Journal of Baku Engineering University

ISSN 2521-635X

Volume 5
Number 2

2021

MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

Journal is published twice a year
Number-1. June, Number-2. December

An International Journal

http://journal.beu.edu.az

FOUNDER

Havar Mammadov

EDITOR-IN-CHIEF

Hamzaga Orucov

CO-EDITORS

Agasi Melikov

EDITORIAL ADVISORY BOARD

Abzeddin Adamov *(Azerbaijan, ADA)*
Agil Khanmamedov *(Azerbaijan, Baku State University)*
Alekber Aliyev *(Azerbaijan, Baku State University)*
Araz Aliyev *(Azerbaijan, Azerbaijan State Oil and Industry University is a tertiary education institution in Baku,)*
Gorbachuk Valentina Ivanovna *(Ukraina, Academy of Science)*
Hamdulla Aslanov *(Azerbaijan, Akademy of Science)*
Ibrahim Nebiyev *(Azerbaijan, Baku State University)*
Rakib Efendiyev *(Azerbaijan, Baku State University)*
Sosnin Petr Ivanovich
(Russia,Ulyanovsk State Technical University)

INTERNATIONAL ADVISORY BOARD

Abdeljalil Nachaoui *(France, Nantes University)*
Barış Erbaş *(Anadolu University, Turkey)*
Che Soong Kim *(Koreya, Sangji University)*
Chakib Abdelkrim *(Morocco, Beni Mellal University)*
Elshad Eyvazov *(Azerbaijan, Baku State University)*
Ekber Eliyev *(Azerbaijan, National Academy of Science)*
Garib Murshudov *(York Academy,UK, London)*
Golovko Vladimir Adamovich *(Belarus, Brest State Universiteti)*
Hamed Sari-Sarraf *(USA,TexasTechnik University)*
Hari Srivastava *(Canada,Victoria,)*
Hidayyat Guseynov *(Azerbaijan, Baku State University)*
Jauberteau Francois *(France,Nantes University)*
Kamil Mansimov *(Azerbaijan, Baku State University)*
Ludmila Prikazchikova *(Keele University, England)*
Mourad Nachaoui *(France,Nantes University)*
Rasim Alikuliyev *(Azerbaijan, National Academy of Science)*
Tarasenko Vladimir Petrovich
(National Technical University of Ukraine)
Telman Aliyev *(Azerbaijan, National Academy of Science)*
Telman Malikov *(Azerbaijan, National Academy of Science)*
Vedat Coşkun *(Turkiye,Işık University)*
Vladimir B. Vasilyev *(Russia, Lipetsk State Technical University)*
Sabir Mirzayev *(Azerbaijan, Baku State University)*
Dimkov Mikhail Pakhomovich
(Belarus State Economic University)
Arquchintsev Alexander Valeryevich, *(Irkutsk State University)*

EXECUTIVE EDITORS

Shafag Alizade

ASSISTANT EDITORS

Svetlana Denmuhammedovna

DESIGN

Ilham Aliyev

CONTACT ADDRESS

Journal of Baku Engineering University
AZ0102, Khirdalan city, Hasan Aliyev str. 120, Absheron, Baku, Azerbaijan
Tel: 00 994 12 - 349 99 95 Fax: 00 994 12 349-99-90/91

e-mail: journal@beu.edu.az
web: http://journal.qu.edu.az
facebook: Journal Of Baku Engineering University

Copyright © Baku Engineering University

ISSN 2521-635X

ISSN 2521-635X

Journal of Baku Engineering University

MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

Baku - AZERBAIJAN

Journal of Baku Engineering University

MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

2021. Volume 5, Number 2

CONTENTS

2021. Volume 5, Number 2 Pages 51-59

УДК 517.977

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СЕДЛОВОЙ ТОЧКИ В ОДНОЙ ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ ОПИСЫВАЕМАЯ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

А.А. АБДУЛЛАЕВ [*], К.В. МАНСИМОВ [**]

Бакинский Государственный Университет

Институт Систем Управления НАН Азербайджана

aqshinabiloqlu@gmail.com, kamilbmansimov@gmail.com

РЕЗЮМЕ

Рассматривается одна игровая задача описываемая системой нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра. Получено необходимое условия существования седловой точки в форме принципа масимума Л.С.Понтрягина в рассматриваемой задаче. В случае выпуклости области управления доказано линеризованное необходимое условие существования седловой точки. При предположении открытости области управления получены аналог уравнения Эйлера.

Ключевые слова: игровая задача, допустимое управление, седловая точка, необходимое условие, интегральное уравнение типа Вольтерра, линеаризованное необходимое условие оптимальности.

THE NECESSARY CONDITIONS FOR THE EXISTENCE OF A SADDLE POINT IN ONE GAME PROBLEM DESCRIBED BY VOLTERRA EQUATIONS

ABSTRACT

We consider a game problem described by a nonlinear Volterra-type integral equations system. The necessary condition for the existence of a saddle point in the form of L. S. Pontryagin's principle of maximum in the problem under consideration is obtained. In the case of convexity of the control domain, a linearized necessary condition for the existence of a saddle point is proved. Under the assumption of openness of the control domain, an analog of the Euler equation is obtained.

Keywords: game problem, admissible control, saddle point, necessary condition, Volterra-type integral equation, linearized necessary condition.

VOLTERRA TIPLI INTEQRAL TƏNLIKLƏRLƏ TƏSVIR OLUNAN BIR OYUN MƏSƏLƏSINDƏ YƏHƏRVARI NÖQTƏNIN VARLIĞI ÜÇÜN ZƏRURI ŞƏRTLƏR

XÜLASƏ

Volterra tipli qeyri-xətti inteqral tənliklər sistemi ilə təsvir olunan bir oyun məsələsinə baxılır. Baxılan məsələdə yəhərvari nöqtənin varlığı üçün L.S.Pontryaginin maksimum prinsipi mənada zəruri şərtlər isbat edilmişdir. İdarə oblastı qabarıq olduğu halda yəhərvari nöqtənin varlığı üçün xəttiləşdirilmiş zəruri şərt isbat edilmişdir. İdarə oblastı açıq olması şərti daxilində Eyler tənliyinin analoqu alınmışdır.

Açar sözlər: oyun məsələsi, mümkün idarə, yəhərvari nöqtə, zəruri şərt, Volterra tipli inteqral tənlik, xəttiləşdirilmiş zəruri şərt.

Многие процессы описываются различными интегральными уравнениями (см. напр. [1-3]). В работах [4-6] и др. рассмотрены различные задачи оптимального управления описываемые интегральными уравнениями типа Вольтерра.

Предлагаемая работа посвящена исследованию одной игровой задачи управления описываемая системой интегральных уравнений типа Вольтерра. Доказаны необходимые условия существования седловой точки в рассматриваемой задаче.

1. Постановка задачи. Допустим, что управляемый процесс описывается на фиксированном отрезке времени $T=[t_0,t_1]$ системой интегральных уравнений типа Вольтерра

$$x(t)=\int_{t_0}^{t} f(t,s,x(s),u(s),v(s))ds, \qquad t\in T. \tag{1}$$

Здесь $x(t)-n-$мерный вектор фазовых переменных, $f(t,s,x,u,v)-$ заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по x, $u(t)$ $(v(t))-r(q)-$ мерный кусочно-непрерывный (с конечным числом точек разрыва первого рода) вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества $U\,(V)$ т.е.

$$u(t)\in U\subset R^r,\ t\in T.$$

$$v(t)\in V\subset R^q,\ t\in T. \tag{2}$$

пару $(u(t),\,v(t))$ с вышеприведенными свойствами назовем допустимой парой управляющих воздействий.

Предполагается, что каждой заданной допустимой паре управлений $u(t),\,v(t)$ (совокупности $(u(t),\,v(t))$) соответствует единственное непрерывное решение $x(t),\,t\in T$ уравнения (1).

На решениях $x(t),\,t\in T$ уравнения (1) порожденных всевозможной совокупностью $(u(t),\,v(t))$ определим функционал типа Лагранжа

$$J(u,v)=\int_{t_0}^{t_1} F(t,x(t),u(t),v(t))dt \tag{3}$$

Здесь $F(t,x,u,v)$ заданная скалярная функция непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по x.

Перейдем к постановке игровой задачи.

Предположим, что управлением $u(t)$ распоряжается сторона A (первый игрок) стремящаяся минимизировать функционал (3), а управлением $v(t)$ -сторона B (второй игрок) стремящаяся максимизировать этот функционал.

Рассмотрим следующую игровую задачу: среди всех совокупностей $(u(t),\,v(t))$ на которых определен функционал (3), нацти такую совокупность $(u^0(t),\,v^0(t))$, чтобы

$$J(u^0,v)\le J(u^0,v^0)\le J(u,v^0) \tag{4}$$

при любых $(u(t),\,v(t))\in U\times V,\ t\in T$.

Совокупность $(u^0(t),\,v^0(t))$ удовлетворяющую условию (4) называют седловой точкой функционала (3).

В настоящей работе выводятся необходимые условия существования седловой точки.

2. Формула приращения функционала качества.

Пусть $\left(u^0(t), v^0(t)\right)$ и $\left(\bar{u}(t)=u^0(t)+\Delta u(t), \bar{v}(t)=v^0(t)+\Delta v(t)\right)$-две допустимые совокупности. Через $x^0(t)$ и $\bar{x}(t)=x^0(t)+\Delta x(t)$ обозначим соответствующие им решения уравнения (1). Из введенных обозначений ясно, что приращение $\Delta x(t)$ траектории $x^0(t)$ является решением интегрального уравнения

$$\Delta x(t)=\int_{t_0}^{t}\left[f\left(t,s,\bar{x}(s),\bar{u}(s),\bar{v}(s)\right)-f\left(t,s,x^0(s),u^0(s),v^0(s)\right)\right]ds \quad (5)$$

Пусть $\psi^0(t)$ пока произвольная n- мерная вектор–функция. Тогда из (5) получаем, что

$$\int_{t_0}^{t_1}\psi^{0'}(t)\Delta x(t)dt=\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t_0}^{t}\psi^{0'}(t)\left[f\left(t,s,\bar{x}(s),\bar{u}(s),\bar{v}(s)\right)-f\left(t,s,x^0(s),u^0(s),v^0(s)\right)\right]ds\right]dt.$$

Применяя в правую часть этого соотнощения теорему Фубини (см. напр. [7]) получим

$$\int_{t_0}^{t}\psi^{0'}(t_1)\Delta x(t)dt=\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1}\psi^{0'}(s)\left[f\left(s,t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\bar{v}(t)\right)-f\left(s,t,x^0(t),u^0(t),v^0(t)\right)\right]ds\right]dt \quad (6)$$

Используя формулу (6) запищем полное приращение функционала (3) соответствующее совокупностям $\left(u^0(t), v^0(t)\right)$ и $\left(\bar{u}(t)=u^0(t)+\Delta u(t), \bar{v}(t)=v^0(t)+\Delta v(t)\right)$.

В результате получим

$$\Delta J\left(u^0,v^0\right)=J\left(\bar{u},\bar{v}\right)-J\left(u^0,v^0\right)=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left[F\left(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\bar{v}(t)\right)-F\left(t,x^0(t),u^0(t),v^0(t)\right)\right]dt+\int_{t_0}^{t_1}\psi^{0'}(t)\Delta x(t)dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1}\psi^{0'}(s)\left[f\left(s,t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\bar{v}(t)\right)-f\left(s,t,x^0(t),u^0(t),v^0(t)\right)\right]ds\right]dt \quad (7)$$

Ввведем аналог функции Гамильтона-Понтрягина в виде

$$H\left(t,x,u,v,\psi^0\right)=-F\left(t,x(t),u(t),v(t)\right)+\int_{t}^{t_1}\psi^{0'}(s)f\left(s,t,x(t),u(t),v(t)\right)ds$$

Применяя формулу Тейлора из (7) получим, что

$$J\left(\bar{u},\bar{v}\right)-J\left(u^0,v^0\right)=\int_{t_0}^{t_1}\psi^{0'}(t)\Delta x(t)dt-\int_{t_0}^{t_1}\left[H\left(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\bar{v}(t),\psi^0(t)\right)-H\left(t,x^0(t),u^0(t),v^0(t),\psi^0(t)\right)\right]dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\psi^{0'}(t)\Delta x(t)dt-\int_{t_0}^{t_1}\left[H\left(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\bar{v}(t),\psi^0(t)\right)-H\left(t,x^0(t),\bar{u}(t),\bar{v}(t),\psi^0(t)\right)\right]dt=$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\left[H\left(t,x^0(t),\bar{u}(t),\bar{v}(t),\psi^0(t)\right)-H\left(t,x^0(t),u^0(t),v^0(t),\psi^0(t)\right)\right]dt= \quad (8)$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\psi^{0'}(t)\Delta x(t)dt-\int_{t_0}^{t_1}H_x'\left(t,x^0(t),\bar{u}(t),\bar{v}(t),\psi^0(t)\right)\Delta x(t)dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}o_1(\|\Delta x(t)\|)dt-\int_{t_0}^{t_1}H_x'\left(t,x^0(t),u^0(t),v^0(t),\psi^0(t)\right)\Delta x(t)dt$$

Если предполагать, что вектор –функция $\psi^0(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\psi^0(t)=H_x\left(t,x^0(t),u^0(t),v^0(t),\psi^0(t)\right) \quad (9)$$

то формула приращения (8) примет вид:

$$J(\bar{u},\bar{v})-J(u^0,v^0)=\int_{t_0}^{t_1}\psi^{0'}(t)\Delta x(t)dt-\int_{t_0}^{t_1}\left[H\left(t,x^0(t),\bar{u}(t),\bar{v}(t),\psi^0(t)\right)-H\left(t,x^0(t),u^0(t),v^0(t),\psi^0(t)\right)\right]dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\left[H_x'\left(t,x^0(t),\bar{u}(t),\bar{v}(t),\psi^0(t)\right)-H_x'\left(t,x^0(t),u^0(t),v^0(t),\psi^0(t)\right)\right]'\Delta x(t)dt- \quad (10)$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}o_1(\|\Delta x(t)\|)dt$$

Уравнение (9) является линейным интегральным уравнением относительно $\psi^0(t)$ (сопряженная система).

В дальнейшем нам понадобятся оценки для нормы приращения $\Delta x(t)$. Из (5) переходя к норме, и используя правило треугольника, получим, что

$$\|\Delta x(t)\|=\left\|\int_{t_0}^{t}\left[f\left(t,s,\bar{x}(s),\bar{u}(s),\bar{v}(s)\right)-f\left(t,s,x^0(s),u^0(s),v^0(s)\right)\right]ds\right\|\le$$

$$\le\int_{t_0}^{t}\left[\left\|f\left(t,s,\bar{x}(s),\bar{u}(s),\bar{v}(s)\right)-f\left(t,s,x^0(s),\bar{u}(s),\bar{v}(s)\right)\right\|+\right.$$

$$\left.+\left\|f\left(t,s,x^0(s),\bar{u}(s),\bar{v}(s)\right)-f\left(t,s,x^0(s),u^0(s),v^0(s)\right)\right\|\right]ds\le$$

$$\le L\int_{t_0}^{t}\|\Delta x(s)\|ds+\int_{t_0}^{t}\left\|f\left(t,s,x^0(s),\bar{u}(s),\bar{v}(s)\right)-f\left(t,s,x^0(s),u^0(s),v^0(s)\right)\right\|ds$$

Применяя к последнему неравенству обобщение леммы Гронуолла-Беллмана (см. напр. [7]) получим , что

$$\|\Delta x(t)\|\le L_1\int_{t_0}^{t}\left\|f\left(t,s,x^0(s),\bar{u}(s),\bar{v}(s)\right)-f\left(t,s,x^0(s),u^0(s),v^0(s)\right)\right\|ds \quad (11)$$

где $L_1=const>0$ некоторое постоянное.

Если предполагать, что $f(t,s,x,u,v)$ имеет также по (u,v) непрерывную производную то по аналогии с доказательством неравенства (11) доказывается справедливость оценки

$\left\|\Delta x(t)\right\| \le L_2 \int\limits_{t_0}^{t} \left[\left\|\Delta u(s)\right\| + \left\|\Delta v(s)\right\|\right] ds$, (12)

где $L_2 = const > 0$ некоторое постоянное.

3. Необходимые условия существования седловой точки

Пусть $\left(u^0(t), v^0(t)\right)$ является седловой точкой функционала (3). По определению седловой точки это означает, что для любых допустимых приращений $\Delta u(t)$ и $\Delta v(t)$ выполняются неравенства

$J\left(u^0, v^0\right) \le J\left(\bar{u}, v^0\right)$ (13)

$J\left(u^0, v^0\right) \ge J\left(u^0, \bar{v}\right)$ (14)

соответственно.

Пусть $\varepsilon > 0$ достаточно малое произвольное число, $\theta \in [t_0; t_1)$ произвольная точка непрерывности управления $u^0(t)$, а $u \in U$ произвольный вектор.

Специальное приращение управляющей функции $u^0(t)$ определим по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t) = \begin{cases} u - u^0(t), \ t \in [\theta, \theta + \varepsilon) = T_\varepsilon, \\ 0, \ t \in T \setminus T_\varepsilon, \end{cases} \quad (15)$$

и положим

$\Delta v(t) = 0$.

Через $\Delta x_\varepsilon(t)$ обозначим специальное приращение траектории $x^0(t)$ отвечающее приращению (15) управления $u^0(t)$.

Тогда с учетом формулу (10) из неравенства (13) получим, что

$$\begin{aligned} & J\left(u^0 + \Delta u_\varepsilon, v^0\right) - J\left(u^0, v^0\right) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \psi^{0'}(t) \Delta x(t) dt - \\ & - \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[H\left(t, x^0(t), u^0(t) + \Delta u_\varepsilon(t), v^0(t), \psi^0(t)\right) - H\left(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)\right)\right] dt - \\ & - \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[H'_x\left(t, x^0(t), u^0(t) + \Delta u_\varepsilon(t), v^0(t), \psi^0(t)\right) - H'_x\left(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)\right)\right]' \Delta x_\varepsilon(t) dt + \\ & + \int\limits_{t_0}^{t_1} o_1\left(\left\|\Delta x_\varepsilon(t)\right\|\right) dt \ge 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Из оценки (11) следует, что

$\left\|\Delta x_\varepsilon(t)\right\| \le L_3 \varepsilon, \ t \in T$ (17)

где $L_3 = const > 0$ некоторая постоянная.

