmizlənməsində istifadə olunur.

Əməliyyat sisteminin əsas funksiyaları:

- ƏS-nin nüvəsi avtomatik yüklənmən təmin edir;
- Diskdə verilənlərin saxlanılması üçün fayl sistemin təşkil edir, onlara müraciəti və emal imkanını təmin edir;
- Proqramı əməli yaddaşa yükləyir və icrasını idarə edir.

Əməliyyat sisteminin mükəmməl yüklənməsi üçün kompüterin aparat sisteminin saz olması və yüklənmə üçün faylın olmasıdır.

Əməliyyat sisteminin yüklənməsi bir neçə mərhələdən ibarətdir:

- Kompüterin aparat hissəsinin avtomatik testlənməsi,
- Yükləyicinin axtarışı və inisiallaşdırılması.
- əməliyyat sisteminin nüvəsinin əməli yaddaşa yüklənməsi,
- istifadəçinin sistemdə qeydiyyatı üçün dəvətin verilməsi.

Kompüter qoşulduqda giriş-çıxışın baza sisteminin-BİOS (Basic İNPUT-Output System) idarəsiilə aparat vasitələrinin öz-özünə avtomatik testlənmə proseduru olan POST (Power-On-Self-Test) yerinəyetirilir. Aparatlarda hər hansı problem aşkarlandıqda, məsələn, yaddaşda, sistem platasında, prosessorda, videokartda, klaviaturada siqnal olmadıqda BİOS sistemi səhv haqqında monitorun ekranına məlumatı xaric edir və müxtəlif səs siqnalları verir.

Yoxlamanın müvəffəqiyyətlə sona çatması əməliyyat sisteminin yüklənməsinə keçidə imkan verir. BİOS sistemi yükləyici diski (sərt diski və ya kompakt disk-bu disklərin ardıcıllığı BİOS-da təyin olunur) təyin edir. BİOS diskin birinci sektorunda baş yükləyici yazını (MBR-Master Bot Record) və bölmələr təsvir olunan cədvəli oxuyur, aktiv bölməni tapır və buradan əməliyyat sisteminin yükləyicisininbirinci sektorunun ünvanını oxuyur. Sonra məntiqi diskdən oxunan yükləyici əməliyyat sistemini yükləmək üçün əməli yaddaşda yerləşdirilir. Əgər diskdə sistem bölməsi olmazsa, ekrana aşağıdakı tipli səhv görünür: Non-system disk or disk error. Replace and press any key when ready.

Yükləyici diskin baş kataloqundan əməli yaddaşa daxil olan yükləyici proqram idarəni öz üzərinə götürür və əgər bir neçə əməliyyat sistemi olarsa, hansı əməliyyat sisteminin işə salınması tələb olunursa onu təyin edir və əməliyyat sisteminin fayllarını yükləyir.

Əməliyyat sisteminin İnterfeysi. Kompüterdə informasiyanın emal olunmasında "interfeys"terminindən geniş istifadə edilir. İngilis dilindən tərcümədə "İnterface" sözünün mənası "xarici sifət"deməkdir.

Kompüter aləmində interfeyslərin çoxlu sayda növləri vardır:

- istifadəçi interfeysi,
- intellektual interfeys,
- insan-maşın interfeysi,
- proqram interfeysi vəs.

İnterfeys-vasitələr və qaydalar toplusu olub, qurğuların, proqramların və insanların bir-birilə qarşılıqlı əlaqəsini təmin edir.

Fərdi kompüterin əməliyyat sistemlərinin kompüterlə rahat işləməsi üçün mübadilə vasitəsi olan interfeys olmalıdır. İlk dəfə əmrlər sətirli interfeys MS DOS (Microsoft Disk Operation System-disk əməliyyat sistemi) əməliyyat sistemində tətbiq olunubdur. Buradasistemlə qarşılıqlı əlaqə əmrlərin klaviaturadan hərf-rəqəm ardıcıllıqlı sətirlər şəklində daxil edilməsi həyata keçirilirdi

Qrafiki interfeysi birinci dəfə 1962-ci ildə Sketchpad proqramında Massaçuset Texnologiya İnstitutunda Ayven Sazerland tərəfindən, daha sonra 1973-cü ildə Xerox firmasının kompüterlərində və Apple şirkətinin Macintosh kompüterində Mac OS əməliyyat sistemində tətbiq edilibdir. Sonra Microsoft şirkəti bunu Windows əməliyyat sistemində istifadə edibdir.

İstifadəçinin qrafiki interfeysi (GUI-Graphical User İnterface)-istifadəçinin ekranda yerləşən pəncərə, siyahı, düymə, hiperistinad, işarə vəs. kimi viziual elementlərlə hesablama sisteminin qarşılıqlı əlaqə yaradan qrafiki mühitdir.

Bu mühitdə əmrlər klaviaturadan sözlərlə deyil, qrafiki interfeysin aşağıdakı elementlərinin köməyi ilə daxil edilir:

- ekran sahəsində yerini dəyişə bilən düzbucaqlı pəncərə;
- menyu və düymələr paneli;
- fayl, qovluq və qurğuları təsvir edən işarələr;
- ekran göstəricisi, yəni kursor;
- maus göstəricisi.

Hal-hazırda fərdi kompüterlərdə istifadə olunan bütün müasir əməliyyat sistemləri istifadəçi ilə qarşılıqlı əlaqəni qrafiki interfeysin köməyi ilə təmin edir. Qrafiki interfeyslər əksər tətbiqi proqramlarda da istifadə olunur.

OS/2 ailəsinin əməliyyat sistemləri. 1987-ci ildə fərdi kompüterlərin yeni ailəsinin yaradılması ilə əlaqədar IBM firması tərəfindən OS/2 ƏS hazırlanmışdır. OS\2 (Operating System/2) ikinci nəsil çoxməsələli əməliyyat sistemidir. OS/2 IBM PC ilə uyuşan kompüterlər üçün 32-mərtəbəli qrafiki çoxməsələli əməliyyat sistemidir. OS/2 bir neçə tətbiqi proqramın paralel işini təmin edir və bu zaman işləyən proqramları bir-birindən, əməliyyat sistemini isə i. ləyən proqramlardan mühafizə edir. ƏS-də proqramların yazılmasında API (Application Proqramming İnterface)-tətbiqi proqramlar interfeysində yerləşən hazır proqram modullarından istifadəyə imkan verir.

OS/2 əməliyyat sistemi DOS-un fayl sistemi ilə uyuşan rahat qrafiki istifadəçi interfeysinə malikdir. Bu da verilənlərdə heçbir çevirmə aparmadan, onlardan həm DOS-da, həm də OS/2-də stifadə etməyə imkan verir.

OS/2-nin aşağıdakı modifikasiyaları mövcuddur:

- OS/2 Warp 3. 0-yaddaşdan istifadə və qrafiki interfeys təkmilləşdirilib;
- OS/2 Warp Connect-şəbəkə imkanları təkmilləşdirilib;
- OS/2 Warp Server-serverli ƏS-də iş üçün nəzərdə tutulub.

OS/2-nin əsas çatışmazlığı onun az sayda tətbiqi proqramlara malik olmasıdır ki, bu da onun MS DOS və Windows ƏS-ə nisbətən az yayılmasına səbəb olub.

UNIX ailəsinin əməliyyat sistemləri. UNIX-32 mərtəbəli, çoxməsələli, çoxistifadəçili əməliyyat sistemləri ailəsidir. 1969-cu ildə AT&T konsernin Bell Labs firması tərəfindən yaradılmışdır.

1992-ci ildə AT&T konserni, UNIX sistemi ilə məşğul olan bütün strukturu Novell şirkətinə satdı. Artıq burada Unix Ware adlı versiya yarandı, amma geniş yayılmadı.

1997-ci ildə buraxılan versiya BSD (Berkeley Software Distribition) adlandı. Hal –hazırda ATT və BSD adı altında Unix sistemlərindən istifadə olunur. ATT ilə AT&T konsernin yaratdığı və Berkli Universitetinin yaratdığı UNIX-in bir neçə veriyası var ki, onlar pulsuz paylanır. Bunlardan ən məşhuru Linux-dur. ATT-də yaradılanlardan –Solaris, HP-UX və IRIX, BSD-də yaradılanlardan isə -Sun OS, DEC korporasiyasının OSF və BSD\OS əməliyyat sistemlərini qeyd etmək olar.

UNIX-in üstün cəhəti onun müxtəlif kompüterlərdə istifadəsinin mümkünlüyüdür.

UNIX aşağıdakı imkanları özündə birləşdirir:

- Paylanmış verilənlər bazasına müraciət;
- Lokal şəbəkədə işləmək;
- Uzaq məsafəli əlaqə və adi modemdən istifadə etməklə qlobal şəbəkəyə çıxış.

Sonuncu imkan UNIX-in ən vacib komponentlərindən biridir. Hazırda UNIX üçün çoxlu sayda tətbiqi proqramlar mövcuddur. MS DOS və Windows üçün geniş yayılan bir çox tətbiqi proqramlar UNIX –də də istifadə oluna bilər. UNIX ailəsindən olan bir neçə ƏS mövcuddur. Bu ailədən olan müxtəlif versiyların öz adı var.

UNIX-in fayl sistemi fayllara icazəsiz müraciətdən mühafizəni təmin edir.

Hal-hazırda UNIX ailəsindən olan şəbəkə ƏS-dən geniş yayılanı 64-mərtəbəli çoxistifadəçili, çoxməsələli UNIXWare əməliyyat sistemidir. Bu əməliyyat sisteminin bir neçə server əməliyyat sistemlərindən olan FreeBSD, NetBSD və OpenBSD-dən geniş istifadə olunur. UNIX ailəsinin əməliyyat sistemlərindən olan LİNUX əməliyyat sistemi Finlandiyanın Helsinki Universitetinin tələbəsi Linus Torvalds tərəfindən yaradılmışdır.

Linux çoxməsələli və çoxistifadəçili əməliyyat sistem olmaqla AT&T kodundan istifadə etmir. İlk versiya Minix adlanmaqla 1991-ci iin avqustunda yaradılıdı. 1991-ci ilin oktyabrında isə Linus Linux-in ilk 0. 02 versiyası yaradıldığını rəsmən elan elan etdi. Linux-in 0. 03 versiyasından sonra 0. 10 nömrələməyə keçdi ki, bununla da onun layihəsində çoxlu insan iştirak etdi. Növbəti versiya 1992-ci ildə yaradıldı ki, bunun da nömrəsi 0. 95 oldu. 1993-cü ilin ekabrında isə Linux 0. 99 yaradıldı.

Linux verilənlərin saxlanılması üçün müxtəlif tip fayl sistemlərini dəstəkləyir. Məsələn, msdos fayl sistemi MS DOS-un fayl sisteminin drayverlərinin Linux üçün imkanlarını genişləndirir. Linux şəbəkə ilə işi təmin etmək üçün TCP\P protokollarına malikdir. Linuxun nüvəsi yalnız lazım olan səhifənin yüklənməsini təmin edir. Yəni diskdən yaddaşa istifadə olunan proqram seqmenti yüklənir. Mümkün yaddaşın həcmini artırmaq üçün Linux diskin səhifələrə bölünməsini həyata keçirir. Sistemə fiziki yaddaşdan çox yaddaştələb olunarsa, "svopinq"in köməyi ilə qeyri-aktiv səhifəni diskə yerləşdirir.

UNIX-də istənilən utilit Linux-də mövcuddur. Bura ls, awk, tr, sed, bc, more və s. baza əmrləri daxildir. Linux-da vi, ex, pico, cove və həmçinin GNU Emacs, Lucid Emacs və KWrite kimi mətn redaktorları mövcuddur. Linux-da həmçinin çoxlu sayda mətn prossesorları var. Bunlardan biri groff-GNU (Bell Labs tərəfindən yaradılıb), o biri isə Donald Knut tərəfindən yaradılan Tex mətn prossesorudur. Tex-in genişlənməsi isə texinfo-dur. Linux əməliyyatsistemi UNIX mühitində proqramlaşdırmanı tam təmin edir. Bura standart kitabxanalar, proqram vasitələri, kompilyatorlar və sazlayıcılar daxildir. UNIX-də bir çox tətbiqi proqramlar və sistem proqramlar C və C++ dilində tərtib olunur. Linux-da C və C++ üçün standart kompliyator GNU gcc-dir. C və C++ dilindən başqa digər kompliyator və interpretatorlar Linux üçün yaradılıb. Bura Smalltalk, Fortran, Pascal, LISP, Scheme və Ada daxildir.