Из неравенства (16) применяя теорему о среднем и учитывая формулы (15) и (17) получим, что

$$-\varepsilon\left[H\left(\theta, x^0(\theta), u, v^0(\theta), \psi^0(\theta)\right) - H\left(\theta, x^0(\theta), u^0(\theta), v^0(\theta), \psi^0(\theta)\right)\right] + o_2(\varepsilon) \geq 0$$

Следовательно, в силу произвольности $\varepsilon > 0$

$$H\left(\theta, x^0(\theta), u, v^0(\theta), \psi^0(\theta)\right) - H\left(\theta, x^0(\theta), u^0(\theta), v^0(\theta), \psi^0(\theta)\right) \leq 0 \quad (18)$$

Теперь полагая $\Delta u(t) = 0$, специальное приращение управляющей функции $v^0(t)$ определим по формуле

$$\Delta v_\mu(t) = \begin{cases} v - v^0(t), \ t \in (\xi, \xi + \mu), \\ 0, \ t \in T \setminus [\xi, \xi + \mu). \end{cases} \quad (19)$$

Здесь $\mu > 0$ достаточно малое произвольное число, $v \in V$ произвольный вектор, а $\xi \in [t_0; t_1)$ произвольная точка непрерывности управления $v^0(t)$.

Через $\Delta x_\mu(t)$обозначим специальное приращение траектории $x^0(t)$ отвечающее приращению (19) управления $v^0(t)$.

Из оценки (11) следует, что $\left\|\Delta x_\mu(t)\right\|$ имеет порядок малости μ. Поэтому с учетом также (19) из неравенства (14) получим, что

$$J\left(u^0, v^0 + \Delta v_\mu\right) - J\left(u^0, v^0\right) =$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1} \left[H\left(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t) + \Delta\Delta v_\mu, \psi^0(t)\right) - H\left(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)\right)\right] dt + o_3(\mu) =$$

$$-\mu\left[H\left(\xi, x^0(\xi), u^0(\xi), v, \psi^0(\xi)\right) - H\left(\xi, x^0(\xi), u^0(\xi), v^0(\xi), \psi^0(\xi)\right)\right] + o_4(\mu) \leq 0$$

Отсюда в силу произвольности $\mu > 0$ получим, что

$$H\left(\theta, x^0(\theta), u^0(\theta), v, \psi^0(\theta)\right) - H\left(\theta, x^0(\theta), u^0(\theta), v^0(\theta), \psi^0(\theta)\right) \geq 0 \quad (20)$$

Принимая во внимания неравенства (18) и (20) приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. *Для того чтобы совокупность* $\left(u^0(t), v^0(t)\right)$ *являлось седловой точкой* функционала (3) в рассматриваемой задаче нелбходимо, чтобы неравенства

$$H\left(\theta, x^0(\theta), u, v^0(\theta), \psi^0(\theta)\right) - H\left(\theta, x^0(\theta), u^0(\theta), v^0(\theta), \psi^0(\theta)\right) \leq 0$$

$$H\left(\theta, x^0(\theta), u^0(\theta), v, \psi^0(\theta)\right) - H\left(\theta, x^0(\theta), u^0(\theta), v^0(\theta), \psi^0(\theta)\right) \geq 0$$

выполнялось для всех $\theta \in [t_0; t_1)$, $u \in U$ и $\xi \in [t_0; t_1)$, $v \in V$ соответственно.

4. *Линеаризованное необходимое условие оптимальности.* Пусть в рассматриваемой задаче множество U выпуклое, а $f(t, x, u, v)$ и $F(t, x, u, v)$ имеют непрерывные производные также по (u, v).

Из формулы приращения (7), предполагая что $\psi^0(t)$ является решением сопряженного уравнения (9), получим, что

$$J(\bar{u},\bar{v})-J(u,v)=-\int_{t_0}^{t_1}\left[H_u'\left(t,\ x^0(t),u^0(t),v^0(t),\psi^0(t)\right)\Delta u(t)+H_v'\left(t,x^0(t),u^0(t),v^0(t),\psi^0(t)\right)\Delta v(t)\right]dt- \tag{21}$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}o_2\left(\|\Delta x(t)\|+\|\Delta u(t)\|+\|\Delta v(t)\|\right)dt$$

Пусть $(u^0(t),v^0(t))$ седловая точка рассматриваемого функционала, а $\Delta v(t)=0$.

Положим

$\Delta u(t;\varepsilon)=\varepsilon\left[u(t)-u^0(t)\right], t\in T$ (22)

Здесь $\varepsilon\in[0;1]$ произвольное число, а $u(t),\ t\in T$ произвольное допустимое управление.

Учитывая оценку (12) и формулу (22) из формулы приращения (21) получим, что

$$J\left(u^0(t)+\Delta u(t;\varepsilon),v^0(t)\right)-J\left(u^0(t),v^0(t)\right)=$$
$$=-\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}H_u'\left(t,\ x^0(t),u^0(t),v^0(t),\psi^0(t)\right)\left(u(t)-u^0(t)\right)dt+o(\varepsilon)\geq 0$$

Следовательно

$$\int_{t_0}^{t_1}H_u'\left(t,\ x^0(t),u^0(t),v^0(t),\psi^0(t)\right)\left(u(t)-u^0(t)\right)dt\leq 0 \quad (23)$$

Если полагать $\Delta u(t)=0$, а специальное приращение управляющей функции $v^0(t)$ определить по формуле

$\Delta u(t;\mu)=\mu\left[v(t)-v^0(t)\right], t\in T$,

где $\mu\in[0;1]$ - произвольное число, а $v(t)$- произвольное допустимое управление, то после некоторых преобразований, из формулы приращения (21) функционала качества получим, что

$$J\left(u^0(t),v^0(t)+\Delta v(t;\mu)\right)-J\left(u^0(t),v^0(t)\right)=$$
$$=-\mu\int_{t_0}^{t_1}H_v'\left(t,\ x^0(t),u^0(t),v^0(t),\psi^0(t)\right)\left(v(t)-v^0(t)\right)dt+o(\mu)\leq 0$$

Следовательно

$$\int_{t_0}^{t_1}H_v'\left(t,\ x^0(t),u^0(t),v^0(t),\psi^0(t)\right)\left(v(t)-v^0(t)\right)dt0\geq 0 \quad (24)$$

Неравенства (23) и (24) также являются необходимыми условиями существования седловой точки функционала (3).

Теорема 2. Если множества U и V выпуклы, то для того чтобы совокупность $(u^0(t),v^0(t))$ было седловой точкой функционала (3) необходимо, чтобы неравенства

$$\int_{t_0}^{t_1} H_u'\left(t,\, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)\right)\left(u(t) - u^0(t)\right)dt \le 0,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} H_v'\left(t,\, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)\right)\left(v(t) - v^0(t)\right)dt \ge 0,$$

выполнялось для всех $u(t) \in U,\, t \in T$ и $v(t) \in V,\, t \in T$ соответственно.

5. Аналог уравнения Эйлера. Предположим, что множества U и V являются открытыми. Пусть $\delta u(t) \in R^r,\, t \in T$ и $\delta v(t) \in R^q,\, t \in T$ произвольные кусочно-непрерывные и ограниченные вектор-функции.

В силу сделанных предположений специальное приращение допустимого управления $\left(u^0(t), v^0(t)\right)$ можно определить по формуле

$$\begin{cases} \Delta u_\varepsilon(t) = \varepsilon\, \delta u(t),\ t \in T, \\ \Delta v_\mu(t) = \mu\, \delta u(t),\ t \in T. \end{cases} \quad (25)$$

Здесь ε и μ произвольные достаточные малые по абсолютной величине числа.

Через $\Delta x_{\varepsilon\mu}(t)$ обозначим специальное приращение траектории $x(t)$, соответствующее приращению (25) управления $\left(u^0(t), v^0(t)\right)$. Тогда из оценки (12) получаем, что

$$\left\|\Delta x_{\varepsilon\mu}(t)\right\| \le L_3\left[\varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \left\|\delta u(t)\right\| dt + \mu \int_{t_0}^{t_1} \left\|\delta v(t)\right\| dt\right] \quad (26)$$

где $L_3 = const > 0$.

Принимая во внимания формулы (25) и (26), из формулы приращения (21) получаем, что

$$\begin{aligned} &J\left(u^0(t) + \varepsilon\, \delta u(t), v^0(t) + \mu\, \delta u(t)\right) - J\left(u^0(t), v^0(t)\right) = \\ &= -\varepsilon \int_{t_0}^{t_1} H_u'\left(t,\, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)\right)\delta u(t) \delta v(t) dt - \\ &- \mu \int_{t_0}^{t_1} H_v'\left(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)\right)\delta v(t) dt + o(|\varepsilon| + |\mu|). \end{aligned} \quad (27)$$

Из разложения (27) следует, что если $\left(u^0(t), v^0(t)\right)$ является седловой точкой функционала (3), то для всех допускающих вариаций $\delta u(t)$ и $\delta v(t)$ управления $\left(u^0(t), v^0(t)\right)$ соответственно, выполняются соотношения

$$\int_{t_0}^{t_1} H_u'\left(t,\, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)\right)\delta u(t) dt = 0, \quad (28)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} H_v'\left(t,\, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)\right)\delta v(t) dt = 0. \quad (29)$$

Соотношения (28), (29) являются неявными необходимыми условиями оптимальности. Но используя произвольность вариаций $\delta u(t)$ и $\delta v(t)$ можно получить необходимое условие оптимальности, явно выраженное через параметры рассматриваемой задачи.

Имеет место

Теорема 3. *Для того чтобы допустимое управление* $(u^0(t), v^0(t))$ *было седловой точкой управления* $(u^0(t), v^0(t))$*, в случае открытости области управления, необходимо, чтобы для всех* $\theta \in [t_0; t_1)$*выполнялись соотношения*

$$H(\theta, x^0(\theta), u^0(\theta), v^0(\theta), \psi^0(\theta)) = 0,$$

$$H(\theta, x^0(\theta), u^0(\theta), v^0(\theta), \psi^0(\theta)) = 0.$$

Эти соотношения являются аналогами уравнения Эйлера для рассматриваемой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965, 476 с.
2. Васильева А.Б., Тихонов А.Н. Интегральные уравнения. М. Изд-во МГУ, 1989, 256 с.
3. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М. Наука, 1982, 304 с.
4. Винокуров В.Р. Оптимальное управление процессами, описываемыми интегральными уравнениями // Изв. Вузов, математика. 1987, № 8, с. 16-23.
5. Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Управление системами с последействием. М. Наука, 1982, 120 с.
6. Абдуллаев А.А. Об условиях оптимальности в одной задаче управления типа Вольтерра // Изв. НАН Азербайджана, Сер. физ.-техн. и матем. наук, 2005, № 2, с. 123-128.
7. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М. Физматлит., 2005, 430 с.

2021. Volume 5, Number 2 *Pages 60-68*

UOT:517.98

FEKETE-SZEG*ö* PROBLEM FOR A CLASS OF STARLIKE AND CONVEX FUNCTIONS INVOLVING HADAMARD PRODUCT OF CERTAIN ANALYTIC MULTIPLIER TRANSFORM

[1]DEBORAH OLUFUNMIALYO MAKINDE [2] O.K. AGUNLOYE

[3] T.O. OPOOLA

[1,2] Department of Mathematics, Obafemi Awolowo University,

Ile-Ife, Nigeria.

[3] Department of Mathematics, University of Ilorin,

Ilorin, Nigeria.

funmideb@yahoo.com

k.agunloye@yahoo.com

opoola_stc@yahoo.com

ABSTRACT

For the linear transformation $D^s_{\alpha,\beta,\gamma}f$ of the normalized analytic function f of the form $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \ldots$, we study the coefficient estimates and solved the Fekete-Szegö problem for the hadarmad product of the subclasses $HS_n(b)$ and $HS^c_n(b)$ of the analytic normalized univalent functions using comparison method and Cauchy Schwartz inequality.

Keywords: Analytic, univalent, starlike, linear transformation, coefficient estimates, Fekete-Szegö inequality.

MSC[2010]: 30C45

FEKETE-SZEGo¨MÜƏYYƏN ANALİTİK ÇATAN TRANSFORMASININ HADAMARD MƏHSULU İLƏ OLUNAN ULDUZBƏZİ VƏ QABAR FUNKSİYALAR SİNFİ ÜÇÜN PROBLEM

XÜLASƏ

f(z)=z+a_2 z^2+a_3 z^3+... şəklindəki normallaşdırılmış f analitik funksiyasının D_(α,β,γ)^s f xətti çevrilməsi üçün əmsalın təxminlərini öyrənirik və müqayisə üsulundan və Koşi Şvarts bərabərsizliyindən istifadə etməklə analitik normallaşdırılmış univalent funksiyaların HS_n (b) və HS_n^c (b) yarımsiniflərinin hadarmad hasilinin Fekete-Szeqo¨problemini həll edir.

Açar sözlər: Analitik, birvalent, ulduz kimi, xətti çevrilmə, əmsal təxminləri, Fekete-Szeqo¨bərabərsizliyi.

1 Introduction and Preliminaries

For the normalized analytic function f of the form:

$$f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \ldots, a_n \in C(1)$$

in the unit disk $U = \{z: |z| < 1\}$, Fekete and Szegö [7], proved that,

$$\left|a_3 - \lambda a_2^{2i}\right| \leq 1 + 2e^{-\frac{2\lambda}{1-\lambda}}, 0 < \lambda \leq 1. \qquad (2)$$

and for the Schwarzian derivative S_f given by

$$S_f = \left(\frac{f''}{f}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2, (3)$$

simple calculation shows that the coefficient functional

$\phi_f(\lambda) = a_3 - \lambda a_2^{2i}$ is related to the Schwarzian derivative by

$$\phi_f(\lambda) = a_3 - \lambda a_2^{2i} = \frac{1}{6}\left(f'''(0) - \frac{3\lambda}{2}(f''(0))^2\right)$$

on normalized analytic functions f in the unit disk.

Kanas and Darwish [8] remarked that, when $\lambda = 1$, $\phi_f = a_3 - a_2^{2i}$, becomes $\frac{S_f(0)}{6}$, where S_f denotes the Schwarzian derivative given in equation (3) and that if we consider the nth root transformation

$$(f(z^n))^{\frac{1}{n}} = z + c_{n+1}z^{n+1} + c_{2n+1}z^{2n+1} + \ldots$$

of the function in equation (1), then $c_{n+1} = \frac{a_2}{2}$ and $c_{2n+1} = \frac{a_3}{n} + \frac{(1-n)a_2^{2i}}{2n^2}$, so that

$$a_3 - \lambda a_2^{2i} = n(c_{2n+1} - \mu c_{n+1}^2)$$

where $\mu = \lambda n + (n-1)/2$.

Several authors have discussed the nature of $\phi_f(\lambda)$ for the normalized univalent functions in the unit disk (see ,[3],[4],[5],[6], [7], [8], [9]). Authors in [1], [2], [10], [11], [12], [13], [19] and [20] also solved Fekete-szegö inequality for classes of normalized analytic functions.This is known as Fekete-Szegö problem.

Now, we denote by S, the set of all functions of the form (1) that are normalized analytic and univalent in the unit disk

$U = \{z: |z| < 1\}$. Let $S^*(\alpha), S^c(\alpha)$ be the classes of starlike and convex univalent function of order α, of the form:

$$S^* = \left\{f \in S: \mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \beta, , 0 \leq \beta < 1, z \in U\right\} \quad (4)$$

$$S^* = \left\{f \in S: \mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \beta, , 0 \leq \beta < 1, z \in U\right\} \quad (5)$$

Several researchers have generalized the notions of $\alpha -$ starlikeness and $\alpha -$convexity onto a complex order α see [14], [16], [17] for example. When $\beta = 0$ in equations (4) and (5), what is obtained is the starlike, respectively, convex functions with respect to the origin. With the aid of Ruscheweyh derivative, Kumar et al [15] introduced the class $S_n(b)$ of functions $f \in S$ as follows:

Definition 1 *Let b be a nonzero complex number, and let f be a univalent function of the form (1), $z \in U$. We say that f belongs to $S_n(b)$ if*

$$Re\left\{1 + \frac{1}{b}\left(\frac{z(D^n f)'(z)}{D^n f(z)} - 1\right)\right\} > 0 \quad (6)$$

Moreover, the author in [16] defined a linear transformation $D^s_{\alpha,\beta,\gamma}f$ by

$$D^s_{\alpha,\beta,\gamma}f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\alpha+n\beta+n^2\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^s a_n^i z^n, \beta, \gamma \geq 0; \alpha \geq 1; s \in \mathbb{N} \cup 0, i(1 \leq i \leq k), \quad (7)$$

where $k \in \mathbb{N}$,

and Makinde et al, in [17], [18] studied the Fekete-Szego problems for starlike, convex functions, respectively for normalized analytic and univalent functions of the form (1). Furthermore, for

$D^s_{\alpha,\beta,\gamma}f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\alpha+n\beta+n^2\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^s a^i_n z^n$ and $D^s_{\alpha,\beta,\gamma}g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\alpha+n\beta+n^2\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^s d^i_n z^n$, we define the hadamard product $H^n(z)$ of $D^s_{\alpha,\beta,\gamma}f(z)$ and $D^s_{\alpha,\beta,\gamma}g(z)$ by

$$H^n(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\alpha+n\beta+n^2\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^{2s} a^i_n d^i_n z^n, \beta,\gamma \geq 0; \alpha \geq 1; s \in \mathbb{N} \cup 0, i(1 \leq i \leq k)\ k \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Motivated by the work of Kanas and Darwish,and Makinde et al in [8], [17] and [18], we study the coefficient estimates and solved the Fekete-Szegö problem for the hadarmad product of the subclasses $HS_n(b)$ and $HS^c_n(b)$ of the analytic normalized univalent functions using comparison method and Cauchy Schwartz inequality. Now, we give the follwing definitions

Definition 2 *Let b be a nonzero complex number, and f a normalized analytic univalent function of the form (1). We say that f belongs to $HS_n(b)$, respectively, $HS^c_n(b)$ if*

$$Re\left\{1 + \frac{1}{b}\left(\frac{z(H^n)'(z)}{H^n(z)} - 1\right)\right\} > 0, z \in U, \quad (9)$$

respectively,

$$Re\left\{1 + \frac{1}{b}\left(\frac{z(H^n)''(z)}{(H^n)'(z)}\right)\right\} > 0, z \in U, \quad (10)$$

The following results shall be employed in the proof of the main results of this study.

Lemma 1 *[19] Let P be the class of analytic functions in U with $p(0) = 1$, $Re\, p(z) > 0$ and of the form*

$$p(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots, \quad (11)$$

then

$$|c_n| \leq 2, n \geq 1.$$

If $|c_1| = 2$, then $p(z) \equiv p_1 = \frac{(1+\gamma_1 z)}{(1-\gamma_1 z)}$ with $\gamma_1 = \frac{c_1}{2}$. Conversely, if $p(z) \equiv p_1$ for some $\gamma_1 = 1$, then $c_1 = 2\gamma_1$ and $|c_1| = 2$. Furthermore, we have

$$\left|c_2 - \frac{c_1^2}{2}\right| \leq 2 - \frac{|c_1|^2}{2}.$$

If $|c_1| < 2$ and $\left|c_2 - \frac{c_1^2}{2}\right| = 2 - \frac{|c_1|^2}{2}$, then $p(z) \equiv p_2$, where

$$p_2(z) = \frac{1 + z\frac{\gamma_2 z + \gamma_1}{1+\gamma_1\gamma_2 z}}{1 - z\frac{\gamma_2 z + \gamma_1}{1+\gamma_1\gamma_2 z}}$$

and $\gamma_1 = \frac{c_1}{2}$, $\gamma_2 = \frac{2c_2 - c_1^2}{4-|c_1|^2}$. Conversely, if $p(z) = p_2$ for some $\gamma_1 < 1$ and $\gamma_2 = 1$, then $\gamma_1 = \frac{c_1}{2}$, $\gamma_2 = \frac{2c_2 - c_1^2}{4-|c_1|^2}$ and $\left|c_2 - \frac{c_1^2}{2}\right| = 2 - \frac{|c_1|^2}{2}$.

Lemma 2 *[17] Let $n \geq 0$ and b a non-zero complex number. If f of the form (1) is in $S_n(b)$, then*

$$|a_2^i| \leq 2|b|\left(\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha+2\beta+4\gamma)}\right)^s$$

and

$$|a_3^i| \leq |b|\left(\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha+3\beta+9\gamma)}\right)^s \max[1, |1+2b|], \beta, \gamma \geq 0; \alpha \geq 1; s \in \mathbb{N} \cup 0, i(1 \leq i \leq k).$$

Lemma 3 *[17] Let $n \geq 0$ and b a non-zero complex number. If f of the form (1) is in $S_n^c(b)$, then*

$$|a_2^i| \leq |b|\left(\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha+2\beta+4\gamma)}\right)^s$$

and

$$|a_3^i| \leq \frac{|b|}{3}\left(\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha+3\beta+9\gamma)}\right)^s \max[1, |1+2b|], \beta, \gamma \geq 0; \alpha \geq 1; s \in \mathbb{N} \cup 0, 1 \leq i \leq k.$$

Lemma 4 *[18] Let b be a nonzero complex number and $f \in S_n(b)$. Then for $\mu \in \mathbb{C}$, the following holds.*

$$\left|a_3^i - \mu a_2^{2i}\right| \leq b\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha+3\beta+9\gamma}\right)^s \max\left\{1, \left|1+2b-2b\mu\frac{(\alpha+3\beta+9\gamma)^s}{(\alpha+2\beta+4\gamma)^{2s}}\right|\right\}$$

Lemma 5 *[18] Let b be a nonzero complex number and $f \in S_n^c(b)$. Then, for $\mu \in \mathbb{C}$, the following holds.*

$$\left|a_3^i - \mu a_2^{2i}\right| \leq \frac{1}{3}t_3^{-s}|b|\max\left\{1, \left|1+2b-3b\mu t_2^{-s}\frac{(\alpha+3\beta+9\gamma)^s}{(\alpha+2\beta+4\gamma)^{2s}}\right|\right\}$$

In what follows, we give the statement and proof of the results of this study.

2 Coefficient estimates for $HS_n(b)$ and $HS_n^c(b)$

Theorem 1 *Let b, λ be non-zero complex numbers and $D_{\alpha,\beta,\gamma}^s f$ of the form $D_{\alpha,\beta,\gamma}^s f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\alpha+n\beta+n^2\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^s a_n^i z^n$ is in $S_n(b)$ and $D_{\alpha,\beta,\gamma}^s g$ of the form $D_{\alpha,\beta,\gamma}^s g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\alpha+n\beta+n^2\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^s d_n^i z^n$ is in $S_n^(b)$. If $H^n \in HS_n(\lambda)$, then*

$$|a_2^i d_2^i| \leq 2|\lambda|\left(\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha+2\beta+4\gamma)}\right)^{2s}, \lambda \geq 2|b|^2$$

and

$$|a_3^i d_3^i| \leq |\lambda|\left(\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha+3\beta+9\gamma)}\right)^{2s} \max[1, |1+2\lambda|], \beta, \gamma \geq 0; \alpha \geq 1; s \in \mathbb{N} \cup 0, 1 \leq i \leq k.$$

where $|\lambda|\max[1, |1+2\lambda|] \geq |b|^2\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha+3\beta+9\gamma}\right)^{2s}\{\max[1, |1+2b|]\}^2$

Proof 1 *Firstly, let $D_{\alpha,\beta,\gamma}^s f \in S_n(b)$ and $D_{\alpha,\beta,\gamma}^s g \in S_n(b)$, then by lemma 2,*

$$|a_2^i| \leq 2|b|\left(\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha+2\beta+4\gamma)}\right)^s \qquad (12)$$

and

$$|d_2^i| \leq 2|b|\left(\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha+2\beta+4\gamma)}\right)^s \qquad (13)$$

we need to find a smallest λ such that

$$\frac{|a_2^i d_2^i|\left(\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha+2\beta+4\gamma)}\right)^{2s}}{2|\lambda|} \leq 1(14)$$

From inequalities (12) and (13), using Cuachy Schwartz inequality, we have

$$\frac{\sqrt{|a_2^i d_2^i|}\left(\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha+2\beta+4\gamma)}\right)^{2s}}{2|b|} \leq 1 \qquad (15)$$

It suffices to show that

$$\frac{|a_2^i d_2^i|\left(\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha+2\beta+4\gamma)}\right)^{2s}}{2|\lambda|} \leq \frac{\sqrt{|a_2^i d_2^i|}\left(\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha+2\beta+4\gamma)}\right)^{2s}}{2|b|} \qquad (16)$$

from inequality (16), we have

$$\sqrt{|a_2^i d_2^i|}\left(\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha+2\beta+4\gamma)}\right)^{2s} \leq \frac{|\lambda|}{|b|} \qquad (17)$$

from inequality (15), we have

$$\sqrt{|a_2^i d_2^i|}\left(\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha+2\beta+4\gamma)}\right)^{2s} \leq 2|b| \qquad (18)$$

Using inequalities (17) and (18), we have

$$2|b| \leq \frac{|\lambda|}{|b|} \qquad (19)$$

and the inequality (19) implies that

$$|\lambda| \geq 2|b|^2$$

and this completes the first part of the theorem.

Secondly,

Let $D^s_{\alpha,\beta,\gamma}f \in S_n(b)$ and $D^s_{\alpha,\beta,\gamma}g \in S_n(b)$, then by lemma 2

$$|a_3^i| \leq |b|\left(\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha+3\beta+9\gamma)}\right)^s \max[1,|1+2b|], \beta,\gamma \geq 0; \alpha \geq 1; s \in \mathbb{N}\cup 0, i(1 \leq i \leq k), \quad (20)$$

and

$$|d_3^i| \leq |b|\left(\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha+3\beta+9\gamma)}\right)^s \max[1,|1+2b|], \beta,\gamma \geq 0; \alpha \geq 1; s \in \mathbb{N}\cup 0, i(1 \leq i \leq k). \quad (21)$$

we need to find a smallest λ such that

$$|a_3 i d_3^i| \leq |\lambda|\left(\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha+3\beta+9\gamma)}\right)^{2s} \max[1,|1+2\lambda|], \beta,\gamma \geq 0; \alpha \geq 1; s \in \mathbb{N}\cup 0, i(1 \leq i \leq k).$$

From inequalities (20) and (21), using Cuachy Schwartz inequality, we have

$$\frac{\sqrt{|a_3^i d_3^i|}(\alpha+3\beta+9\gamma)^{2s}}{(\alpha+\beta+\gamma)^{2s}|b|\max[1,|1+2b|]} \leq 1 \qquad (22)$$

It suffices to show that

$$\frac{(\alpha+3\beta+9\gamma)^{2s}|a_3^i d_3^i|}{(\alpha+\beta+\gamma)^{2s}|\lambda|\max[1,|1+2\lambda|]} \leq \frac{(\alpha+3\beta+9\gamma)^{2s}\sqrt{|a_3^i d_3^i|}}{(\alpha+\beta+\gamma)^{2s}|b|\max[1,|1+2b|]} \quad (23)$$

From inequality (23), we have

$$\sqrt{|a_3^i d_3^i|} \leq \frac{|\lambda|\max[1,|1+2\lambda|]}{|b|\max[1,|1+2b|]} \qquad (24)$$

From inequality (22), we have

$$\sqrt{|a_3^i d_3^i|} \leq \frac{(\alpha+\beta+\gamma)^{2s}|b|\max[1,|1+2b|]}{(\alpha+3\beta+9\gamma)^{2s}} \quad (25)$$

Using inequalities (24) and (25), we have

$$\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^{2s}|b|\max[1,|1+2b|]}{(\alpha+3\beta+9\gamma)^{2s}} \leq \frac{|\lambda|\max[1,|1+2\lambda|]}{|b|\max[1,|1+2b|]} \qquad (26)$$

Calculations in inequality (26) shows that

$$\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^{2s}|b|^2\{\max[1,|1+2b|]\}^2}{(\alpha+3\beta+9\gamma)^{2s}} \leq |\lambda|\max[1,|1+2\lambda|]$$

and this completes the proof of Theorem 1.

Theorem 2 *Let b, λ be non-zero complex numbers and $D^s_{\alpha,\beta,\gamma}f$ of the form $D^s_{\alpha,\beta,\gamma}f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\alpha+n\beta+n^2\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^s a_n^i z^n$ is in $S_n^c(b)$ and $D^s_{\alpha,\beta,\gamma}g$ of the form $D^s_{\alpha,\beta,\gamma}g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\alpha+n\beta+n^2\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^s d_n^i z^n$ is in $S_n^c(b)$. If $H \in HS_n^c(\lambda)$, then*

$$|a_2^i d_2^i| \leq |\lambda|\left(\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha+2\beta+4\gamma)}\right)^{2s}, \lambda \geq |b|^2$$

and

$$|a_3^i d_3^i| \leq \frac{|\lambda|}{3}\left(\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha+3\beta+9\gamma)}\right)^{2s}\max[1,|1+2\lambda|], \beta,\gamma \geq 0; \alpha \geq 1; s \in \mathbb{N}\cup 0, 1 \leq i \leq k.$$

where $|\lambda|\max[1,|1+2\lambda|] \geq |b|^2\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha+3\beta+9\gamma}\right)^{2s}\{\max[1,|1+2b|]\}^2$

Proof 2 *Firstly, let $D^s_{\alpha,\beta,\gamma}f \in S_n(b)$ and $D^s_{\alpha,\beta,\gamma}g \in S_n(b)$, then by lemma 3*

$$|a_2^i| \leq |b|\left(\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha+2\beta+4\gamma)}\right)^s \qquad (27)$$

and

$$|d_2^i| \leq |b|\left(\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha+2\beta+4\gamma)}\right)^s \qquad (28)$$

we need to find a smallest λ such that

$$\frac{|a_2^i d_2^i|\left(\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha+2\beta+4\gamma)}\right)^{2s}}{|\lambda|} \leq 1 (29)$$

Following the proof of the first part of the Theorem 1, we obtaing the first part the result.

Secondly, let $D^s_{\alpha,\beta,\gamma}f \in S_n(b)$ and $D^s_{\alpha,\beta,\gamma}g \in S_n(b)$, then by lemma 3

$$|a_3^i| \leq \frac{|b|}{3}\left(\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha+3\beta+9\gamma)}\right)^s \max[1,|1+2b|], \beta,\gamma \geq 0; \alpha \geq 1; s \in \mathbb{N}\cup 0, 1 \leq i \leq k. \quad (30)$$

$$|d_3^i| \leq \frac{|b|}{3}\left(\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha+3\beta+9\gamma)}\right)^s \max[1,|1+2b|], \beta,\gamma \geq 0; \alpha \geq 1; s \in \mathbb{N}\cup 0, 1 \leq i \leq k. \qquad (31)$$

we need to find a smallest λ such that

$$|a_3^i d_3^i| \leq \frac{|\lambda|}{3}\left(\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha+3\beta+9\gamma)}\right)^{2s} \max[1, |1+2\lambda|], \beta, \gamma \geq 0; \alpha \geq 1; s \in \mathbb{N} \cup 0, 1 \leq i \leq k. \quad (32)$$

Following the proof of the second part of the Theorem 1, we obtaing the second part the result and this completes the proof of Theorem 2.

3 The Fekete-Szegö problem for the subclasses $HS_n(b)$ and $HS_n^c(b)$

Theorem 3 *Let b, λ be non-zero complex numbers and $D_{\alpha,\beta,\gamma}^s f$ of the form $D_{\alpha,\beta,\gamma}^s f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\alpha+n\beta+n^2\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^s a_n^i z^n$ is in $S_n^c(b)$ and $D_{\alpha,\beta,\gamma}^s g$ of the form $D_{\alpha,\beta,\gamma}^s g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\alpha+n\beta+n^2\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^s d_n^i z^n$ is in $S_n^c(b)$. If $H^n \in HS_n(\lambda)$, then*

$$\left|A_3^i - \mu A_2^{2i}\right| \leq |\lambda|^2 \left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha+3\beta+9\gamma}\right)^s \max\left\{1, \left|1+2\lambda-2\lambda\mu\frac{(\alpha+3\beta+9\gamma)^s}{(\alpha+2\beta+4\gamma)^{2s}}\right|\right\}^2$$

where $A_3^i = a_3^i d_3^i$ and $A_2^i = a_2^i d_2^i$ and
$\lambda \geq 2|b|^2, |\lambda|\max[1, |1+2\lambda|] \geq |b|^2\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha+3\beta+9\gamma}\right)^s \{\max[1, |1+2b|]\}^2$

Proof 3 *Let $D_{\alpha,\beta,\gamma}^s f \in S_n(b)$ and $D_{\alpha,\beta,\gamma}^s g \in S_n(b)$, then by lemma 4, we have*

$$\left|a_3^i - \mu a_2^{2i}\right| \leq b\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha+3\beta+9\gamma}\right)^s \max\left\{1, \left|1+2b-2b\mu\frac{(\alpha+3\beta+9\gamma)^s}{(\alpha+2\beta+4\gamma)^{2s}}\right|\right\} \quad (33)$$

and

$$\left|d_3^i - \mu d_2^{2i}\right| \leq |b|\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha+3\beta+9\gamma}\right)^s \max\left\{1, \left|1+2b-2b\mu\frac{(\alpha+3\beta+9\gamma)^s}{(\alpha+2\beta+4\gamma)^{2s}}\right|\right\} \quad (34)$$

From inequalities (33) and (34), we have

$$\left|a_3^i - \mu a_2^{2i}\right|\left|d_3^i - \mu d_2^{2i}\right| \leq \left[|b|\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha+3\beta+9\gamma}\right)^s \max\left\{1, \left|1+2b-2b\mu\frac{(\alpha+3\beta+9\gamma)^s}{(\alpha+2\beta+4\gamma)^{2s}}\right|\right\}\right]^2$$

$$= |b|^2\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha+3\beta+9\gamma}\right)^{2s}\left[\max\left\{1, \left|1+2b-2b\mu\frac{(\alpha+3\beta+9\gamma)^s}{(\alpha+2\beta+4\gamma)^{2s}}\right|\right\}\right]^2 \quad (35)$$

But,

$$\begin{aligned}
&\left|a_3^i - \mu a_2^{2i}\right|\left|d_3^i - \mu d_2^{2i}\right| = \left|(a_3^i - \mu a_2^{2i})(d_3^i - \mu d_2^{2i})\right| \\
&= \left|a_3^i d_3^i - \mu^2 a_2^{2i} d_2^{2i} - \mu\left(a_3^i d_2^{2i} + a_2^{2i} d_3^i\right)\right| \\
&\leq \left|a_3^i d_3^i - \mu^2 a_2^{2i} d_2^{2i}\right| \\
&\leq \left|a_3^i d_3^i - \mu a_2^{2i} d_2^{2i}\right|
\end{aligned}$$

Thus we have

$$\left|a_3^i - \mu a_2^{2i}\right|\left|d_3^i - \mu d_2^{2i}\right| \leq \left|a_3^i d_3^i - \mu a_2^{2i} d_2^{2i}\right| \quad (36)$$

Using Eqns. (35) and (36), we have

$$|b|^2\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha+3\beta+9\gamma}\right)^{2s} X \leq \left|a_3^i d_3^i - \mu a_2^{2i} d_2^{2i}\right| \leq |\lambda|^2\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha+3\beta+9\gamma}\right)^{2s} Y \quad (37)$$

where

$$X = \left[\max\left\{1, \left|1+2b-2b\mu\frac{(\alpha+3\beta+9\gamma)^s}{(\alpha+2\beta+4\gamma)^{2s}}\right|\right\}\right]^2 \quad \text{and} \quad Y = \left[\max\left\{1, \left|1+2\lambda-2\lambda\mu\frac{(\alpha+3\beta+9\gamma)^s}{(\alpha+2\beta+4\gamma)^{2s}}\right|\right\}\right]^2$$

This completes the proof of the Theorem 3.

Theorem 4 *Let b, λ be non-zero complex numbers and $D_{\alpha,\beta,\gamma}^s f$ of the form $D_{\alpha,\beta,\gamma}^s f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\alpha+n\beta+n^2\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^s a_n^i z^n$ is in $S_n^c(b)$ and $D_{\alpha,\beta,\gamma}^s g$ of the form*

$D^s_{\alpha,\beta,\gamma}g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\alpha+n\beta+n^2\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^s d_n^i z^n$ *is in* $S_n^c(b)$. *If* $H^n \in HS^c(b)$. *Then, for* $\mu \in \mathbb{C}$, *the following holds.*

$$\left|A_3^i - \mu A_2^{2i}\right| \le \frac{1}{3}t_3^{-s}|\lambda|\max\left\{1, \left|1 + 2\lambda - 3\lambda\mu t_2^{-s}\frac{(\alpha+3\beta+9\gamma)^s}{(\alpha+2\beta+4\gamma)^{2s}}\right|\right\}^2$$

where $A_3^i = a_3^i d_3^i$ and $A_2^i = a_2^i d_2^i$ and

$\lambda \ge 2|b|^2, |\lambda|\max[1, |1 + 2\lambda|] \ge |b|^2\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha+3\beta+9\gamma}\right)^s \{\max[1, |1 + 2b|]\}^2$

Proof 4 *Using lemma 5 and following the procedure of the proof of the Theorem 3, we have result.*

4 Conclusion

The result in this paper shows that the Hadamard product of the linear transformation Eqn. (7) in the subclasses in Eqns. (9) and (10) give finer results. It will also be interesting to check the effect of the linear transformation given in Eqn. (7) on other subclasses of normalized analytic functions.