Mac OS (Macintosh Operating System) Apple şirkətinin fərdi kompüterlər üçün nəzərdə tutulan əməliyyat sistemidir. Macintosh fərdi kompüterləri və onun əməliyyat sistemi olan Mac OS Apple Computer İnc. şirkətinin məhsuludur. Macintosh adı alma növündən götürülüb. Macintoshun istehsalına 1984-cü ildə başlanılmışdır. Qeyd edək ki, Apple şirkəti maus və qrafik interfeysdən istifadə edən ilk şirkətlərdən biridir. Macintosh-dan əvvəl Apple şirkətinin Lisa, Apple II, Apple III kimi sistemləri olsa da 1986-cı ildə onların fəaliyyəti dayandırılmışdır və bütün məhsullar Macintosh adı altında toplanmışdır. Apple seriyalı bütün kompüterlər Apple şirkətinin öz məhsulu olan Mac OS əməliyyat sistemindən istifadə edirlər. Mac OS əməliyyat sistemləri öz aralarında Mac OS Classic və Mac OSX kimi iki qrupa ayrılırlar. Hər iki əməliyyat sistemi bir-birindən tamamilə ayrı işləyirlər. Onu da qeyd edək ki, 2009-cu ilin avqust ayında Mac OS X əməliyyat sisteminin ən son versiyası olan Snow Leopard buraxılmışdır. Mac OS-un əvvəlki versiyaları yalnız Motorola prossesorlu kompüterlər üçün nəzərdə tutulmuşdur. Sonrakı versiyalar isə Power PC arxitekturu ilə uyğunluqludur. Mac OS X Snow Leopard-ın işi üçün İntel-in olması vacibdir. 2000-ci ildən başlayaraq Apple öz kompüterlərində İntel prossesorlarından istifadə edir. Mac OS Leopard əməliyyat sisteminin digər əməliyyat sistemləri ilə müqayisədə bəzi üstün cəhətləri mövcuddur. Məsələn, Mac OS X Snow Leopard əməliyyat sisteminin quraşdırılması olduqca sadə həyata keçirilir. Mac OS X Snow Leopard stabil olaraq yüksək sürətlə işləyir və onun menyusu istifadə üçün çox sadədir.

ƏDƏBİYYAT

1. Kərimov S. Q.,Həbibullayev S. B.,İbrahimzadə T. İ.*İnformatika. Ali məktəblər üçün dərslik*.Bakı,2011.
2. *Информатика. Базовый курс. Стандарт третьего поколения: учебникдля вузов* / Под ред.С. В. Симоновича.3-еид. Санкт-Петербург, Издательство «Питер», 2013.
3. Гаврилов М.,Климов В.*Информатика и информационные технологии*.Учебник.Москва,Издательство Юрайт,2014
4. Kərimov S. Q.,Sərdarov Y. B. *Kompüter elminin nəzəri əsasları*.Dərslik. Bakı, 2009, 290 s.

JOURNAL OF BAKU ENGINEERING UNIVERSITY- MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
2020. Volume 4, Number 2 *Pages 137-142*

UOT621.373.13; 621.373.54

İKİ AVTOGENERATORLU DİFERENSİAL TUTUM QURĞUSUNUN PROQRAM TƏMİNATININ İŞLƏNİLMƏSİ

R.N. NƏBİYEV, Q.İ. QARAYEV, R.R. RÜSTƏMOV, H.S. QULUZADƏ

Milli Aviasiya Akademiyası

XÜLASƏ

Məqalədə, perimetrin inteqrasiya olunmuş mühafizə-xəbərdarlıq sistemində tətbiq edilən iki avtogeneratorlu diferensial tutum qurğusunun aparat təminatının xarakteristikaları müəyyənləşdirilmiş və proqram təminatı işlənilmişdir, eləcə də avtogeneratorların çıxış siqnallarının tezlik qiymətlərinin emalı üçün Arduino Uno modullarından istifadə etməklə yazılmış proqramın alqoritminin blok-sxemləri və başlanğıc kodları göstərilmişdir.

Arduino platformasından istifadə etməklə işlənilmiş, kifayət qədər yüksək etibarlılığa və müvafiq təhlükəsizlik tələblərinə malik olan iki avtogeneratorlu diferensial tutum qurğusunun mülki aviasiya obyektlərində tətbiqinin məqsədəuyğunluğu qeyd edilmişdir.

Açar sözlər: mülki aviasiya, aviasiya təhlükəsizliyi, perimetr, mühafizə-xəbərdarlıq sistemi, inteqrasiya olunmuş, diferensial tutum qurğusu, avtogenerator, Arduino platforması, proqram təminatı.

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ УСТРОЙСТВО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЕМКОСТИ С ДВУМЯ АВТОГЕНЕРАТОРАМИ

РЕЗЮМЕ

В статье разработано программное обеспечение и определены характеристики аппаратного обеспечения устройства дифференциальной емкости с двумя автогенераторами, применяемого в интегрированной системе охраны-предупреждения периметра, а также представлены блок-схемы алгоритмов и исходные коды программ, написанных для обработки частотных значений выходных сигналов автогенераторов с использованием модулей ArduinoUno. Было отмечено целесообразность использования высоконадежного и соответствующего требованиям безопасности устройства дифференциальной емкости с двумя автогенераторами разработанного с использованием платформы Arduino на объектах гражданской авиации.

Ключевые слова: гражданская авиация, авиационная безопасность, периметр, система охраны и оповещения, интегрированная, устройства дифференциальной емкости, автогенератор, платформа Arduino, программное обеспечение.

SOFTWARE DEVELOPMENT DIFFERENTIAL CAPACITANCE DEVICE WITH TWO AUTO GENERATORS

ABSTRACT

The article develops software and defines the hardware characteristics of a differential capacity device with two auto generators used in an integrated perimeter security-warning system, and presents block diagrams of algorithms and source codes of programs written to process the frequency values of the oscillator output signals using Arduino modules. Uno. The expediency of using a highly reliable and safety-compliant device of differential capacitance with two auto generators developed using the Arduino platform at civil aviation facilities was noted.