REFERENCES

1. H.R. Abdel-Gawad, D.K. Thomas, The Fekete-Szegö problem for strongly close-to-convex functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* 114 (1992) 345-349.
2. H.S. Al-Amiri, Certain generalization of prestarlike functions, *J. Aust. Math. Soc.* 28 (1979) 325-334.
3. M. K. Aouf, R. M. El-Ashwah, and S.M. El-Deeb, Fekete-Szegö Inequalities for Starlike Functions with respect to k-Symmetric Points of Complex Order,*Journal of Complex Analysis* Volume 2014, Article ID 131475, 10 pages.
4. J.H. Choi, Y.Ch. Kim, T. Sugawa, A general approach to the Fekete-Szegö problem, *J. Math. Soc. Japan* 59 (3) (2007) 707-727.
5. A Chonweerayoot, D.K. Thomas, W. Upakarnitikaset, On the Fekete-Szegö theorem for close-to-convex functions, *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)* 66 (1992) 18-26.
6. M. Darus, D.K. Thomas, On the Fekete-Szegö theorem for close-to-convex functions, *Math. Japonica* 44 (1996) 507-511.
7. M. Fekete, G. Szegö, Eine Bemerkung über ungerade schlichte Funktionen, *J. Lond. Math. Soc.* 8 (1933) 85-89.
8. S. Kanasa, H.E. Darwish, Fekete-Szegö problem for starlike and convex functions of complex order. *Applied Mathematics Letters* 23(2010) 777-782.
9. S. Kanas, A. Lecko, On the Fekete-Szegö problem and the domain convexity for a certain class of univalent functions, *Folia Sci. Univ. Tech. Resov.* 73 (1990) 49-58.
10. F.R. Keogh, E.P. Merkes, A coefficient inequality for certain classes of analytic functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* 20 (1969) 8-12.
11. W. Koepf, On the Fekete-Szegö problem for close-to-convex functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* 101 (1987) 89-95.
12. V. Kumar, S.L. Shukla, A.M. Chaudhary, On a class of certain analytic functions of complex order, *Tamkang J. Math.* 21 (2) (1990) 101-109.
13. R.R. London, Fekete-Szegö inequalities for close-to-convex functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* 117 (1993) 947-950.

[14] W. Ma, D. Minda, A unified treatment of some special classes of univalent functions, in: Z. Li, F. Ren, L. Yang, S. Zhang (Eds.), *Proceeding of Conference on Complex Analytic, Int. Press*, 1994, 157-169.

15. V. Kumar, S.L. Shukla, A.M. Chaudhary, On a class of certain analytic functions of complex order, Tamkang J. Math. 21 (2) (1990) 101-109.
16. D. O. Makinde et al., A generalized multiplier transform on a univalent integral operator. *Journal of Contemporary Applied Mathematics* 9(1), 31-38.
17. D.O. Makinde, A.S. Oyekunle and T.O. Opoola, Fekete-Szegö Estimate for a Class of Starlike functions involving certain analytic multiplier transform, *Journal of Applied Mathematics and Physics* (Accepted)

18. D.O. Makinde, Sh. Najafzadeh and T.O. Opoola, Fekete-Szegö estimate for a class of convex functions involving certain analytic multiplier transform, (Submitted)
19. M.A. Nasr, M.K. Aouf, Starlike function of complex order, *J. Natur. Sci. Math.* 25 (1985) 1-12.
20. M.A. Nasr, M.K. Aouf, On convex functions of complex order, *Mansoura Sci. Bull.* (1982) 565-582.
21. C. Pommerenke, Univalent Functions, in: *Studia Mathematica Mathematische Lehrbucher, Vandenhoeck and Ruprecht*, 1975.
22. P. Wiatrowski, The coefficients of a certain family of holomorphic functions, *Zeszyty Nauk. Uniw. Lodz., Nauki. Mat. Przyrod. Ser.* II (1971) 75-85.

JOURNAL OF BAKU ENGINEERING UNIVERSITY- MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
2021. Volume 5, Number 2 *Pages 69-75*

УДК 517.977.34

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С НЕТИПОВЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

И.Ф.НАГИЕВА

Институт Систем управления НАН Азербайджана

ilaha_21@mail.ru

РЕЗЮМЕ

Рассматривается одна нетиповая задача оптимального управления, описываемая системой интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра.

При различных предположениях доказаны аналоги принципа максимума Понтрягина и линеаризованного интегрального принципа максимума.

Ключевые слова: нетиповая задача оптимального управления, функционал качества, функция Гамильтона-Понтрягина, принцип максимума, линеаризованный принцип максимума, необходимое условие оптимальности, допустимое управление.

ON ONE PROBLEM OF OPTIMAL CONTROL AN INEPAR QUALITY CRITERION

ABSTRACT

İn the paper there is a single inepar problem of optimal control described by the Volterra typeintegro-differential equation.

With different assumptions, the analogues of the Pontryagin's maximum principle and the linearized integral principle of the maximum are obtained.

Keywords: the inepar problem of optimal control, quality functional, the function Hamilton-Pontryagin's, maximum principle, linearized integral principle of maximum, necessary optimality condition, admissible control.

TIPƏ AIDOLMAYANKEYFIYYƏTMEYARLI BIROPTIMALIDARƏETMƏ MƏSƏLƏSIHAQQINDA

XÜLASƏ

Volterra tipli inteqro-diferensial tənliklər sistemi ilə təsvir olunan heçvə bir tipə aid olmayan bir optimal idarəetmə məsələsinə baxılır.

Müxtəlif fərziyyələr daxilində Pontryaginin maksimum prinsipinin və xəttiləşdirilmiş inteqral maksimum prinsipinin analoqları isbat edilmişdir.

Açar sözlər: Tipə aid olmayanoptimal idarəetmə məsələsi, keyfiyyət meyarı, Hamilton-Pontryagin funksiyası, maksimum prinsipi, xəttiləşdirilmiş maksimum prinsipi, optimallıq üçün zəruri şərt, mümkün idarə.

1. Введение.В монографии [1] Н.Н.Моисеев изучил ряд задач оптимального управления, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями и с нетиповым критерием качества, которые возникают при решении различных задач синтеза, а также в ряде прикладных исследований.

В предлагаемой работе аналогичная задача из [1] рассматривается для системы интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. Установлены аналоги принципа максимума Понтрягина и линеаризованного интегрального принципа максимума (см., например, [2, 3]).

2. Постановка задачи.Пусть $T = [t_0, t_1]$ –заданный отрезок, $U \subset R^r$ – заданное непустое и ограниченное множество.

Предположим, что управляемый процесс описывается системой интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)) + \int_{t_0}^{t} K(t, \tau, x(\tau), u(\tau))d\tau, \quad t \in T, \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0. \tag{2}$$

Здесь $f(t, x, u)$,$K(t, \tau, x, u)$– заданные непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по x,n-мерные вектор-функции, x_0 –заданный постоянный вектор, $u(t)$ –r – мерный кусочно-непрерывный (с конечным числом точек разрыва первого рода) вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множестваU, т.е.

$$u(t) = U \subset R^r, \qquad t \in T. \tag{3}$$

Такие управляющие функции назовем допустимыми управлениями.

Предполагается, что каждому допустимому управлению $u(t)$соответствует единственное кусочно-гладкое решение $x(t)$ задачи Коши (1)-(2).

На решениях задачи Коши (1)-(2), порожденных всевозможными допустимыми управлениями определим функционал

$$S(u) = \varphi\big(x(t_1)\big) + \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} F\big(t, s, x(t), x(s)\big)\, ds dt. \tag{4}$$

Здесь $\varphi(x)$ – заданная непрерывно дифференцируемая скалярная функция, а $F(t, s, a, b)$ – заданная, непрерывная по совокупности переменных вместе с F_a и F_b скалярная функция.

Задача заключается в нахождении минимального значения функционала (4) при ограничениях (1)-(3).

Допустимое управление$u(t)$,доставляющее минимальное значение функционалу(4) при ограничениях $(1) - (3)$назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс$\big(u(t), x(t)\big)$ – оптимальным процессом.

Считая, чтов рассматриваемой задаче оптимальное управление существует перейдем к доказательству необходимых условий оптимальности в рассматриваемой задаче.

3.Формула приращения функционала качества и необходимые условия оптимальности. Пусть$u(t)$ – фиксированный, а$\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$ – произвольный - допустимые управления.

Через $x(t)$ и $\bar{x}(t) = \Delta x(t) + x(t)$ обозначим решения задачи Коши (1)-(2).

Тогда ясно, что приращение$\Delta x(t)$будет решением задачи

$$\Delta\dot{x} = f(t, \bar{x}, \bar{u}) - f(t, x, u) +$$

$$+\int_{t_0}^{t}[K(t,\tau,\bar{x}(\tau),\bar{u}(\tau))-K(t,\tau,x(\tau),u(\tau))]d\tau, \tag{5}$$

$$\Delta x(t_0)=0. \tag{6}$$

Пусть $\psi(t)-$ пока неизвестная n-мерная вектор функция.

Из соотношения (5) получим справедливость тождества

$$\int_{t_0}^{t_1}\psi'(t)\Delta\dot{x}(t)dt=\int_{t_0}^{t_1}\psi'(t)\big[f\big(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)\big)-f\big(t,x(t),u(t)\big)\big]dt+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\psi'(t)\left[\int_{t_0}^{t}[K(t,\tau,\bar{x}(\tau),\bar{u}(\tau))-K(t,\tau,x(\tau),u(\tau))]d\tau\right]dt.$$

Отсюда, применяя теорему Фубини (см. например, [4, 5]) будем иметь

$$\int_{t_0}^{t_1}\psi'(t)\Delta\dot{x}(t)dt=\int_{t_0}^{t_1}\psi'(t)\big[f\big(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)\big)-f\big(t,x(t),u(t)\big)\big]dt+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1}\psi'(\tau)[K(\tau,t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))-K(\tau,t,x(t),u(t))]d\tau\right]dt. \tag{7}$$

В силу начального условия (5), применяя формулу интегрирования по частям в определенном интеграле получаем, что

$$\int_{t_0}^{t_1}\psi'(t)\dot{x}(t)dt=\psi'(t_1)\Delta x(t_1)-\int_{t_0}^{t_1}\dot{\psi}'(t)x(t)dt. \tag{8}$$

Учитывая тождества (7) и (8) запишем приращение функционала качества

$$\Delta S(u)=S(\bar{u})-S(u)=\big[\varphi\big(\bar{x}(t_1)\big)-\varphi\big(x(t_1)\big)\big]+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\big[F\big(t,s,\bar{x}(t),\bar{x}(s)\big)-F\big(t,s,x(t),x(s)\big)\big]dsdt+$$
$$+\psi'(t_1)\Delta x(t_1)-\int_{t_0}^{t_1}\dot{\psi}'(t)x(t)dt-\int_{t_0}^{t_1}\psi'(t)\big[f\big(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)\big)-f\big(t,x(t),u(t)\big)\big]dt+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1}\psi'(\tau)[K(\tau,t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))-K(\tau,t,x(t),u(t))]d\tau\right]dt. \tag{9}$$

Введем аналог функции Гамильтона-Понтрягина в виде

$$H(t,x(t),u(t),\psi(t))=\psi'(t)f\big(t,x(t),u(t)\big)+\int_{t}^{t_1}\psi'(\tau)K(\tau,t,x(t),u(t))d\tau.$$

Тогда формула приращения (9) может быть записано в виде.

$$S(u) = \left[\varphi\big(\bar{x}(t_1)\big)\Delta x(t_1) - \varphi\big(x(t_1)\big)\right] + \psi'(t_1)\Delta x(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} \dot{\psi}'(t)\Delta x(t)dt -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} H\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)\big) - H\big(t, x(t), u(t), \psi(t)\big)\, dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \left[F\big(t, s, \bar{x}(t), \bar{x}(s)\big) - F\big(t, s, x(t), x(s)\big)\right] ds dt. \qquad (10)$$

Из (10), в силу условий гладкости, наложенные на $f(t, x, u), K(\tau, t, x, u)$и $F(t, s, a, b)$ получим, что

$$\Delta S(u) = \varphi'_x\big(x(t_1)\big) + \psi'(t_1)\Delta x(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} \left[H\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)\big) - H\big(t, x(t), u(t), \psi(t)\big)\right] dt -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} H'_x\big(t, x(t), u(t), \psi(t)\big)\Delta x(t)\, dt -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \left[H_x\big(t, x(t), \bar{u}(t), \psi(t)\big) - H_x\big(t, x(t), u(t), \psi(t)\big)\right]' \Delta x(t) dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} F'_a\big(t, s, x(t), x(s)\big)\Delta x(t)\, ds dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} F'_b\big(t, s, x(t), x(s)\big)\Delta x(s)\, ds dt +$$

$$+ o_1(\|\Delta x(t_1)\|) - \int_{t_0}^{t_1} o_2\big(\|\Delta x(t)\| \quad\big) dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_o}^{t_1} o_3\,(\|\Delta x(t) + \Delta x(s)\|) ds dt. \qquad (11)$$

Здесь штрих ($'$) для векторов означает операцию скалярного произведения, а для матриц – транспонирования, $\|\alpha\|$ норма вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)'$ определяемая формулой $\|\alpha\| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$, а $o(\alpha)$ есть величина более высокого порядка чем α, т. е.$\frac{o(\alpha)}{\alpha} \to 0$при $\alpha \to 0$.

Ясно, что

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} F'_b\big(t, s, x(t), x(s)\big)\, ds dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} F'_b\big(s, t, x(s), x(t)\big)\, ds dt.$$

Поэтому, если предположить, что вектор-функция $\psi(t)$ является решением задачи

$$\dot{\psi} = -H_x\big(t, x(t), u(t), \psi(t)\big) + \int_{t_0}^{t_1} \Big(F_a\big(t, s, x(t), x(s)\big) + F_b\big(s, t, x(s), x(t)\big)\Big) ds, \qquad (12)$$

$$\psi(t_1) = -\varphi_x\big(x(t_1)\big), \qquad (13)$$

то формула приращения (11) функционала качества (4) примет вид

$$\Delta S(u) = -\int_{t_0}^{t_1} \left[H\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)\big) - H\big(t, x(t), u(t), \psi(t)\big)\right] dt + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} o_2\big(\|\Delta x(t)\| \quad \big)dt + \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_o}^{t_1} o_3\left(\|\Delta x(t) + \Delta x(s)\|\right) ds dt. \qquad (14)$$

Перейдем к выводу необходимого условия оптимальности.

Из задачи Коши (5)-(6) получим, что

$$\Delta x(t) = \int_{t_0}^{t} \left[f\big(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)\big) - f\big(\tau, x(\tau), u(\tau)\big)\right] d\tau +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\left[\int_{t_0}^{\tau}[K(\tau, s, \bar{x}(s), \bar{u}(s)) - K(\tau, s, x(s), u(s))]ds\right]d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \left[f\big(t, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)\big) - f\big(t, x(\tau), u(\tau)\big)\right] d\tau +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\left[\int_{\tau}^{t_1}[K(s, \tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) - K(s, \tau, x(\tau), u(\tau))]ds\right]d\tau.$$

Отсюда переходя к норме, после некоторых преобразований, применяя лемму Гронуолла-Беллмана (см., например, [4 ,5]) получим

$$\|\Delta x(t)\| \le L_1 \left[\int_{t_0}^{t} \left\|f\big(t, x(\tau), \bar{u}(\tau)\big) - f\big(t, x(\tau), u(\tau)\big)\right\| d\tau +\right.$$

$$\left. + \int_{t_0}^{t}\left[\int_{\tau}^{t}\|K(s, \tau, x(\tau), \bar{u}(\tau)) - K(s, \tau, x(\tau), u(\tau))\|ds\right]d\tau\right], \qquad (15)$$

где $L_1 = const > 0$некоторая постоянная.

Пусть$\theta \in [t_0, t_1)$ произвольная точка непрерывности управления $u(t), \varepsilon > 0$ произвольное, достаточно малое число, такое, что $\theta + \varepsilon < t_1$, а $v \in U$ произвольный вектор.

Специальное приращение допустимого управления $u(t)$ определим по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t) = \begin{cases} v - u(t), & t \in [\theta, \theta + \varepsilon), \\ 0, & t \in T \setminus [\theta, \theta + \varepsilon). \end{cases} \qquad (16)$$

Через $\Delta x_\varepsilon(t)$ обозначим специальное приращение траектории $x(t)$, отвечающее приращению (16) управления $u(t)$.

Из оценки(15)получаем, что

$$\|\Delta x_\varepsilon(t)\| \le L_2 \varepsilon, \qquad t \in T, \qquad (17)$$

где $L_2 = const > 0$некоторая постоянная.

Учитывая формулу (16) и оценку (17) из формулы приращения (14) получим, что

$$S(u + \Delta u_\varepsilon) - S(u) = -\varepsilon\big[H\big(\theta, x(\theta), v, \psi(\theta)\big) - H\big(\theta, x(\theta), u(\theta), \psi(\theta)\big)\big] + o(\varepsilon).$$

Из этого разложения следует

Теорема 1.Для оптимальности допустимого управления$u(t)$в задаче (1)-(4) необходимо, чтобы неравенство

$H\big(\theta, x(\theta), v, \psi(\theta)\big) - H\big(\theta, x(\theta), u(\theta), \psi(\theta)\big) \le 0$(18)

выполнялось для всех $\theta \in [t_0, t_1)$ и $v \in U$.

Неравенство (18) является аналогом принципа максимума Л.С.Понтрягина для рассматриваемой задачи.

Теперь продолжим исследование рассматриваемой задачи при некоторых дополнительных предположениях.

Пусть множество U выпуклое, а$f(t, x, u)$ и $K(\tau, t, x, u)$имеют непрерывные производные также по u.

При сделанных предположениях формула приращения (14) функционала качества (4) может быть представлено в виде

$$\Delta S(u) = -\int_{t_0}^{t_1} H'_u\big(t, x(t), u(t), \psi(t)\big)\Delta u(t)\,dt + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} o_3\,(\|\Delta x(t)\| + \|\Delta u(t)\|)dt. \qquad (19)$$

По аналогии с доказательством неравенства (15) доказывается, что

$$\|\Delta x_\varepsilon(t)\| \le L_3 \int_{t_0}^{t} o_3\,\|\Delta u(\tau)\| d\tau, \qquad (20)$$

где $L_3 = const > 0$некоторая постоянная.

В силу выпуклости множества U, специальное приращение допустимого управления $u(t)$ можно определить по формуле

$$\Delta u_\mu(t) = \mu[v(t) - u(t)], \qquad (21)$$

где $\mu \in [0,1]$ – произвольное число, а $v(t)$ – произвольное допустимое управление.

Пусть $\Delta x_\mu(t)$ специальное приращение траектории $x(t)$, отвечающее приращению (21) управления $u(t)$.

Тогда из оценки (20) следует, что

$$\big\|\Delta x_\mu(t)\big\| \le L_4\mu, \qquad t \in T, \qquad (22)$$

где $L_4 = const > 0$некоторая постоянная.

Принимая во внимание формулу (21) и оценку (22), из (19) получим справедливость разложения

$$S(u+\mu[v-u])-S(u)=-\mu\int_{t_0}^{t_1} H'_u\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)(v(t)-u(t))\,dt+o(\mu). \qquad (23)$$

Из разложения (23) следует

Теорема 2. Если множество U выпукло, а $f(t,x,u)$ и $K(\tau,t,x,u)$ имеют также по u непрерывные производные, то для оптимальности допустимого управления $u(t)$в задаче (1)-(4) необходимо, чтобы неравенство

$$\int_{t_0}^{t_1} H'_u\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)(v(t)-u(t))\,dt\le 0 \qquad (24)$$

выполнялось для всех $v(t)\in U, t\in T$.

Условие оптимальности (24) является аналогом линеаризованного интегрального принципа максимума. Из негоиспользуя произвольность допустимого управления$v(t)$можно получить поточечное линеаризованное необходимое условие оптимальности(дифференциальный принцип максимума[2]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. М. Наука,1975. 528 с.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск, Наука и техника, 1974, 272 с.
3. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Альсевич В.В. и др. Методы оптимизации. Минск. Изд-во «Четыре четверти», 2011, 472 с.
4. Денисов А.М., Разгулин А.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. МГУ, 2009, 125 с.
5. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М. Физматлит. 2005, 429 с.

JOURNAL OF BAKU ENGINEERING UNIVERSITY- MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
2021. Volume 5, Number 2 *Pages 76-81*

УДК 517.934.519.3

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯОПТИМАЛЬНОСТИ В ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ, ОПИСЫВАЕМОЙ РАЗНОСТНЫМ УРАВНЕНИЕМ ВОЛЬТЕРРА

М.Я.НАДЖАФОВА
Институт Систем управления НАН Азербайджана
nacafova.melahet@mail.ru

РЕЗЮМЕ

Рассматривается задача оптимального управления, описываемая системой разностных уравнений Вольтерра с нелокальными краевыми условиями. При предположении выпуклости, множества допустимых скоростей рассматриваемой системы уравнений вычислена специальная формула приращения функционала качества. Полученная формула приращения позволила получить необходимое условие оптимальности типа дискретного принципа максимума носящий глобальный характер. В случае выпуклости области управления доказан аналог дискретного линеаризованного принципа максимума, имеющий конструктивный характер.

Ключевые слова: нелокальная задача оптимального управления, функционал качества, функция Гамильтона-Понтрягина, принцип максимума, разностное уравнение Вольтерра, дискретный принцип максимума, линеаризованный принцип максимума, необходимое условие оптимальности**.**

NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS IN ONE OPTIMAL CONTROL PROBLEM DESCRIBED OF VOLTERRA DIFERENCE EQUATION

ABSTRACT

The problem of optimal control described by Volterra system of difference equations with non-local boundary conditions is described.

Assuming the convexity, of the set of allowable velocities of the system of equations ,under the consideration a special increment of the quality functional was computed.The obtained increment formulaallouwed, to formulate the necessary optimality condition of the discrete maximum principle type having global character .In case of convexity of control domain analogue of linearized principle of maximum principle is proved having constructive character, necessary optimality condition.

Keywords:non-local boundary condition, difference equations Volterra, discrete principle of maximum, analogue linearization maximum principle , necessary optimality condition.

VOLTERRA FƏRQ TƏNLİKLƏR SİSTEMİ İLƏ TƏSVİR OLUNAN BİR LOKAL OLMAYAN OPTIMAL IDARƏETMƏ MƏSƏLƏSINDƏ OPTİMALLIQ ÜÇÜN ZƏRURİ ŞƏRTLƏR

XÜLASƏ

Lokal olmayan sərhəd şərtli Volterra fərq tənliklər sistemi ilə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Baxılan tənliklər sisteminin mümkün sürətlər çoxluğunun qabarıq olması şərti ilə keyfiyyət funksionalının xüsusi artımı hesablanmışdır. Alınmış artım düsturu optimallıq üçün qlobal xarakter daşıyan diskret maksimum prinsipi tipli zəruri şərt almağa imkan vermişdir. İdarə oblastı qabarıq olan halda diskret xəttiləşdirilmiş makaimum prinsipinin konstruktiv xarakter daşıyan analoqu isbat edilmişdir.

Açar sözlər: Lokal olmayanm əsələ, Volterra tip fərq tənliyi, diskret maksimum prinsipi, xəttiləşdirilmiş maksimum prinsipi, optimallıq üçün zəruri şərt.

1. Введение.В работах [1, 2] были изучены ряд задач оптимального управления, описываемые обыкновенными разностными уравнениями с нелокальными краевыми условиями.Были установлены ряд необходимых условий оптимальности.

В предлагаемой работе рассматривается нелокальная задача оптимального управления, описываемая системойнелинейных разностных уравнений Вольтерра.При различных предположениях установлен ряд необходимых условий оптимальности.

2. Постановка задачи. Пусть $T = \{t_0, t_0 + 1, t_1 - 1\}$ −заданный «дискретный отрезок», $U \subset R^r$ − заданное непустое и ограниченное множество.

Предположим, что управляемый дискретныйпроцесс описывается системой разностных уравнений типа Вольтерра

$$x(t+1) = A(t)x(t) + f(t, u(t)) + \sum_{\tau=t_0}^{t} \left[B(t,\tau)x(\tau) + g\big(t,\tau,u(\tau)\big)\right], t \in T, (1)$$

с краевыми условиями

$$L_0 x(t_0) + L_1 x(t_1) = l. (2)$$

Здесь$A(t), B(t,\tau)$– заданные n-мерные вектор-функции,L_0, L_1 − заданные $(n \times n)$постоянные матрицы,l −заданный постоянный вектор, $f(t,u)\big(g(t,\tau,u)\big)$ −заданная непрерывная по u и дискретная по $t\big((t,\tau)\big)n$-мерная вектор-функция, $u(t)$ −r – мерный дискретныйвектор управляющих воздействий, удовлетворяющий ограничению(допустимое управление)

$$u(t) = U \subset R^r, t \in T. (3)$$

На решениях краевой задачи (1)-(2), порожденных всевозможными допустимыми управлениями определим функционал

$$S(u) = \varphi\big(x(t_0), x(t_1)\big). (4)$$

Здесь $\varphi(a,b)$ – заданная непрерывно дифференцируемая скалярная функция.

Задача заключается в нахождении минимального значения функционала (4) при ограничениях (1)-(3).

Допустимое управление$u(t)$,доставляющее минимальное значение функционалу (4) при ограничениях (1) − (3)назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс$\big(u(t), x(t)\big)$ − оптимальным процессом.

Целью работы является вывод необходимых условий оптимальности в рассматриваемой задаче.

3. Формула приращения функционала качества и необходимое условие оптимальности типа дискретного принципа максимума. Пусть$\big(u(t), x(t)\big)$ – фиксированный, а$\big(\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t), \bar{x}(t) = \Delta x(t) + x(t)\big)$ – произвольный допустимые процессы.

Тогда из краевой задачи (1)-(2) получаем, что приращение$\Delta x(t)$будет решением краевой задачи

$$\Delta x(t+1) = A(t)\Delta x(t) + f\big(t, \bar{u}(t)\big) - f\big(t, u(t)\big) +$$

$$+ \sum_{\tau=t_0}^{t} \left[B(t,\tau)\Delta x(\tau) + g\big(t,\tau,\bar{u}(\tau)\big) - g\big(t,\tau,u(\tau)\big)\right], (5)$$

$$L_0 \Delta x(t_0) + L_1 \Delta x(t_1) = 0. (6)$$

Пусть $\lambda \in R^n$и $\psi(t) \in R^n$ – пока произвольныеn-мерные постоянный ивектор функция соответственно.

Тогда из соотношений (5) и (6) получаем, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t)\Delta x(t+1) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t)\left[f\left(t,\bar{u}(t)\right) - f\left(t,u(t)\right)\right] +$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[\sum_{\tau=t_0}^{t} \psi'(t)\left[g\left(t,\tau,\bar{u}(\tau)\right) - g\left(t,\tau,u(\tau)\right)\right]\right] + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t)A(t)\Delta x(t) +$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[\sum_{\tau=t_0}^{t} B(t,\tau)\Delta x(\tau)\right], (7)$$

$$\lambda' L_0 \Delta x(t_0) + \lambda' L_1 \Delta x(t_1) = 0. (8)$$

Используя аналог формулыФубини (см. например, [3, 4]) получим, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[\sum_{\tau=t_0}^{t} \psi'(t)\left[g\left(t,\tau,\bar{u}(\tau)\right) - g\left(t,\tau,u(\tau)\right)\right]\right] = \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[\sum_{\tau=t}^{t_1-1} \psi'(\tau)\left[g\left(\tau,t,\bar{u}(t)\right) - g\left(\tau,t,u(t)\right)\right]\right]. (9)$$

Далее доказывается, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t)\Delta x(t+1) = \psi'(t_1-1)\Delta x(t_1) + \psi'(t_0-1)\Delta x(t_0) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t-1)\Delta x(t). (10)$$

Введя обозначение

$$H(t,u(t),\psi(t)) = \psi'(t)f\left(t,u(t)\right) + \sum_{\tau=t}^{t_1-1} \psi'(\tau)g\left(\tau,t,u(t)\right)$$

и учитывая тождества (7) - (10),формула приращения функционала качествапредставляется в виде

$$\Delta S(u) = S(\bar{u}) - S(u) = \left[\varphi\left(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1)\right) - \varphi\left(x(t_0),x(t_1)\right)\right] + \lambda' L_0 \Delta x(t_0) + \lambda' L_1 \Delta x(t_1) +$$

$$+\psi'(t_1-1)\Delta x(t_1) - \psi'(t_0-1)\Delta x(t_0) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t)A(t)\Delta x(t) -$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{\tau=t}^{t_1-1} \psi'(\tau)B(\tau,t)\Delta x(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[H\left(t,\bar{u}(t),\psi(t)\right) - H\left(t,u(t),\psi(t)\right)\right] +$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t-1)\Delta x(t). (11)$$

Из формулы приращения (11),используя формулу Тейлора получим

$$S(u) = \frac{\partial\varphi'\left(x(t_0),x(t_1)\right)}{\partial a}\Delta x(t_0) + \frac{\partial\varphi'\left(x(t_0),x(t_1)\right)}{\partial b}\Delta x(t_1) + o_2(\|\Delta x(t_1)\|) +$$

$$+\lambda' L_0 \Delta x(t_0) + \lambda' L_1 \Delta x(t_1) + \psi'(t_1-1)\Delta x(t_1) - \psi'(t_0-1)\Delta x(t_0) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t-1)\Delta x(t) -$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t)A(t)\Delta x(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{\tau=t}^{t_1-1} \psi'(\tau)B(\tau,t)\Delta x(t) -$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[H\big(t,\bar{u}(t),\psi(t)\big) - H\big(t,u(t),\psi(t)\big)\right]. \, (12)$$

Предположим, что вектор-функция $\psi(t)$ и постоянный вектор λ удовлетворяют соотношениям

$$\psi(t-1) = A'(t)\psi(t) + \sum_{\tau=t}^{t_1-1} B'(\tau,t)\psi(\tau)\,, (13)$$

$$\psi\ \ (t_1-1) = -\frac{\partial\varphi'\big(x(t_0),x(t_1)\big)}{\partial b} - {L_1}'\lambda,$$

$$\psi\ \ (t_0-1) = \frac{\partial\varphi'\big(x(t_0),x(t_1)\big)}{\partial a} + {L_0}'\lambda. \, (14)$$

Соотношения (13), (14) назовем сопряженной системой рассматриваемой задачи.

Тогда формула приращения (12) критерия качества примет вид

$$\Delta S(u) = -\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[H\big(t,\bar{u}(t),\psi(t)\big) - H\big(t,u(t),\psi(t)\big)\right] + o_1(\|\Delta x(t_0)\|) + o_2(\|\Delta x(t_1)\|). \, (15)$$

Введем в рассмотрение множество

$$f(t,U) + \sum_{\tau=t_0}^{t} g(t,\tau,U) = \left\{\alpha : \alpha = f\big(t,v(t)\big) + \sum_{\tau=t_0}^{t} g(t,\tau,v(\tau))\,, v(\tau)\in U, \tau\in T\right\}. \, (16)$$

Предположим, что множество (16) при всех (t,τ) выпуклое, а $\varepsilon\in[0,1]$ произвольное число.

Через $v(t,\varepsilon)$ обозначим произвольное допустимое управление, такое, что

$$x(t+1,\varepsilon) = A(t)x(t,\varepsilon) + f\big(t,u(t,\varepsilon)\big) + \sum_{\tau=t_0}^{t_1}\left[B(t,\tau)x(\tau,\varepsilon) + g\big(t,\tau,u(\tau,\varepsilon)\big)\right] \equiv$$

$$\equiv (1-\varepsilon)\left[f\big(t,u(t,\varepsilon)\big) + \sum_{\tau=t_0}^{t_1} g\big(t,\tau,u(\tau,\varepsilon)\big) + A(t)x(t,\varepsilon) + \sum_{\tau=t_0}^{t_1} B(t,\tau)x(\tau,\varepsilon)\right] +$$

$$+\varepsilon\left[f\big(t,v(t)\big) + \sum_{\tau=t_0}^{t_1} g\big(t,\tau,v(\tau)\big) + A(t)x(t,\varepsilon) + \sum_{\tau=t_0}^{t_1} B(t,\tau)x(\tau,\varepsilon)\right] (17)$$

$$x(t_0,\varepsilon) = x_0, (18)$$

где $v(t) \in U, t \in T$ произвольное допустимое управление.

Положим

$$y(t,x) = \left.\frac{\partial x(t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}.$$

Учитывая условия гладкости, наложенные на $f(t,u)$ и $g(t,\tau,u)$, а также (17) и (18), доказывается справедливость разложения

$\Delta x(t,\varepsilon) = x(t,\varepsilon) - x(t) = \varepsilon y(t) + o(\varepsilon)$, (19)

где$y(t)$ является решением аналога уравнения в вариациях [5, 6]

$$y(t+1) = A(t)y(t) + \sum_{\tau=t_0}^{t_1} B(t,\tau)y(\tau) + \left[f\big(t,v(t)\big) - f\big(t,u(t)\big)\right] +$$

$$+\sum_{\tau=t_0}^{t}\left[g\big(t,\tau,v(\tau)\big) - g\big(t,\tau,u(\tau)\big)\right],$$

$$L_0 y(t_0) + L_1 y(t_1) = 0.$$

Учитывая формулу (19) в формуле приращения (15) приходим к разложению

$$S\big(u(t,\varepsilon)\big) - S\big(u(t)\big) = -\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[H\big(t,v(t),\psi(t)\big) - H\big(t,u(t),\psi(t)\big)\right] + o(\varepsilon).$$

Из полученного разложения следует справедливость утверждения

Теорема 1.*Если множество (16) выпукло, то для оптимальности допустимого управления $u(t)$в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы неравенство*

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[H\big(t,v(t),\psi(t)\big) - H\big(t,u(t),\psi(t)\big)\right] \le 0 \ (20)$$

выполнялось для всех $v(t) \in U, t \in T$.

Неравенство (20) является аналогом дискретного принципа максимума[5, 6] для рассматриваемой задачи.

Линеаризованный принцип максимума. Предположим, что множество U выпуклое, а вектор-функции $f(t,u)$ и $g(t,\tau,u)$имеют непрерывные производные также поu. Тогда из формулы приращения (15) применяя формулу Тейлора, получаем, что

$$\Delta S(u) = -\sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_u\big(t,u(t),\psi(t)\big)\Delta u(t) + o_1(\|\Delta x(t_0)\|) + o_2(\|\Delta x(t_1)\|) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_3(\|\Delta u(t\ \ )\|).\ (21)$$

Пусть $\varepsilon \in [0,1]$ произвольное число, а $v(t) \in U, t \in T$ произвольное допустимое управление. Тогда специальное приращение допустимого управления $u(t\ \ )$ можно определить по формуле

$\Delta u_\varepsilon(t) = \varepsilon[v(t) - u(t)]$. (22)

Через$\Delta x_\varepsilon(t)$ обозначим специальное приращение траектории $x(t)$, отвечающее приращению (22) управления $u(t)$.

Ясно, что $\Delta x_\varepsilon(t)$ является решением линеаризованной системы

$$\Delta x_\varepsilon(t+1) = A(t)\Delta x_\varepsilon(t) + \varepsilon f_u\big(t,u(t)\big)\big(v(t)-u(t)\big) + \sum_{\tau=t_0}^{t} B(t,\tau)\Delta x_\varepsilon(t) +$$

$$+\varepsilon \sum_{\tau=t_0}^{t_1}\Big[g_u\big(t,\tau,v(\tau)\big)\big(v(\tau)-u(\tau)\big) + o_4(\|\Delta u(t\quad)\|)\Big], (23)$$

$$L_0\Delta x_\varepsilon(t_0) + L_1\Delta x_\varepsilon(t_1) = 0. (24)$$

Используя линеаризованную задачу (23)-(24) доказывается справедливость разложения

$$\Delta x_\varepsilon(t) = \varepsilon l(t) + o(\varepsilon;t). (25)$$

Здесь $l(t)$ является решением краевой задачи

$$l(t+1) = A(t)l(t) + \sum_{\tau=t_0}^{t_1}\Big[g_u\big(t,\tau,v(\tau)\big)\big(v(\tau)-u(\tau)\big) + B(t,\tau)l(t)\Big],$$

$$L_0 l(t_0) + L_1 l(t_1) = 0.$$

Учитывая разложение (25) из формулы приращения (21) будем иметь

$$S(u+\Delta u_\varepsilon) - S(u) = -\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1} H_u'\big(t,u(t),\psi(t)\big)\big(v(t)-u(t)\big) + o(\varepsilon).$$

Из полученного разложения следует

Теорема 2. Если множество U выпуклое, то для оптимальности допустимого управления $u(t)$необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} H_u'\big(t,u(t),\psi(t)\big)\big(v(t)-u(t)\big) \le 0 \ (26)$$

выполнялось для всех $v(t) \in U, t \in T$.