Keywords: civil aviation, aviation security, perimeter, security warning system, integrated, differential capacitance device, auto-oscillator, Arduino platform, software.

Aviasiya təhlükəsizliyinin təmin edilməsində "texniki resursların genişləndirilməsivə innovasiyaların stimullaşdırılması" metodlarının tətbiqi İCAO tərəfindən qarşıya qoyulan beş prioritet istiqamətlərdən birinə daxildir[1]. Texniki vasitələr qismində, hal-hazırda mülki aviasiya obyektlərində perimetrin qorunmasında məsafədən avtomatik idarə olunan inteqrasiya

olunmuş mühafizə-xəbərdarlıq sistemləri və bu sistemlərin nəzarət konturlarında tutum duyğacları tətbiq edilir.İnteqrasiya olunmuş mühafizə-xəbərdarlıq sistemi müxtəlif nəzarət konturlarını təşkil edən texniki vasitələrin vahid proqram təminatı əsasında əvvəlcədən daxil edilmiş alqoritmlər üzrə birgə fəaliyyətini təmin edir. Mühafizə edilən əraziyə qanunsuz keçmə aktını aşkaretmə effektivliyini və etibarlılığını artırmaq üçün bu sistemlərin proqram-aparat kompleksi təkmilləşdirilir [2-8]. Nəzarət konturları və ya həssas elementləri açıq havada quraşdırılan inteqrasiya olunmuş mühafizə-xəbərdarlıq sistemi üçün məlumatın ötürülməsində istifadə olunan interfeysin - məlumat mübadilə kanalının etibarlılığı böyük əhəmiyyət kəsb edir [9].

Məqalədə məqsəd, mühafizə-xəbərdarlıq sistemi üçün proqram-aparat platformasında iki avtogeneratorlu diferensial tutum qurğusunun aparat təminatının xarakteristikalarının müəyyənləşdirilməsi və proqram təminatının işlənilməsindən ibarətdir.

Praktiki olaraq, açıq havada aparılan istənilən müasir təcrübənin mühüm mərhələsi, alınan məlumatların toplanılması, sonrakı emalı və təhlili üçün onların kompüterdə rəqəmsal formada saxlanılmasıdır.

Müasir elektron komponentlər bazası və ölçü texnikası məlumatların toplanılması və eksperimental maketin idarə olunması üçün əks əlaqənin təşkilini təmin edən ölçü komplekslərini hazırlamağa imkan verir. Radiofizika və elektronika sahələrində təcrübələrin aparılması, müxtəlif qurğuların eksperimental maketlərinin qurulması və fiziki kəmiyyətlərin ölçülməsi, eləcə də təcrübə prosesinin avtomatlaşdırılmış idarə edilməsi proqram-aparat təminatını özündə birləşdirən universal platformalardan istifadə etməklə mümkündür. Mövcud universal platformalar tezliyi və amplitudu geniş diapazonda dəyişən siqnallar ilə işləyən, əldə olunmuş məlumatı toplayan, təhlil və emal edən, eləcə də asan öyrənilən qrafik proqramlaşdırma dillərindən istifadə edərək avadanlığın idarəedilməsini təmin edən güclü və idarəedici aparat modullarını təklif edir.Lakin, belə universal platformaların tətbiqi bəzi məsələlərin həllində səmərəli olmur [10, 12].

Belə vəziyyətdə, radiofiziki təcrübənin qurulması ilə əlaqəli bir sıra məsələləri səmərəli və tez həll etmək üçün Arduino proqram-aparat platformasını istifadə etmək mümkündür. Platforma qiymətinin ucuz, proqram təminatının pulsuz, sadələşdirilmiş proqramlaşdırma dillərindən istifadə etməklə mənimsənilmə imkanının sürətli, əlavə elementlər və quraşdırılma avadanlığı üçün tələblərin minimal olması ilə fərqlənir.

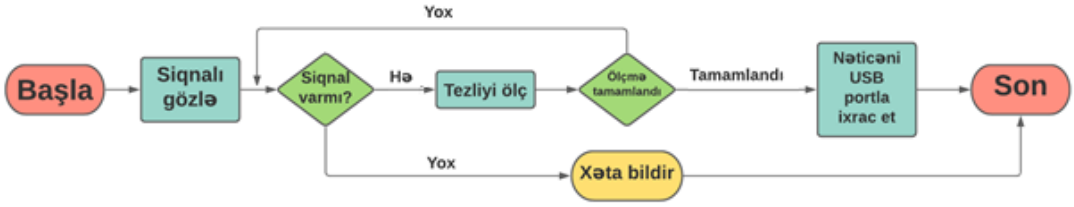
Arduino platforması fiziki sınaqlarda istifadə edilən ölçmələr, məlumatların kompüterə ötürülməsi və icraedici qurğuların idarə olunması ilə bağlı bir çox texniki məsələləri qısa müddətdə, asanlıqla və daha az material sərf etməklə həll etməyə imkan verir.

Arduinonun 20-dən çox baza modullarından biri - Arduino Uno modulunun çap lövhəsində əvvəlcədən quraşdırılmış iki mikrokontroller var. Bunlardan biri - 20 MHz-ə qədər takt tezliyində işləyən, 32 KB - FLASH komanda yaddaşına və 2 KB - SRAM məlumat yaddaşına malik inkişaf etdirilmiş ATmega328, ikinci - USB interfeysi vasitəsi ilə qurğulararası məlumat mübadiləsinə xidmət edən ATmega8U2 mikrokontrolleridir. Fiziki olaraq, baza modulu ilə kompüter USB port vasitəsi ilə birləşsə də, onlar arasında məlumat mübadiləsi virtual COM port (VCP) rejimində yerinə yetirilir.

Arduino mühitində yazılmış proqram "sketch" adlanır. “Sketch” yazıldıqdan sonra, kontrollerə yüklənir (bunun üçün mühitdə "yükləmə" düyməsindən istifadə edilir) və

yüklənmədən sonra proqram dərhal icra olunmağa başlayır. "Sketch" bütün Arduino baza modullarında işləyir [11, 12].