Неравенство (26) является аналогом линеаризованного условия максимума.

ЛИТЕРАТУРА

6. Наджафова М.Я., Мансимов К.Б. Об оптимальности квази особых управлений в задаче управления дискретными системами с нелокальными краевыми условиями // Вестник БГУ. Сер.физ.-мат. наук. 2015, №4, с. 5-12.
7. Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности в одной дискретной задаче управления с нелокальными краевыми условиями // Журн. «Проблемы управления и информатики». Киев, 2012, №6, с. 71-79.
8. Колмановский В.Б. Об асимптотических свойствах решений некоторых нелинейных систем Вольтерра // Автоматика и телемеханика. 2009, № 4, с. 42-50.
9. Song Y., Baker C.T. Liearized, stability analysis of discrete Volterra equations // J. Math. anal. and appl. 2004, vol 294, №4, p.p. 310-333.
10. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М. Либроком, 2011, 256 с.
11. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку, Изд.-во БГУ, 2013, 151 с.

2021. Volume 5, Number 2 Pages 82-88

UOT:51

PROBLEMS OF OPTIMAL CONTROL DESCRIBED BY EQUATIONS OF PARABOLIC TYPE (*NON-CLASSICAL BOUNDARY CONDITIONS*)

HUSEYNOVA AYGUN NAZIM K.
Azerbaijan State and Oil University
hasanova_a@inbox.ru

ABSTRACT

This paper deals with the process described by the equation of thermal conductivity with a non-classical boundary condition. First, controllability for the equation of thermal conductivity with non-classical boundary conditions has been studied [1]. The theories of controllability and observability for ordinary dynamical systems have been sufficiently studied. The necessary and sufficient controllability conditions for a linear system are expressed through the fundamental matrix of the conjugate system [2]. The concept and definition of the controllability of the system described by partial differential equations requires expansion. This extension depends on the problem at hand.

Keywords: non-classical boundary conditions, optimal control, thermal conductivity, parabolic type equations.

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ, ОПИСЫВАЕМЫЕ УРАВНЕНИЯМИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА (НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ)

РЕЗЮМЕ

В данной работе рассматривается процесс, описываемый уравнением теплопроводности с неклассическим граничным условием. Во-первых, исследована управляемость для уравнения теплопроводности с неклассическими граничными условиями [1]. Теории управляемости и наблюдаемости обычных динамических систем достаточно изучены. Необходимые и достаточные условия управляемости линейной системы выражаются через фундаментальную матрицу сопряженной системы [2]. Понятие и определение управляемости системы, описываемой уравнениями в частных производных, требуют расширения. Это расширение зависит от решаемой проблемы.

Ключевые слова: неклассические граничные условия, оптимальное управление, теплопроводность, уравнения параболического типа.

PARABOLİK TİP TƏNLİKLƏR İLƏ TƏSVİR EDİLƏN OPTİMAL İDARƏ PROBLEMLƏRİ (QEYRİ-KLASSİK SƏRHƏD ŞƏRTLƏRİ)

XÜLASƏ

Bu yazıda biz qeyri-klassik sərhəd şərti ilə istilik tənliyi ilə təsvir edilən prosesi nəzərdən keçiririk. Əvvəlcə qeyri-klassik sərhəd şərtləri ilə istilik tənliyi üçün idarəolunma qabiliyyəti öyrənilmişdir [1]. Adi dinamik sistemlərin idarə oluna bilməsi və müşahidə oluna bilməsi nəzəriyyələri kifayət qədər öyrənilmişdir. Xətti sistemin idarə oluna bilməsi üçün zəruri və kafi şərtlər birləşən sistemin əsas matrisi ilə ifadə edilir [2]. Qismən diferensial tənliklərlə təsvir edilən sistemin idarə oluna bilməsi anlayışı və tərifi genişlənmə tələb edir. Bu uzantı həll olunan problemdən asılıdır.

Açar sözlər: qeyri-klassik sərhəd şərtləri, optimal idarəetmə, istilik keçiriciliyi, parabolik tipli tənliklər.

Introduction. Let the control object in the area $D_T = \{(x,t),\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$ be described by the equation

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + u(x,t) \quad in\ D_T \qquad (1)$$

with boundary conditions

$$y(0,t)=0,\ y_x(0,t)=y_x(1,t),\ t\in[0,T] \tag{2}$$

and with first conditions

$$y(x,0)=y^0(x),\ x\in[0,1] \tag{3}$$

where *u(x,t)* - density of thermal sources at a point *x* in time *t*. There are no restrictions on control.

Research method.

Unlike the finite-dimensional case, in the infinite-dimensional case, controllability is defined as follows.

A system whose state is defined as solving problem (1)-(3) is called manageable if the observation is $Cy=y_u(x,t)$ sweeps the subspace dense in space $W_2^{1,0}(D_T)$, when controlling $u(x,t)$ runs through the whole space $L_2(D_T)$. It is proved that the system whose state is defined as the solution of problem (1)-(3) is manageable.

Further studies the controllability of the system, which is defined as the solution of the equation

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right)+b(x,t)y \quad in \quad D_T \tag{4}$$

with boundary conditions

$$y(0,t)=0,\ y_x(0,t)=y_x(1,t) \tag{5}$$

and with first conditions

$$y(x,0)=u(x) \tag{6}$$

Here as a valid control of its *u(x)* we will consider functions from space $L_2(0,1)$.

It is proved that if there is an inverse uniqueness of the problem (4) - (6), and then the system whose state is defined as the solution of the problem (4) - (6) is manageable. In addition, the manageability of the task has been proven here

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right)-b(x)y \quad in \quad D_T \tag{7}$$

$$y(x,0)=0,\ 0\le x\le 1 \tag{8}$$

$$y(0,t)=0,\ y_x(0,t)-y_x(1,t)=u(t),\ 0\le t\le T \tag{9}$$

where, $u(t) \in L_2(0,T)$ - control.

Next, the optimal speed control is considered, for the equation of thermal conductivity with a non-classical boundary condition. The problem of the existence of optimal controls occupies a fundamental position in the theory of optimal processes and plays an important role in solving practical problems.

Let the process to be described by a function $y(x,t)$, which is within the region $D_T = \{(x,t): 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T\}$, satisfies the equation

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + u(x,t) \quad (10)$$

with initial conditions

$$y(x,0) = y^0(x) \quad (11)$$

and with boundary conditions

$$y(0,t) = 0,\ y_x(0,t) = y_x(1,t) \quad (12)$$

where $y^0(x)$- given function, $u(x,t)$ - control.

Let the class of permissible controls U_∂ convex, closed and limited subset of space $L_2(D_T)$.

The theorem is proved later in this section. The problem (10)-(12) is unambiguously solvable $W_{2,0}^{2,1}(D)$ at $\varphi \in \overset{0}{W}{}_2^1(0,1)$, i.e. there is a solution almost everywhere *D*.

To specify a function $\varphi(x) \in L_2(0,1)$ in the selected class of valid controls, you need to specify control $u^*(x,t) \in U_\partial$ such that the decision corresponding to it $y^*(x,t)$ problems (10) - (12) satisfied the condition

$$y^*(x,\tau_0) = \varphi(x) \quad (13)$$

Here with $\tau_0 \in (0,T)$ took the lowest possible value.

The following theorem has been proved in this case. If there is a control $u(x,t) \in U_\partial$. such that the decision corresponding to it *y(x,t)* the problem satisfies the condition

$$y(x,\tau) = \varphi(x)$$

For some value $\tau \in (0,T)$, then there is a control $u^*(x,t)$ that is optimal in the sense of performance, i.e. the corresponding solution $y^*(x,t)$ satisfies the condition

$$y^*(x,\tau_0) = \varphi(x),\ \tau_0 = \inf \tau .$$

In addition, this section discusses border control.

Additionally this section discusses edge control.

The process is described by the equation

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + f(x,t) \quad (14)$$

with conditions

$$y(x,0) = y_0(x) \quad (15)$$

$$y(0,t) = 0,\ y_x(1,t) - y_x(0,t) = u(t) \quad (16)$$

Class of valid controls $u(t) \in U_\partial$ convex, bounded, closed subset $L_2(0,T)$. Suppose that *K* - is a weakly, closed subset of the space in $L_2(0,1)$.

Let there be control $u(t) \in U_\partial$ such that the decision corresponding to it *y(x,t)* problems (14) - (16) satisfies the condition,

$$y(x,\tau) \in K \ \ for\ \tau \in (0,T).$$

Then there is control $u(t) \in U_\partial$ optimal in terms of performance.

$$y^*(x,\tau_0) \in K, \quad \tau_0 = \inf \tau$$

Further studies the relativity of optimal speed control for the controlled process described by the thermal conductivity equation with a non-classical boundary condition.

Let the state of the system be defined as the solution of the problem

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + p(x)u(t) \quad in\ D_T, \\ y(x,0) = y_0(x),\ 0 \le x \le 1, \\ y(0,t) = 0,\ y_x(0,t) = y_x(1,t),\ 0 \le t \le T \end{array}\right\} \quad (17)$$

Where $p(x), y_0(x)$ - are given functions from $L_2(0,1)$ for the set of permissible occurrences are taken functions $u(t) \in U_\partial = \{u, u(t) \in L_2(0,T), |u(t)| \le 1\, almost\ everywhere\}$.

For each allowable control $u(t)$ there is only one generalized solution $y(x,t)$ problems (17), which with the help of the function $G(x,s,t)$ can be represented as

$$y(x,t) = \int_0^1 G(x,s,t) y_0(s) ds + \int_0^t \int_0^1 G(x,s,t-\sigma) p(s) u(\sigma) ds d\sigma \quad (18)$$

For a given function $\varphi(x)$ from $L_2(0,1)$ it is necessary to find a control $u^*(t) \in U_\partial$, such that the corresponding solution $y^*(x,t)$ problems (17) satisfied the condition

$$y^*(x,t) = \varphi(x) \quad (19)$$

Where τ_0 - the lower face of the value τ for which the condition is met

$$y(x,\tau)=\varphi(x)$$

For some solution $y(x,t)$ problems (17) and some $\tau \in (0,T)$.

Theorem 1. Let there be control $u(t)\in U_\partial$ such that the decision corresponding to it $y(x,t)$ problem (17) satisfies the condition $y(x,\tau)=\varphi(x)$ for some $\tau \in (0,T)$. Then there is control $u^*(t)\in U_\partial$, optimal control in terms of performance:

$$y^*(x,\tau_0)=\varphi(x),\ \tau_0=\inf\ \tau$$

Further proves the relativity of optimal control in terms of speed.

Theorem 2. Let $u^*(t)\in U_\partial$ is optimal control in terms of speed. Then $|u^*(t)|=1$ almost everywhere on $(0,\tau_0)$. In addition, first-order optimization conditions are introduced here. The conjugate state is defined as the solution of the problem:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial z}{\partial t}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0 \quad in \quad D_T\\ z(x,\tau_0)=h(x)\\ z_x(1,t)=0,\ z(0,t)=z(1,t)\end{array}\right\} \quad (20)$$

The following theorem is proved below:

Theorem 3. Let $u^*(t)\in U_\partial$ is optimal control in terms of speed. Then there is a solution $z(x,t)$ of the conjugate problem (17) such that for any $u\in[0,1]$ inequality is fulfilled

$$\left(\int_0^1 z(x,t)p(x)dx\right)\left(u-u^*(t)\right)\le 0\ \ almost\, everywhere\, on\ (0,\tau_0)$$

Then the problem of control with a minimum energy for an object described by the equation of thermal conductivity with a non-classical boundary condition is studied.

Let the controlled process be described by a function $y(x,t)$ that satisfies the equation

$$\frac{\partial y}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+u(x,t)\, in\ D_T \quad (21)$$

With initial conditions

$$y(x,0)=y_0(x),\ 0\le x\le 1 \quad (22)$$

And with boundary conditions

$$y(0,t)=0,\ y_x(1,t)=y_x(0,t) \quad (23)$$

A lot of acceptable controls U_∂ is space $L_2(D_T)$.

For each valid control $u(x,t)$ there is only one generalized solution $y(x,t)$ problems (21)-(23), which with the help of the function $G(x,s,t)$ can be represented as

$$y(x,t)=\int_0^1 G(x,s,t)y_0(s)ds+\int_0^t\int_0^1 G(x,s,t-\sigma)u(s,\sigma)dsd\sigma \quad (24)$$

For a given function $\varphi(x)$ from $L_2(0,1)$ you need to specify the control $u^*(x,t)$ such that the corresponding solution $y^*(x,t)$ problems (21)-(23) satisfied the condition

$$y^*(x,T)=\varphi(x) \quad (25)$$

At the same time, the functionality

$$J=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^T u_k^2(t)dt \quad (26)$$

took the smallest possible value, where

$$u_k(t)=\int_0^1 u(x,t)Y_k(x)dx, \quad k=0,1,2,\ldots \quad (27)$$

using the solution representation (24), condition (25) can be written as

$$\int_0^T\int_0^1 G(x,s,T-\sigma)u(s,\sigma)dsd\sigma=\psi(x) \quad (28)$$

where

$$\psi(x)=\varphi(x)-\int_0^1 G(x,s,T)y_0(s)ds$$

Expanding the function $\psi(x)$ into a biorthogonal series in terms of the system of eigen functions and associated functions from (28), we obtain,

$$\left.\begin{array}{l}\int_0^T u_0(t)dt=\psi_0\\ \int_0^T u_{2k-1}(t)e^{-a^2\lambda_k(T-t)}dt=\psi_{2k-1}, \quad k=1,2,\ldots\\ \int_0^T\left(u_{2k}(t)-2a^2\sqrt{\lambda_k}(T-t)u_{2k-1}(t)\right)e^{-a^2\lambda_k(T-t)}dt=\psi_{2k},\ k=1,2,\ldots\end{array}\right\} \quad (29)$$

Thus, it is required to find the control

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)X_k(x)$$

Such that the sequence $\{u_k(t)\}$ satisfies the infinite system of equations (29), while the functional

$$J=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^T u_k^2(t)dt$$

took the smallest possible value.

Further, the optimal control is explicitly defined. in addition, boundary control is studied here.

Let the state of the system be defined as a solution to the problem

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \ in\ D_T, \\ &y(x,0) = y_0(x),\ 0 \le x \le 1, \\ &y(0,t) = 0,\ y_x(1,t) - y_x(0,t) = u(t),\ 0 \le t \le T \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

In this case, the control *u(t)* is found from the solution of the equation

$$\int_0^T\int_0^1\left[a^2G(x,s,T-t) - \frac{s^2}{2}G_t(x,s,T-t)\right]u(t)dsdt = \psi(x) \quad (31)$$

Discussion of research work and its results.

And in the end, the problem of control with minimum energy for an object described by the equation of heat propagation in a rectangular plate is studied. This problem is reduced to the solution of the equation

With initial condition

$$z(x,y,0) = z^0(x,y) \quad (32)$$

And with boundary conditions

$$\left.\begin{aligned} &z(0,y,t) = 0,\ z_x(0,y,t) = z_x(1,y,t) \\ &z(x,0,t) = 0,\ z_y(x,0,t) = z_y(x,1,t) \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

It is required to define a control $u(x,y,t)$ in an admissible class, such that the solution corresponding to it $z(x,y,t)$ satisfies the condition

$$z(x,y,T) = \varphi(x,y) \quad (34)$$

While the functionality

$$I = \sum_{i,j=0}^{\infty}\int_0^T u_{ij}^2(t)dt \quad (35)$$

took the smallest possible value.

LIST OF REFERENCES:

1. Ionkin N.I. Solving one boundary problem of the theory of thermal conductivity with a non-classical boundary condition. Differents. equations, 1977, vol. X, No.2, p.294-304.
2. Ladyzhenskaya O.A. Regional problems of mathematical physics, M., "Science," 1973, p.403.

2021. Volume 5, Number 2 Pages 89-93

УДК: 517.9

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

РАМИЗ АХМЕДОВ

Бакинский Государственный Университет

ahmadov_ramiz@hotmail.com

РЕЗЮМЕ

В данной заботе установлена фредголмовость одной нелокаьной краевой задачи для оператора Лапласас помощью необходимых условий, которым должны удовлетворят решения. .

Ключевые слова. Краевая задача, нелокальная, оператор Лапласа, необходимые условия.

LAPLAS OPERATORU ÜÇÜN BİRQEYRİ-LOKAL SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

XÜLASƏ

Məqalədə щяллərin юдямяли олдуьу зярури шяртлярин кюмяйи иля Лапласоператору цчцн гойулмуш бир гейри-локал сярщяд мясялясинин щяллинин фредщолмлуьу эюстярилмишдир.

Açar sözlər. Sərhəd məsələsi, qeyri-lokal, Laplas operatoru, zəruri şərtlər.

ONE NON-LOKAL BOUNDARY PROBLEMFOR LAPLASIAN OPERATOR

ABSTRACT

In the paper proved fredgholmarity of one non-lokal boundary problem for Laplasian operator with the help of necessary conditions.

Keywords. Boundary value problem, non-lokal, Laplasian operator, necessary conditions.

Рассматривается следующая нелокальная краевая задача для оператора Лапласа:

$$\Delta U(x,y) \equiv U_{xx} + U_{yy} = 0, (x,y) \in D, (1)$$

$$\alpha_{j1}U(\pi,z) + \alpha_{j2}U(0,z) + \alpha_{j3}U_x(\pi,z) + \alpha_{j4}U_x(0,z) +$$

$$+\alpha_{j5}\int_0^\pi K_{j1}(z,\xi)U(\pi,\xi)d\xi + \alpha_{j6}\int_0^\pi K_{j2}(z,\xi)U(0,\xi)d\xi +$$

$$+\alpha_{j7}\int_0^\pi K_{j3}(z,\xi)U_x(\pi,\xi)d\xi + \alpha_{j8}\int_0^\pi K_{j4}(z,\xi)U_x(0,\xi)d\xi = f_j(z),$$

$$\beta_{j1}U(z,\pi) + \beta_{j2}U(z,0) + \beta_{j3}U_y(z,\pi) + \beta_{j4}U_y(z,0) +$$

$$+\beta_{j5}\int_0^\pi K_{j5}(z,\xi)U(\xi,\pi)d\xi + \beta_{j6}\int_0^\pi K_{j6}(z,\xi)U(\xi,0)d\xi + \qquad (2)$$

$$+\beta_{j7}\int_0^\pi K_{j7}(z,\xi)U_y(\xi,\pi)d\xi + \beta_{j8}\int_0^\pi K_{j8}(z,\xi)U_y(z,\xi)d\xi = \varphi_j(z), z \in (0,\pi), j = \overline{1;2},$$

где $\alpha_{j,i}, \beta_{j,i}$ ($j=\overline{1,2}; i=\overline{1,8}$) — постоянные, $D=\{(x,y)|0<x,y<\pi\}$.