Diferensial tutum qurğusunda avtogeneratorların çıxış siqnallarının tezlikləri haqqında məlumatı noutbuka ötürmək üçün iki Arduino Uno modulundan istifadə edilmişdir. Arduino modullarında yazılmış proqramın alqoritminin blok-sxemi və başlanğıc kodu uyğun olaraq şək. 1 və şək. 2-də göstərilmişdir.



Şək. 1. Arduino moduluna yazılmış proqramın blok-sxemi

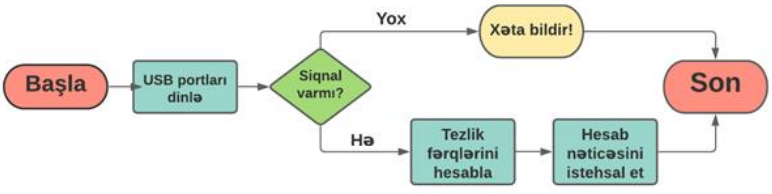
```
#include <FreqCount.h>
float deyer,count;
void setup() {
FreqCount.begin(1000);
Serial.begin(9600);
}
void loop() {
 if (FreqCount.available()) {
 float count = FreqCount.read();
deyer= count;
Serial.println(deyer);
delay(1000);
 }
}
```

Şək. 2. Arduino moduluna yazılmış proqramın başlanğıc kodu (sketch)

Noutbukda yazılmış Unity proqram təminatı vasitəsilə avtogeneratorların tezlikləri haqqında məlumat qeydə alınır, tezlik qiymətləri müqayisə edilir, aralarındakı fərq monitorda göstərilir və fərqin qiymətindən asılı olaraq həyəcan siqnalı yaradılır.

Noutbukda yazılmış proqramın alqoritminin blok-sxemi və başlanğıc kodu uyğun olaraq şək. 3və şək. 4-də göstərilmişdir.

Sınaqlar zamanı həyəcan siqnalı, siqnalların tezlik qiymətləri arasındakı fərq $\Delta f = 100$ Hs-dən çox olduqda formalaşdırlmışdır. Δf-in qiyməti idarə olunur və tədqiqat nəticəsində dəqiqləşdirilir.



Şək. 3. Noutbukda yazılmış Unity proqramının blok-sxemi

```
using System.Collections;
using System.Collections.Generic;
using System.IO.Ports;
using UnityEngine.SceneManagement;
using UnityEngine.UI;
using UnityEngine.Audio;
using UnityEngine;
public class Sensor : MonoBehaviour
{
 public InputFielddaxil;
 public float sd1, ferqucundeyer,inputDeyer;
 public AudioSourceaudioData;
 public GameObjecterrorPanel;
SerialPortsp = new SerialPort("COM4", 9600);
SerialPort sp2 = new SerialPort("COM3", 9600);
 public string deyer1,deyer2;
 public Text tez1, tez2, ferqtext;//, IT1;
 public Image errorMan;
 public string daxiledilen;
 void Start()
 {
errorPanel.SetActive(false);
sp.Open();
sp.ReadTimeout = -1;
 sp2.Open();
 sp2.ReadTimeout = -1;
errorMan.GetComponent<Image>().color = new Color32(255, 255, 225, 225);
 tez1.GetComponent<Text>();
 tez2.GetComponent<Text>();
ferqtext.GetComponent<Text>();
audioData = GetComponent<AudioSource>();
 }
 private void LateUpdate()
 {
daxiledilen = daxil.text;
 string[] inputDeyer= daxiledilen.Split(',');
ferqucundeyer = float.Parse(inputDeyer[0]);
 }
 void Update()
 {
 if (sp.IsOpen&& sp2.IsOpen)
 {
 deyer1 = sp.ReadLine();
 deyer2 = sp2.ReadLine();
 }
 else {
errorPanel.SetActive(true);
 }
```

```
 string[] bir = deyer1.Split(',');
 string[] iki = deyer2.Split(',');
 float IMP1 = float.Parse(bir[0]);
 float IMP2 = float.Parse(iki[0]);
 float ferq = Mathf.Abs( IMP1 - IMP2);
Debug.Log(ferq);
 tez1.text = "" + IMP1;
 tez2.text = "" + IMP2;
ferqtext.text = "" + ferq;
Debug.Log(ferqucundeyer);
 if (ferq>= ferqucundeyer)
 {
Debug.Log("asasas");
errorMan.GetComponent<Image>().color = new Color32(255, 0, 0, 225);
audioData.Play();
 }
 else
 {
errorMan.GetComponent<Image>().color = new Color32(255, 225, 225, 225);
audioData.Stop();
 }
 }
}
```

Şək. 4. Noutbukda yazılmış Unity proqramın başlanğıc kodu

Arduino platformasında işlənilmiş proqram təminatından istifadə etməklə perimetrin inteqrasiya olunmuş mühafizə-xəbərdarlıq sisteminin tərkibinə daxil olan nəzarət konturları arasında çoxsaylı informasiya mübadiləsi təşkil edilir. Bu zaman həm həyəcan siqnalı, həm də bütün nəzarət konturlarında baş verən müntəzəm hadisələr haqqında çoxsaylı məlumatlar operatora ötürülür.

Beləliklə, mühafizə-xəbərdarlıq sisteminin vəziyyəti və nəzarət konturları obyektin qrafik planına uyğun idarə olunur. Obyektin cari vəziyyəti haqqında məlumatlar avtomatlaşdırılmış halda operatorun kompüterinə göndərilir və kompüterin monitorunda görünür. Bu da operatorun fəaliyyətini əhəmiyyətli dərəcədə asanlaşdırır və qərar qəbuletmə müddətini qısaldır.

NƏTİCƏ

Arduino platformasında işlənilmiş vahid proqram təminatı geniş funksional xüsusiyyətlərə, operator üçün rahat işləmə imkanına malikdir və mühafizə-xəbərdarlıq sistemlərində pozucunun yaxınlaşması zamanıiki avtogeneratorlu diferensial tutum qurğusunun tezliyinin dəyişməsinin etibarlı şəkildə xəbərdarlıq siqnalına çevirmək mümkündür. Proqram təminatının kifayət qədər yüksək etibarlılığı və müvafiq təhlükəsizlik tələblərinə malik olması iki avtogeneratorlu diferensial tutum qurğusunun strateji obyektlərin, o cümlədən mülki aviasiya obyektlərinin mühafizəsində tətbiqinə imkan verir.