Известно, что фундаментальное решение оператора Лапласа имеет вид [1]:

$$V(s-t)=\frac{1}{2\pi}\ln|s-t|, s=(x,y), t=(t_1,t_2) .$$

Преобразуя соотношение

$$\int_D \Delta U(x,y)V(s-t)ds=0, s=(x,y), t=(t_1,t_2)$$

с помощью второй формулы Грина, с учетом свойств фундаментального решения, получим:

$$\int_{\partial D} U\cdot V_x(s-t)\cos(\nu,x)ds-\int_{\partial D} U_x\cdot V(s-t)\cos(\nu,x)ds-$$

$$-\int_{\partial D} U_y\cdot V(s-t)\cos(\nu,y)ds+\int_{\partial D} U\cdot V_y(s-t)\cos(\nu,y)ds=$$

$$=\begin{cases} U(t), t\in D, \\ \frac{1}{2}U(t), t\in\partial D, \\ 0, t\notin\overline{D}, \end{cases} \quad (3)$$

где через ∂D обозначена граница квадрата D, а ν — есть внешняя нормаль к границе ∂D [2].

Определение. Классическим решением уравнения (1) в D называется любая функция $U(x,y)\in C^2(D)\bigcap C^1(\overline{D})$, которая при постановке в уравнение обращает его в тождество.

Выделив случай $t\in\partial D$ в равенстве (3), с учетом свойств фундаментального решения, будем иметь следующее разложение для решения:

$$U(t_1,t_2)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi U_x(\pi,y)\ln\left[(\pi-t_1)^2+(y-t_2)^2\right]dy+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi U_x(0,y)\ln\left[t_1^{\,2}+(y-t_2)^2\right]dy+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi U(\pi,y)\frac{\pi-t_1}{(\pi-t_1)^2+(y-t_2)^2}dy+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi U(0,y)\frac{t_1}{t_1^{\,2}+(y-t_2)^2}dy-\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi U_y(x,\pi)\ln\left[(x-t_1)^2+(\pi-t_2)^2\right]dx+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi U_y(x,0)\ln\left[(x-t_1)^2+t_2^{\,2}\right]dx+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi U(x,\pi)\frac{\pi-t_2}{(x-t_1)^2+(\pi-t_2)^2}dx+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi U(x,0)\frac{t_2}{(x-t_1)^2+t_2^{\,2}}dx, (t_1,t_2)\in D. \quad (4)$$

Как следует из (4), чтобы определить решение задачи (1)-(2), мы должны знать все те граничные значения, которые входят в это разложение. Эти граничные значения могут быть определены из граничных условий (2) и из необходимых условий, которым должны удовлетворять решения оператора Лапласа, определенные на квадрате D. Разложение (4) содержит следующие восемь граничных значений:

$$U(t_1,0),U(\pi,t_2),U(t_1,\pi),U(0,t_2),U_y(t_1,0),U_x(\pi,t_2),U_y(t_1,\pi),U_x(0,t_2).$$

Граничные условия (2) содержат четыре соотношений, которые связаны этими граничными значениями. Остальные четыре условия мы должны определить с помощью необходимых условий.

Пусть $O=O(0;0),M=M(\pi;0),N=N(\pi;\pi),P=P(0;\pi)$. Тогда при $t\in MN,t\in NP,t\in PO,t\in OM$ мы получим соотношения для граничных значений $U(x,y)$.

При $t\in MN$, т.е. если $t_1=\pi$, получим:

$$U(\pi,t_2)=-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi U_x(\pi,y)\ln|y-t_2|dy+\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi U_x(0,y)\ln\left[\pi^2+(y-t_2)^2\right]dy+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi U(0,y)\frac{\pi}{\pi^2+(y-t_2)^2}dy-\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi U_y(x,\pi)\ln\left[(\pi-x)^2+(\pi-t_2)^2\right]dx+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi U_y(x,0)\ln\left[(\pi-x)^2+t_2{}^2\right]dx+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi U(x,\pi)\frac{\pi-t_2}{(\pi-x)^2+(\pi-t_2)^2}dx+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi U(x,0)\frac{t_2}{(\pi-x)^2+t_2{}^2}dx,t_2\in(0,\pi)\ ;(5)$$

а если $t\in PN$, т.е. $t_2=\pi$, мы будем иметь:

$$U(t_1,\pi)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi U_x(\pi,y)\ln\left[(\pi-t_1)^2+(y-\pi)^2\right]dy+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi U_x(0,y)\ln\left[t_1{}^2+(y-\pi)^2\right]dy+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi U(\pi,y)\frac{\pi-t_1}{(\pi-t_1)^2+(y-\pi)^2}dy+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi U(0,y)\frac{t_1}{t_1{}^2+(y-\pi)^2}dy+\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi U_y(x,0)\ln\left[(x-t_1)^2+\pi^2\right]dx-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi U_y(x,\pi)\ln|x-t_1|dx+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi U(x,0)\frac{\pi}{(x-t_1)^2+\pi^2}dx,t_1\in(0,\pi);(6)$$

при $t\in OP$, т.е. $t_1=0$, имеем:

$$U(0,t_2)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi U_x(\pi,y)\ln\left[\pi^2+(y-t_2)^2\right]dy+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi U_x(0,y)\ln|y-t_2|dy+\int_0^\pi U(\pi,y)\frac{1}{\pi^2+(y-t_2)^2}dy-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi U_y(x,\pi)\ln\left[x^2+(\pi-t_2)^2\right]dx+\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi U_y(x,0)\ln\left[x^2+t_2{}^2\right]dx+$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi U(x,\pi)\frac{\pi-t_2}{x^2+(\pi-t_2)^2}dx+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi U(x,0)\frac{t_2}{x^2+t_2{}^2}dx,t_2\in(0,\pi);\ (7)$$

при $t\in OM$, т.е. $t_2=0$, мы получим:

$$U(t_1,0)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi U_x(\pi,y)\ln\left[(\pi-t_1)^2+y^2\right]dy+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi U_x(0,y)\ln\left[t_1{}^2+y^2\right]dy+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi U(\pi,y)\frac{\pi-t_1}{(\pi-t_1)^2+y^2}dy+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi U(0,y)\frac{t_1}{t_1{}^2+y^2}dy-\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi U_y(x,\pi)\ln\left[(x-t_1)^2+\pi^2\right]dx+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi U_y(x,0)\ln|x-t_1|dx+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi U(x,\pi)\frac{\pi}{(x-t_1)^2+\pi^2}dx,t_1\in(0,\pi).\ (8)$$

Итак, для определения граничных значений

$$U(\pi,z),U(z,\pi),U(0,z),U(z,0),U_x(\pi,z),U_y(z,\pi),U_x(0,z),U_y(z,0),$$

входящих в разложение (4), мы имеем восемь условий.

Замечание. Подобные условия можно получить и для частных производных U_x и U_y, если рассмотреть соотношения

$$\int_D \Delta U(x,y)V_x(s-t)ds=0,s=(x,y),t=(t_1,t_2)$$

и

$$\int_D \Delta U(x,y)V_y(s-t)ds=0,s=(x,y),t=(t_1,t_2).$$

Но, эти условия, в отличии от условий для граничных значений U будут содержать сингулярность.

Матрицу полученной системы, относительно вышеуказанных неизвестных, содержащую восемь соотношений, обозначим через A. Тогда мы получим систему:

$$AW=F(W),\ (9)$$

где

$$W^T=(U(\pi,z),U(z,\pi),U(0,z),U(z,0),U_x(\pi,z),U_y(z,\pi),U_x(0,z),U_y(z,0)),$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{12} & 0 & \alpha_{13} & 0 & \alpha_{14} & 0 \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{23} & 0 & \alpha_{24} & 0 \\ 0 & \beta_{11} & 0 & \beta_{12} & 0 & \beta_{13} & 0 & \beta_{14} \\ 0 & \beta_{21} & 0 & \beta_{22} & 0 & \beta_{23} & 0 & \beta_{24} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F^T = (F_1, F_2, ..., F_8).$$

Если будет выполнено условие $\det A \neq 0$, то система (9) может быть приведена к нормальному виду относительно W. Легко заметить, что выполнение условия $\det A \neq 0$ равносильно следующему:

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_{13} & 0 & \alpha_{14} & 0 \\ \alpha_{23} & 0 & \alpha_{24} & 0 \\ 0 & \beta_{13} & 0 & \beta_{14} \\ 0 & \beta_{23} & 0 & \beta_{24} \end{pmatrix} \neq 0. \quad (10)$$

Таким образом, для задачи (1)-(2) доказана

Теорема. Если выполняется условие (10), то краевая задача (1)-(2) фредгольмова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М., Наука, 1971, 528 с.
2. Ахмедов Р. Г. Исследование решений нелокальных граничных задач для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с общими линейными граничными условиями. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Баку, 1987.
3. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных-М., Наука, 1981, 448.с.

2021. Volume 5, Number 2 Pages 93-104

UOT:517.968

FRACTIONAL INTEGRALS INVOLVING THE FOX'S *H*-FUNCTION

VIRENDRA KUMAR

Formerly Scientist-B

Defence Research and Development Organisation, India

Vkumar10147@yahoo.com

ABSTRACT

In the present paper a new pair of fractional integral operators involving a general class of functions is introduced and studied. The fractional integral operators introduced and studied in this paper generalize the fractional integral operators studied by Saxena and Kumbhat [1], Saigo [2], Erdélyi-Kober [3, 4] and Riemann-Liouville [5]. Fractional integrals involving the Fox's *H*-function are obtained. Finally, we obtain interesting special cases of the main results.

Keywords: fractional integral operators,*H*-function, general class of functions, fractional integrals

FOX-H FUNKSİYALARININ CƏLB OLUNDUĞU KƏSRLİ İNTEQRALLAR

XÜSALƏ

Məqalədə ümumi funksiyalar sinfini əhatə edən kəsrli inteqral operatorların yeni cütü təqdim olunur və tədqiq edilir. Bu məqalədə təqdim olunan və tədqiq edilən kəsr inteqral operatorları Saxena və Kumbhat [34], Saigo [37] tərəfindən öyrənilən kəsr inteqral operatorlarını ümumiləşdirir. , Erd´elyi-Kober [1, 14] və Riemann-Liouville [4]. Foksun H funksiyasını əhatə edən kəsrli inteqrallar alınır. Nəhayət, əsas nəticələrin maraqlı xüsusi hallarını əldə edirik.

Açar sözlər: Kəsr inteqral operatorları; H funksiyası; funksiyaların ümumi sinfi; kəsr inteqralları.

Introduction. Fractional calculus is a significant topic in mathematical analysis due to its increasing range of applications. During the past three decades fractional calculus has gained importance mainly due to its applications in the fields of Science and engineering as a growing number of works in science and engineering deal with ‘Fractional Order Equations’ which involve derivatives and integrals of non-integer order. For details one can refer to the monographs and articles [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]. In the recent years, the Riemann-Liouville fractional integral operator has gained importance due to its demonstrated applications in applied sciences, such as fractional reaction, fractional diffusion, stochastic theory and dynamical system etc.. Several authors including Goyal and Mukherjee [15], Goyal and Goyal [16], Gupta, Jain and Kumawat [17], Gupta and Gurjar [18, 19], Jain and Pathan [20], Kilbas [8], Kilbas and Saigo [7], Kilbas, Srivastava and Trujillo [21], Kiryakova [9, 10], Srivastava, Lin and Wang [12], Srivastava and Saxena [13], Saxena, Mathai and Haubold [14] and Saxena and Pogány [22] have contributed a lot in the field of fractional calculus. In the present paper fractional integrals involving the Fox's *H*-function are obtained.

Now, we give some important definitions.

Definition 1. The Fox's *H*-function occurring in this paper is defined and represented in the following manner [23, p. 10, eq. (2.1.1)]:

$$H[z] = H_{P,Q}^{M,N}\left[z\Big|{(A_J,\alpha_J)_{1,P} \atop (B_J,\beta_J)_{1,Q}}\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_L \phi(\varepsilon) z^{\varepsilon} d\varepsilon\,, (1)$$

Where $i=\sqrt{-1}$, L is a contour which goes from $c-i\infty$ to $c+i\infty$and

$$\phi(\varepsilon) = \frac{\prod_{J=1}^{M} \Gamma(B_J-\beta_J\varepsilon)\prod_{J=1}^{N} \Gamma(1-A_J+\alpha_J\varepsilon)}{\prod_{J=M+1}^{Q} \Gamma(1-B_J+\beta_J\varepsilon)\prod_{J=N+1}^{P} \Gamma(A_J-\alpha_J\varepsilon)}\,. (2)$$

For detailed and comprehensive account of the H-function one may refer to the books written by Kilbas and Saigo [24]; Mathai, Saxena and Haubold [25]; Prudnikov, Brychkov and Marichev [26] and Srivastava, Gupta and Goyal [23].

Definition 2. The author [27] introduced a general of functions defined in the following form (see also [28, 29, 30, 31]):

$$V_n(x) = V_n^{h_m,d,g_j}[p,\tau,k,w,q,k_m,a_j,b_r,\alpha,\beta,\delta;\, x]$$

$$= \lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-p)^n\prod_{m=1}^{t}\,[(h_m)_{n+k_m}](d+\alpha n+\beta)^{-\tau}\left(\frac{x}{2}\right)^{nk+dw+q}}{\prod_{j=1}^{s}\,\left[(g_j)_{n+a_j}\right]\prod_{r=1}^{u}\,[(d)_{\alpha n\delta+b_r}]}\,, (3)$$

where

(i)$p,\ k,\ w,\ q,\ \beta,\delta,\ k_m,\ a_j,b_r(m=1,\dots,t;\ j=1,\dots,s;\ r=1,\dots,u)$ are real numbers.

(ii) t,s and u are natural numbers.

(iii) $h_m,g_j\geq 1\ (m=1,\dots,t;\ j=1,\dots,s)$ and d may be real or complex.

(iv) $\alpha>0,\ Re(\tau)>0,\ Re(d)>0,\ x$ is a variable and λ is an arbitrary constant.

(v) The series on the right hand side of (3) converges absolutely if $t<s$ or $t=s$ with $\left|p\left(\frac{x}{2}\right)^k\right|\leq 1$.

For detail of convergence conditions of the series on the right hand side of (3) one may refer to the paper [28].

Remark 3. The general class of functions defined by (3) is quite general in nature as it unifies and extends a number of useful functions such as unified Riemann-Zeta function [32], generalized hypergeometric function [33], Bessel function [34], Wright's generalized Bessel function [35], Struve's function [34], Lommel's function [34], generalized Mittag-Leffler function [36], exponential function, sine function, cosine function and MacRobert'sE-function [33] etc.(see, e.g.[27, 29]).

Definition 4. Two new fractional integral operators are hereby introduced and defined as follows:

$$I_x^{\mu,\rho,v}[f(t)] = \frac{x^{-\mu-\rho-v-1}}{\Gamma(\rho)}\int_0^x t^{\mu}(x-t)^{\rho-1}V_n\left[z\left(1-\frac{t}{x}\right)\right] f(t)dt (4)$$

and

$$J_x^{\mu,\rho,v}[f(t)] = \frac{x^{\mu}}{\Gamma(\rho)}\int_x^{\infty} t^{-\mu-\rho-v-1}(t-x)^{\rho-1}V_n\left[z\left(1-\frac{x}{t}\right)\right] f(t)dt, (5)$$

where $\rho > 0$; $\mu, v \in R$ and $V_n(z)$ is the general class of functions defined by (3)

Special cases of fractional integral operators.

In this section we mention some special cases of the fractional integral operators defined by (4) and (5).

(i) If we take $p = -2, m = 2, j = 1, r = 1,\ h_1 = \eta,\ h_2 = \gamma,\ k_1 = 0,\ k_2 = 0,\ k = 1,\ d = 1,$ $\tau = 1,\ w = 0,\ q = 0,\ g_1 = \zeta,\ a_1 = 0,\ \alpha = 1, \beta = -1, \delta = 1, b_1 = -1$ and $\lambda = 1$in (4) and (5), the general class of functions reduces to the Gauss's hypergeometric function [33] and we obtain in essence the following fractional integral operators:

$$I_x^{\mu,\rho,v}[f(t)] = \frac{x^{-\mu-\rho-v-1}}{\Gamma(\rho)} \int_0^x t^{\mu}(x-t)^{\rho-1}\ {}_2F_1\left(\eta, \gamma;\ \zeta;\ z\left(1-\frac{t}{x}\right)\right) f(t)dt \ (6)$$

and

$$J_x^{\mu,\rho,v}[f(t)] = \frac{x^{\mu}}{\Gamma(\rho)} \int_x^{\infty} t^{-\mu-\rho-v-1}(t-x)^{\rho-1}\ {}_2F_1\left(\eta, \gamma;\ \zeta;\ z\left(1-\frac{x}{t}\right)\right) f(t)dt, (7)$$

where $\rho > 0$; $\mu, v \in R$ and ${}_2F_1(z)$ stands for the Gauss's hypergeometric function.

(ii) If we take $z = 1,\ \zeta = \rho$ and $v = -1$ in (6) and (7), we obtain the following fractional integral operators introduced by Saxena and Kumbhat [1].

$$I_x^{\mu,\rho}[f(t)] = \frac{-\mu-\rho}{\Gamma(\rho)} \int_0^x t^{\mu}(x-t)^{\rho-1}\ {}_2F_1\left(\eta, \gamma;\ \rho;\ 1-\frac{t}{x}\right) f(t)dt (8)$$

and

$$J_x^{\mu,\rho}[f(t)] = \frac{x^{\mu}}{\Gamma(\rho)} \int_x^{\infty} t^{-\mu-\rho}(t-x)^{\rho-1}\ {}_2F_1\left(\eta, \gamma;\ \rho;\ 1-\frac{x}{t}\right) f(t)dt, (9)$$

where $\rho > 0$ and $\mu \in R$.

(iii) If we take $z = 0,\ \eta = \gamma = \ \zeta = 1$ and $v = -1$ in (6), we obtain the following classicalErdélyi-Kober[3, 4]fractional integraloperator:

$$I_x^{\mu,\rho}[f(t)] = \frac{x^{-\mu-\rho}}{\Gamma(\rho)} \int_0^x t^{\mu}(x-t)^{\rho-1} f(t)dt, (10)$$

where $\rho > 0$ and $\mu \in R$.