ƏDƏBİYYAT

1. Priority outcomes // ICAO. Global aviation security plan, November 2017. Chapter 3. Page 11;
2. Пашаев А.М., Набиев Р.Н., Нагиев Н.Т., Велиева Г.Д., Рустамов Р.Р. Особенности проектирования автоматизированного дистанционного охранного комплекса // Вопросы безопасности. 2018, № 1. С.32-51.;
3. Rüstəmov R.R. Məsafədən idarəedilən inteqrasiya olunmuş mühafizə-xəbərdarlıq sisteminin tətbiqi imkanları // Milli Aviasiya Akademiyasının Elmi Məcmuələri. 2019, 21 №4. səh. 31-39;
4. Nəbiyev R.N., Ramazanov K.Ş., Rüstəmov R.R. Avtomatlaşdırılmış mühafizə-xəbərdarlıq sisteminin effektivliyinin qiymətləndirilməsi // Azərbaycan Mühəndislik Akademiyasının Xəbərləri. 2020, 12 №1. səh. 84-91;
5. Paşayev A.M., Nəbiyev R.N., Ramazanov K.Ş., Rüstəmov R.R. Avtomatlaşdırılmış mühafizə-xəbərdarlıq sisteminin etibarlılığının qiymətləndirilməsi // Milli Aviasiya Akademiyasının Elmi Əsərləri. 2018, -№2. səh. 11-27;
6. Набиев Р.Н., Гараев Г.И., Рустамов Р.Р. Сравнительный анализ электрических схем ёмкостных датчиков // Известия ЮФУ. Технические науки. 2017, № 3 (188). С. 51-64;
7. Nəbiyev R.N., Qarayev Q.İ., Rüstəmov R.R. Tutum duyğacları üçün avtogenerator sxemlərinin tədqiqi // Milli Aviasiya Akademiyasının Elmi Məcmuələri. 2019, 21 №2. səh. 26-33;
8. Nəbiyev R.N., Qarayev Q.İ., Rüstəmov R.R. Məntiq elementlərində qurulmuş həssas elementli iki avtogeneratorun rezonans tezliklərinin tədqiqi // Milli Aviasiya Akademiyasının Elmi Məcmuələri. 2019, 21 №3. səh. 19-31;
9. Рыжова В.А. Проектирование и исследование компдексных систем безопасности. - СПб: НИУ ИТМО, 2012. Стр. 43-53;
10. Искендеров И.А., Панахов Т.М., Мусаев З.С. Автоматический регулятор температуры с частотно-импульсной модуляцией. Науч. труды ОГПУ, Одесса, 2002, с.190-193.
11. Пономаренко В.И. Использование платформы Arduino в измерениях и физическом эксперименте / В. И. Пономаренко, А. С. Караваев. - Текст : электронный // Известия Вузов. ПНД. - 2014. - № 4. Стр. 77-90;
12. Краткий обзор и перспективы применения микропроцессорной платформы Arduino / Е.Я. Омельченко, В.О. Танич, А.С. Маклаков, Е.А. Карякина // Электротехнические системы и комплексы. - 2013. - № 21. -С. 28-33.

INSTRUCTIONS FOR AUTHORS

1. "The Baku Engineering University Mathematics and Computer Science" accepts original unpublished articles and reviews in the research field of the author.
2. Articles are accepted in English.
3. File format should be compatible with **Microsoft Word** and must be sent to the electronic mail (**journal@beu.edu.az**) of the Journal. The submitted article should follow the following format:

- Article title, author's name and surname
- The name of workplace
- Mail address
- Abstract and key words

4. The title of the article should be in each of the three languages of the abstract and should be centred on the page and in bold capitals before each summary.
5. **The abstract** should be written in **9 point** type size, between **100** and **150** words. The abstract should be written in the language of the text and in two more languages given above. The abstracts of the article written in each of the three languages should correspond to one another. The keywords should be written in two more languages besides the language of the article and should be at least three words.
6. .**UDC** and **PACS** index should be used in the article.
7. The article must consist of the followings:

- Introduction
- Research method and research
- Discussion of research method and its results
- In case the reference is in Russian it must be given in the Latin alphabet with the original language shown in brackets.

8. **Figures, pictures, graphics and tables** must be of publishing quality and inside the text. Figures, pictures and graphics should be captioned underneath, tables should be captioned above.
9. **References** should be given in square brackets in the text and listed according to the order inside the text at the end of the article. In order to cite the same reference twice or more, the appropriate pages should be given while keeping the numerical order. For example: [7, p.15].

Information about each of the given references should be full, clear and accurate. The bibliographic description of the reference should be cited according to its type (monograph, textbook, scientific research paper and etc.) While citing to scientific research articles, materials of symposiums, conferences and other popular scientific events, the name of the article, lecture or paper should be given.

Samples:

a) ***Article:*** Demukhamedova S.D., Aliyeva İ.N., Godjayev N.M.. *Spatial and electronic structure af monomerrik and dimeric conapeetes of carnosine üith zinc,* Journal of structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010

b) ***Book:*** Christie ohn Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles*. Fourth Edition, Prentice Hall, p.386-398, 2002

c) ***Conference paper:*** Sadychov F.S., Aydın C., Ahmedov A.İ.. Appligation of Information – Commu-nication Technologies in Science and education. II International Conference."*Higher Twist Effects In Photon- Proton Collisions", Bakı, 01-03 Noyabr, 2007, ss 384-391*

References should be in 9-point type size.

10. The margins sizes of the page: - Top 2.8 cm. bottom 2.8 cm. left 2.5 cm, right 2.5 cm. The article main text should be written in Palatino Linotype 11 point type size single-spaced. Paragraph spacing should be 6 point.
11. The maximum number of pages for an article should not exceed 15 pages
12. The decision to publish a given article is made through the following procedures:

- The article is sent to at least to experts.
- The article is sent back to the author to make amendments upon the recommendations of referees.
- After author makes amendments upon the recommendations of referees the article can be sent for the publication by the Editorial Board of the journal.

YAZI VƏ NƏŞR QAYDALARI

1. "Journal of Baku Engineering University- Riyaziyyat və kompüter elmləri" - əvvəllər nəşr olunmamış orijinal əsərləri və müəllifin tədqiqat sahəsi üzrə yazılmış icmal məqalələri qəbul edir.
2. Məqalələr İngilis dilində qəbul edilir.
3. Yazılar **Microsoft Word** yazı proqramında, (**journal@beu.edu.az**) ünvanına göndərilməlidir. Göndərilən məqalələrdə aşağıdakılara nəzərə alınmalıdır:

- Məqalənin başlığı, müəllifin adı, soyadı,
- İş yeri,
- Elektron ünvanı,
- Xülasə və açar sözlər.

4. **Məqalədə başlıq hər xülasədən əvvəl** ortada, qara və böyük hərflə xülasələrin yazıldığı hər üç dildə olmalıdır.
5. **Xülasə** 100-150 söz aralığında olmaqla, 9 punto yazı tipi böyüklüyündə, məqalənin yazıldığı dildə və bundan əlavə yuxarıda göstərilən iki dildə olmalıdır. Məqalənin hər üç dildə yazılmış xülasəsi bir-birinin eyni olmalıdır. Açar sözlər uyğun xülasələrin sonunda onun yazıldığı dildə verilməklə ən azı üç sözdən ibarət olmalıdır.
6. Məqalədə UOT və PACS kodları göstərilməlidir.
7. Məqalə aşağıdakılardan ibarət olmalıdır:

- Giriş,
- Tədqiqat metodu
- Tədqiqat işinin müzakirəsi və onun nəticələri,
- İstinad ədəbiyyatı rus dilində olduğu halda orjinal dili mötərzə içərisində göstərməklə yalnız Latın əlifbası ilə verilməlidir.

8. **Şəkil**, **rəsm**, **grafik** və **cədvəllər** çapda düzgün, aydın çıxacaq vəziyyətdə və mətn içərisində olmalıdır. Şəkil, rəsm və grafiklərin yazıları onların altında yazılmalıdır. Cədvəllərdə başlıq cədvəlin üstündə yazılmalıdır.
9. **Mənbələr** mətn içərisində kvadrat mötərizə daxilində göstərilməklə məqalənin sonunda mətn daxilindəki sıra ilə düzülməlidir. Eyni mənbəyə iki və daha cox istinad edildikdə əvvəlki sıra sayı saxlanmaqla müvafiq səhifələr göstərilməlidir. Məsələn: [7,səh.15].

Ədəbiyyat siyahısında verilən hər bir istinad haqqında məlumat tam və dəqiq olmalıdır. İstinad olunan mənbənin biblioqrafik təsviri onun növündən (monoqrafiya, dərslik, elmi məqalə və s.) asılı olaraq verilməlidir. Elmi məqalələrə, simpozium, konfrans, və digər nüfuzlu elmi tədbirlərin materiallarına və ya tezislərinə istinad edərkən məqalənin, məruzənin və ya tezisin adı göstərilməlidir.

Nümunələr:

a) ***Məqalə:*** Demukhamedova S.D., Aliyeva İ.N., Godjayev N.M.. *Spatial and electronic structure af monomeric and dimeric complexes of carnosine with zinc,* Journal of structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010

b) ***Kitab:*** Christie ohn Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles*. Fourth Edition, Prentice Hall, 2002

c) ***Konfrans:*** Sadychov F.S., Aydın C., Ahmedov A.İ.. Appligation of Information-Communication Technologies in Science and education. II International Conference. "*Higher Twist Effects In Photon- Proton Collisions", Bakı, 01-03 Noyabr, 2007, ss 384-391*

Mənbələr 9 punto yazı tipi böyüklüyündə olmalıdır.

10. **Səhifə ölçüləri:** üstdən 2.8 sm, altdan 2.8 sm, soldan 2.5 sm və sağdan 2.5 sm olmalıdır. Mətn 11 punto yazı tipi böyüklüyündə, **Palatino Linotype** yazı tipi ilə və tək simvol aralığında yazılmalıdır. Paraqraflar arasında 6 punto yazı tipi aralığında məsafə olmalıdır.
11. Orijinal tədqiqat əsərlərinin tam mətni bir qayda olaraq 15 səhifədən artıq olmamalıdır.
12. Məqalənin nəşrə təqdimi aşağıdakı qaydada aparılır:

- Hər məqallə ən azı iki ekspertə göndərilir.
- Ekspertlərin tövsiyələrini nəzərə almaq üçün məqalə müəllifə göndərilir.
- Məqalə, ekspertlərin tənqidi qeydləri müəllif tərəfindən nəzərə alındıqdan sonra Jurnalın Redaksiya Heyəti tərəfindən çapa təqdim oluna bilər.

YAZIM KURALLARI

1. "Journal of Baku Engineering University- Matematik ve Bilgisayar Bilimleri" önceler yayımlanmamış orijinal çalışmaları ve yazarın kendi araştırma alanın-da yazılmış derleme makaleleri kabul etmektedir.
2. Makaleler İngilizce kabul edilir.
3. Makaleler Microsoft Word yazı programında, (**journal@beu.edu.az**) adresine gönderilmelidir. Gönderilen makalelerde şunlar dikkate alınmalıdır:

- Makalenin başlığı, yazarın adı, soyadı,
- İş yeri,
- E-posta adresi,
- Özet ve anahtar kelimeler.

4. **Özet** 100-150 kelime arasında olup 9 font büyüklüğünde, makalenin yazıldığı dilde ve yukarıda belirtilen iki dilde olmalıdır. Makalenin her üç dilde yazılmış özeti birbirinin aynı olmalıdır. Anahtar kelimeler uygun özetin sonunda onun yazıldığı dilde verilmekle en az üç sözcükten oluşmalıdır.
5. Makalede UOT ve PACS tipli kodlar gösterilmelidir.
6. Makale şunlardan oluşmalıdır:

- Giriş,
- Araştırma yöntemi
- Araştırma
- Tartışma ve sonuçlar,
- İstinat Edebiyatı Rusça olduğu halde orjinal dili parantez içerisinde göstermekle yalnız Latin alfabesi ile verilmelidir.

7. **Şekil, Resim, Grafik** ve **Tablolar** baskıda düzgün çıkacak nitelikte ve metin içerisinde olmalıdır. Şekil, Resim ve grafiklerin yazıları onların alt kısımda yer almalıdır. Tablolarda ise başlık, tablonun üst kısmında bulunmalıdır.
8. **Kullanılan kaynaklar**, metin dâhilinde köşeli parantez içerisinde numaralandırılmalı, aynı sırayla metin sonunda gösterilmelidir. Aynı kaynaklara tekrar başvurulduğunda sıra muhafaza edilmelidir. Örneğin: [7,seh.15].

Referans verilen her bir kaynağın künyesi tam ve kesin olmalıdır. Referans gösterilen kaynağın türü de eserin türüne (monografi, derslik, ilmî makale vs.) uygun olarak verilmelidir. İlmi makalelere, sempozyum, ve konferanslara müracaat ederken makalenin, bildirinin veya bildiri özetlerinin adı da gösterilmelidir.

Örnekler:

a) ***Makale:*** Demukhamedova S.D., Aliyeva İ.N., Godjayev N.M.. *Spatial and Electronic Structure of Monomerik and Dimeric Conapeetes of Carnosine Üith Zinc,* Journal of Structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010

b) ***Kitap:*** Christie ohn Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles*. Fourth Edition, Prentice Hall, p.386-398, 2002

c) ***Kongre:*** Sadychov F.S., Aydın C., Ahmedov A.İ. Appligation of Information-Communication Technologies in Science and education. II International Conference. "*Higher Twist Effects In Photon- Proton Collisions", Bakı, 01-03 Noyabr, 2007, ss 384-391*

Kaynakların büyüklüğü 9 punto olmalıdır.

9. **Sayfa ölçüleri**; üst: 2.8 cm, alt: 2.8 cm, sol: 2.5 cm, sağ: 2.5 cm şeklinde olmalıdır. Metin 11 punto büyüklükte **Palatino Linotype** fontu ile ve tek aralıkta yazılmalıdır. Paragraflar arasında 6 puntoluk yazı mesafesinde olmalıdır.
10. Orijinal araştırma eserlerinin tam metni 15 sayfadan fazla olmamalıdır.
11. Makaleler dergi editör kurulunun kararı ile yayımlanır. Editörler makaleyi düzeltme için yazara geri gönderilebilir.
12. Makalenin yayına sunuşu aşağıdaki şekilde yapılır:

- Her makale en az iki uzmana gönderilir.
- Uzmanların tavsiyelerini dikkate almak için makale yazara gönderilir.
- Makale, uzmanların eleştirel notları yazar tarafından dikkate alındıktan sonra Derginin Yayın Kurulu tarafından yayına sunulabilir.

13. Azerbaycan dışından gönderilen ve yayımlanacak olan makaleler için,(derginin kendilerine gonderilmesi zamani posta karşılığı) 30 ABD Doları veya karşılığı TL, T.C. Ziraat Bankası/Üsküdar-İstanbul 0403 0050 5917 No'lu hesaba yatırılmalı ve makbuzu üniversitemize fakslanmalıdır.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. «Journal of Baku Engineering University» - Математики и информатики публикует оригинальные, научные статьи из области исследования автора и ранее не опубликованные.
2. Статьи принимаются на английском языке.
3. Рукописи должны быть набраны согласно программы **Microsoft Word** и отправлены на электронный адрес **(journal@beu.edu.az)**. Отправляемые статьи должны учитывать следующие правила:

- Название статьи, имя и фамилия авторов
- Место работы
- Электронный адрес
- Аннотация и ключевые слова

4. **Заглавие статьи** пишется для каждой аннотации заглавными буквами, жирными буквами и располагается по центру. Заглавие и аннотации должны быть представлены на трех языках.
5. **Аннотация**, написанная на языке представленной статьи, должна содержать 100-150 слов, набранных шрифтом 9 punto. Кроме того, представляются аннотации на двух других выше указанных языках, перевод которых соответствует содержанию оригинала. Ключевые слова должны быть представлены после каждой аннотации на его языке и содержать не менее 3-х слов.
6. В статье должны быть указаны коды UOT и PACS.
7. Представленные статьи должны содержать:

- Введение
- Метод исследования
- Обсуждение результатов исследования и выводов.
- Если ссылаются на работу на русском языке, тогда оригинальный язык указывается в скобках, а ссылка дается только на латинском алфавите.

8. **Рисунки, картинки, графики и таблицы** должны быть четко выполнены и размещены внутри статьи. Подписи к рисункам размещаются под рисунком, картинкой или графиком. Название таблицы пишется над таблицей.
9. **Ссылки** на источники даются в тексте цифрой в квадратных скобках и располагаются в конце статьи в порядке цитирования в тексте. Если на один и тот же источник ссылаются два и более раз, необходимо указать соответствующую страницу, сохраняя порядковый номер цитирования. Например: [7, стр.15]. Библиографическое описание ссылаемой литературы должно быть проведено с учетом типа источника (монография, учебник, научная статья и др.). При ссылке на научную статью, материалы симпозиума, конференции или других значимых научных мероприятий должны быть указаны название статьи, доклада или тезиса.

Например:

a) ***Статья:*** Demukhamedova S.D., Aliyeva I.N., Godjayev N.M. *Spatial and electronic structure of monomeric and dimeric complexes of carnosine with zinc,* Journal of Structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010

b) ***Книга:*** Christie on Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles.* Fourth Edition, Prentice Hall, 2002

c) ***Конференция:*** Sadychov F.S, Fydin C,Ahmedov A.I. Appligation of Information-Communication Nechnologies in Science and education. II International Conference. *"Higher Twist Effects In Photon-Proton Collision",* Bakı,01-03 Noyabr, 2007, ss.384-391

Список цитированной литературы набирается шрифтом 9 punto.

10. **Размеры страницы:** сверху 2.8 см, снизу 2.8 см, слева 2.5 и справа 2.5. Текст печатается шрифтом **Palatino Linotype**, размер шрифта 11 punto, интервал-одинарный. Параграфы должны быть разделены расстоянием, соответствующим интервалу 6 punto.
11. Полный объем оригинальной статьи, как правило, не должен превышать 15 страниц.
12. Представление статьи к печати производится в ниже указанном порядке:

- Каждая статья посылается не менее двум экспертам.
- Статья посылается автору для учета замечаний экспертов.
- Статья, после того, как автор учел замечания экспертов, редакционной коллегией журнала может быть рекомендована к печати.