(iv) If we take $z = 1,\ \eta = \rho + \ \varepsilon,\ \gamma = -\sigma,\ \zeta = \rho,\ \mu = 0$ and $v = \varepsilon - 1$ in (6) and (7), we obtain the following fractional integral operators introduced by Saigo [2]:

$$I_x^{\rho,\varepsilon}[f(t)] = \frac{x^{-\rho-\ \varepsilon}}{\Gamma(\rho)} \int_0^x (x-t)^{\rho-1}\ {}_2F_1\left(\rho+\varepsilon, -\sigma;\ \rho;\ 1-\frac{t}{x}\right) f(t)dt (11)$$

and

$$J_x^{\rho,\varepsilon}[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_x^{\infty} t^{-\rho-\varepsilon}(t-x)^{\rho-1}\ {}_2F_1\left(\rho+\varepsilon, -\sigma;\ \rho;\ 1-\frac{x}{t}\right) f(t)dt, (12)$$

where $\rho > 0$ and $\varepsilon \in R$.

(v) If we take $\varepsilon = \sigma = -\rho$ in (11) and (12), we obtain the following Riemann-Liouville and Weyl fractional integral operators [5] respectively:

$$I_x^{\rho}[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_0^x (x-t)^{\rho-1} f(t)dt \quad (13)$$

and

$$J_x^{\rho}[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_x^{\infty} (t-x)^{\rho-1} f(t)dt, \quad (14)$$

where $\rho > 0$.

(vi) If we take $p = 1,\ m = 1, j = 2,\ r = 1,\ h_1 = 1,\ g_1 = \frac{3}{2},\ g_2 = 1,\ \tau = 1, k = 2, w = 1,\ q = 1,\ k_1 = 0,\ a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ b_1 = \frac{1}{2}, \alpha = 1,\ \beta = \frac{1}{2}, \delta = 1$ and $\lambda = \frac{1}{\Gamma(d)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}$ in (4) and (5), the general class of functions reduces to the Struve's function [34, p. 38, eq. 55] and we obtain in essence the following fractional integral operators:

$$I_x^{\mu,\rho,v}[f(t)] = \frac{x^{-\mu-\rho-v-1}}{\Gamma(\rho)} \int_0^x t^{\mu}(x-t)^{\rho-1} H_d\left[z\left(1-\frac{t}{x}\right)\right] f(t)dt \quad (15)$$

and

$$J_x^{\mu,\rho,v}[f(t)] = \frac{x^{\mu}}{\Gamma(\rho)} \int_x^{\infty} t^{-\mu-\rho-v-1}(t-x)^{\rho-1} H_d\left[z\left(1-\frac{x}{t}\right)\right] f(t)dt, \quad (16)$$

where $\rho > 0;\ \mu, v \in R$ and $H_d(y)$ stands for the Struve's function.

(vii) If we take $p = 1,\ m = 1, j = 2,\ r = 1,\ h_1 = 1,\ g_1 = \frac{\mu'+v'+3}{2},\ g_2 = \frac{\mu'-v'+3}{2},\ \tau = 1, k = 2, w = \mu',\ q = 1,\ k_1 = 0,\ a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ b_1 = -1,\ d = 1,\ \alpha = 1,\ \beta = -1,\ \delta = 1$ and $\lambda = \frac{2^{\mu'+1}}{(\mu'+v'+1)(\mu'-v'+1)}$ in (4) and (5), the general class of functions reduces to the Lommel's function [34, p. 40, eq. 69] and we obtain in essence the following fractional integral operators:

$$I_x^{\mu,\rho,v}[f(t)] = \frac{x^{-\mu-\rho-v-1}}{\Gamma(\rho)} \int_0^x t^{\mu}(x-t)^{\rho-1} s_{\mu',v'}\left[z\left(1-\frac{t}{x}\right)\right] f(t)dt \quad (17)$$

and

$$J_x^{\mu,\rho,v}[f(t)] = \frac{x^{\mu}}{\Gamma(\rho)} \int_x^{\infty} t^{-\mu-\rho-v-1}(t-x)^{\rho-1} s_{\mu',v'}\left[z\left(1-\frac{x}{t}\right)\right] f(t)dt, \quad (18)$$

where $\rho > 0;\ \mu, v \in R$ and $s_{\mu',v'}(y)$ stands for the Lommel's function.

(viii) If we take $p = -2,\ m = 1, j = 1,\ r = 1,\ h_1 = h,\ g_1 = g,\ \tau = 1, k = 1, w = 0,\ q = 0,\ k_1 = 0,\ a_1 = 0,\ b_1 = -1,\ \beta = -1, \delta = 1$ and $\lambda = \frac{1}{\Gamma(d)}$ in (4) and (5), the general class of functions reduces to the generalized Mittag-Leffler function studied by Salim [36] and we obtain in essence the following fractional integral operators:

$$I_x^{\mu,\rho,v}[f(t)] = \frac{x^{-\mu-\rho-v-1}}{\Gamma(\rho)} \int_0^x t^{\mu}(x-t)^{\rho-1} E_{\alpha,d}^{h,g}\left[z\left(1-\frac{t}{x}\right)\right] f(t)dt \quad (19)$$

and

$$J_x^{\mu,\rho,v}[f(t)] = \frac{x^{\mu}}{\Gamma(\rho)} \int_x^{\infty} t^{-\mu-\rho-v-1}(t-x)^{\rho-1} E_{\alpha,d}^{h,g}\left[z\left(1-\frac{x}{t}\right)\right] f(t)dt, \quad (20)$$

where $\rho > 0$; $\mu, v \in R$ and $E_{\alpha,d}^{h,g}(y)$ stands for the generalized Mittag-Leffler function.

If we take $g = 1$ in (19) and (20), the generalized Mittag-Leffler function reduces to the generalized Mittag-Leffler function $E_{\alpha,d}^{h}(y)$ introduced by Prabhakar [37].

If we take $h = 1, g = 1$ in (19) and (20), the generalized Mittag-Leffler function reduces to the generalized Mittag-Leffler function $E_{\alpha,d}(y)$ introduced by Wiman [38].

If we take $h = 1, g = 1, d = 1$ in (19) and (20), the generalized Mittag-Leffler function reduces to the Mittag-Leffler function $E_{\alpha}(y)$ [39, 40].

Remark 5. Several other fractional integral operators involving special functions may be obtained by specializing the parameters of the general class of functions defined by (3) (see[27, 29]).

Main theorems.

In this section we find the images of the *H*-function in the fractional integral operators defined by (4) and (5) in the form of theorems.

Theorem 1. Letthe following conditions be satisfied

(i) $\mathrm{Re}\left(\rho + nk + dw + q + \xi + \min_{1 \le J \le M}\left(\frac{B_J}{\beta_J}\right)\right) > 0$,

(ii) $\mathrm{Re}\left(\mu + \sigma + \zeta + \min_{1 \le J \le M}\left(\frac{B_J}{\beta_J}\right)\right) > -1$,

(iii) $min(\sigma, \zeta, \xi) \ge 0$ (not all simultaneously zero),

(iv) $|arg\ y| < \frac{1}{2}A\pi$,where

$$A = \sum_{J=1}^{N} \alpha_J - \sum_{J=N+1}^{P} \alpha_J + \sum_{J=1}^{M} \beta_J - \sum_{J=M+1}^{Q} \beta_J \quad (21)$$

and the conditions mentioned with (3) are satisfied. Then the following result holds:

$$I_x^{\mu,\rho,v}\left[t^{\sigma} H_{P,Q}^{M,N}\left[yt^{\zeta}(x-t)^{\xi}\Big|_{(B_J,\beta_J)_{1,Q}}^{(A_J,\alpha_J)_{1,P}}\right]\right] = \frac{x^{-\mu-\rho-v-1}}{\Gamma(\rho)} \int_0^x t^{\mu+\sigma}(x-t)^{\rho-1} V_n\left[z\left(1-\frac{t}{x}\right)\right] H_{P,Q}^{M,N}\left[yt^{\zeta}(x-t)^{\xi}\Big|_{(B_J,\beta_J)_{1,Q}}^{(A_J,\alpha_J)_{1,P}}\right] dt$$

$$= \frac{\lambda x^{\sigma-v-1}}{\Gamma(\rho)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-p)^n \prod_{m=1}^{t} \left[(h_m)_{n+k_m}\right](d+\alpha n+\beta)^{-\tau}\left(\frac{z}{2}\right)^{nk+dw+q}}{\prod_{j=1}^{s}\left[(g_j)_{n+a_j}\right]\prod_{r=1}^{u}\left[(d)_{\alpha n\delta+b_r}\right]}$$

$$\times H_{P+2,Q+1}^{M,N+2}\left[yx^{\zeta+\xi}\Big|_{(-\rho-nk-dw-q-\mu-\sigma,\zeta+\xi),(B_J,\beta_J)_{1,Q}}^{(-\mu-\sigma,\zeta),(1-\rho-nk-dw-q,\xi),(A_J,\alpha_J)_{1,P}}\right]. \quad (22)$$

Theorem 2. Let the following conditions be satisfied

(i) $\mathrm{Re}\left(\rho + nk + dw + q + \xi + \min_{1\le J\le M}\left(\frac{B_J}{\beta_J}\right)\right) > 0,$

(ii) $\mathrm{Re}\left(\mu + v - \sigma + \zeta + \min_{1\le J\le M}\left(\frac{B_J}{\beta_J}\right)\right) > -1,$

(iii) $\min(\sigma,\zeta,\xi) \ge 0$ (not all simultaneously zero),

(iv) $|\arg y| < \frac{1}{2}A\pi$, where A is defined by (21) and the conditions mentionedwith (3) are satisfied. Then the following result holds:

$$J_x^{\mu,\rho,v}\left[t^{\sigma} H_{P,Q}^{M,N}\left[yt^{-\zeta}\left(1-\frac{x}{t}\right)^{\xi} \middle| \begin{matrix}(A_J,\alpha_J)_{1,P}\\(B_J,\beta_J)_{1,Q}\end{matrix}\right]\right]$$

$$= \frac{x^{\mu}}{\Gamma(\rho)}\int_x^{\infty} t^{\sigma-\mu-\rho-v-1}(t-x)^{\rho-1}V_n\left[z\left(1-\frac{x}{t}\right)\right] H_{P,Q}^{M,N}\left[yt^{-\zeta}\left(1-\frac{x}{t}\right)^{\xi} \middle| \begin{matrix}(A_J,\alpha_J)_{1,P}\\(B_J,\beta_J)_{1,Q}\end{matrix}\right]dt$$

$$= \frac{\lambda x^{\sigma-v-1}}{\Gamma(\rho)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-p)^n\prod_{m=1}^{t}\left[(h_m)_{n+k_m}\right](d+\alpha n+\beta)^{-\tau}\left(\frac{z}{2}\right)^{nk+dw+q}}{\prod_{j=1}^{s}\left[(g_j)_{n+a_j}\right]\prod_{r=1}^{u}\left[(d)_{\alpha n\delta+b_r}\right]}$$

$$\times H_{P+2,Q+1}^{M,N+2}\left[yx^{-\zeta} \middle| \begin{matrix}(\sigma-\mu-v,\zeta),(1-\rho-nk-dw-q,\xi),(A_J,\alpha_J)_{1,P}\\(\sigma-\mu-\rho-nk-dw-q-v,\zeta+\xi),(B_J,\beta_J)_{1,Q}\end{matrix}\right]. \quad (23)$$

Proof. To prove (22), first of all we express the *I*-fractional integral operator involved in its left hand side in the integral form with the help of (4). Then, we express general class of functions in series form using (3) and *H*-function in contour form with the help of (1). Next, we interchange the order of summation and contour integral with the *t*-integral which is permissible under the conditions mentioned with the Theorem1. Thus, the lefthand side of (22) assumes the following form (say △):

$$\triangle = \lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-p)^n\prod_{m=1}^{t}\left[(h_m)_{n+k_m}\right](d+\alpha n+\beta)^{-\tau}\left(\frac{z}{2}\right)^{nk+dw+q}}{\prod_{j=1}^{s}\left[(g_j)_{n+a_j}\right]\prod_{r=1}^{u}\left[(d)_{\alpha n\delta+b_r}\right]}x^{-nk-dw-q-\mu-\rho-v-1}$$

$$\times\frac{1}{2\pi i}\int_L\phi(\varepsilon)y^{\varepsilon}\left[\frac{1}{\Gamma(\rho)}\int_0^x t^{\mu+\sigma+\zeta\varepsilon}(x-t)^{\rho+nk+dw+q+\xi\varepsilon-1}dt\right]d\varepsilon. \quad (24)$$

Now, evaluating the t-integral with the help of the following result [5, p. 185, Eq. (7)]:

$$\int_0^y x^{v-1}(y-x)^{\mu-1}dx = y^{\mu+v-1}\frac{\Gamma(\mu)\Gamma(v)}{\Gamma(\mu+v)}, \quad (25)$$

where $\mathrm{Re}(\mu) > 0$ and $\mathrm{Re}(v) > 0$ we get

$$\triangle = \frac{\lambda x^{\sigma-v-1}}{\Gamma(\rho)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-p)^n\prod_{m=1}^{t}\left[(h_m)_{n+k_m}\right](d+\alpha n+\beta)^{-\tau}\left(\frac{z}{2}\right)^{nk+dw+q}}{\prod_{j=1}^{s}\left[(g_j)_{n+a_j}\right]\prod_{r=1}^{u}\left[(d)_{\alpha n\delta+b_r}\right]}\times\frac{1}{2\pi i}\int_L\phi(\varepsilon)\left(yx^{\zeta+\xi}\right)^{\varepsilon}\frac{\Gamma(\rho+nk+dw+q+\xi\varepsilon)\Gamma(\mu+\sigma+\zeta\varepsilon+1)}{\Gamma(1+\rho+nk+dw+q+\xi\varepsilon+\zeta\varepsilon+\mu+\sigma)}d\varepsilon, \quad (26)$$

where $\mathrm{Re}(\rho+nk+dw+q+\xi\varepsilon) > 0$ and $\mathrm{Re}(\mu+\sigma+\zeta\varepsilon) > -1$.

Now, reinterpreting the result (26) in terms of the H-function with the help of (1), we easily arrive at the required result (22).

The result (23) may be proved by processing on the similar lines given in the proof of (22)and using the following result [5, p. 201, Eq. (6)]:

$$\int_y^\infty x^{-\lambda}(x-y)^{\mu-1}dx = y^{\mu-\lambda}\frac{\Gamma(\lambda-\mu)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda)}, \quad (27)$$

where $0 < \mathrm{Re}(\mu) < \mathrm{Re}(\lambda)$.

Remark 5. The images of the H-function in all fractional integral operators which follow the special cases of our main fractional integral operators defined by (4) and (5) may also be obtained on making suitable substitutions. But, we do not record them here.

Special cases of the results (22) and (23)

In this section we mention some important special cases of the results (22) and (23).

(i) By using (vi) of **Special cases of fractional integral operators**in (22) and (23), the general class of functions reduces to the Struve's function [34, p. 38, eq. 55] and we get

$$\int_0^x t^{\mu+\sigma}(x-t)^{\rho-1}H_d\left[z\left(1-\frac{t}{x}\right)\right]H_{P,Q}^{M,N}\left[yt^{\zeta}(x-t)^{\xi}\Big|_{(B_J,\beta_J)_{1,Q}}^{(A_J,\alpha_J)_{1,P}}\right]dt$$

$$= x^{\sigma+\mu+\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+d+1}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+n+d\right)}H_{P+2,Q+1}^{M,N+2}\left[yx^{\zeta+\xi}\Big|_{(-1-\rho-2n-d-\mu-\sigma,\zeta+\xi),(B_J,\beta_J)_{1,Q}}^{(-\mu-\sigma,\zeta),(2-\rho-2n-d,\xi),(A_J,\alpha_J)_{1,P}}\right] \quad (28)$$

and

$$\int_x^\infty t^{\sigma-\rho-\mu-v-1}(t-x)^{\rho-1}H_d\left[z\left(1-\frac{x}{t}\right)\right]H_{P,Q}^{M,N}\left[yt^{-\zeta}\left(1-\frac{x}{t}\right)^{\xi}\Big|_{(B_J,\beta_J)_{1,Q}}^{(A_J,\alpha_J)_{1,P}}\right]dt$$

$$= x^{\sigma-\mu-v-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+d+1}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+n+d\right)}$$

$$\times H_{P+2,Q+1}^{M,N+2}\left[yx^{-\zeta}\Big|_{(\sigma-1-\rho-\mu-2n-d-v,\zeta+\xi),(B_J,\beta_J)_{1,Q}}^{(\sigma-\mu-v,\zeta),(-\rho-2n-d,\xi),(A_J,\alpha_J)_{1,P}}\right], \quad (29)$$

where $H_d(y)$ stands for the Struve's function.

(ii) By using (vii) of **Special cases of fractional integral operators**in (22) and (23), the general class of functions reduces to the Lommel's function [34, p. 40, eq. 69] and we get

$$\int_0^x t^{\mu+\sigma}(x-t)^{\rho-1}s_{\mu',v'}\left[z\left(1-\frac{t}{x}\right)\right]H_{P,Q}^{M,N}\left[yt^{\zeta}(x-t)^{\xi}\Big|_{(B_J,\beta_J)_{1,Q}}^{(A_J,\alpha_J)_{1,P}}\right]dt$$

$$= x^{\sigma+\mu+\rho}\frac{2^{\mu'+1}}{(\mu'+v'+1)(\mu'-v'+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\mu'+1}}{\left(\frac{\mu'+v'+3}{2}\right)_n\left(\frac{\mu'-v'+3}{2}\right)_n}$$

$$\times H_{P+2,Q+1}^{M,N+2}\left[yx^{\zeta+\xi}\Big|_{(-1-\rho-2n-\mu'-\mu-\sigma,\zeta+\xi),(B_J,\beta_J)_{1,Q}}^{(-\mu-\sigma,\zeta),(2-\rho-2n-\mu',\xi),(A_J,\alpha_J)_{1,P}}\right] \quad (30)$$

and

$$\int_x^\infty t^{\sigma-\mu-\rho-v-1}(t-x)^{\rho-1}s_{\mu',v'}\left[z\left(1-\frac{x}{t}\right)\right]H_{P,Q}^{M,N}\left[yt^{-\zeta}\left(1-\frac{x}{t}\right)^{\xi}\Big|_{(B_J,\beta_J)_{1,Q}}^{(A_J,\alpha_J)_{1,P}}\right]dt$$

$$= x^{\sigma-\mu-v-1}\frac{2^{\mu'+1}}{(\mu'+v'+1)(\mu'-v'+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\mu'+1}}{\left(\frac{\mu'+v'+3}{2}\right)_n\left(\frac{\mu'-v'+3}{2}\right)_n}$$

$$\times H_{P+2,Q+1}^{M,N+2}\left[yx^{-\zeta}\Big|_{(\sigma-1-\rho-2n-\mu'-\mu-v,\zeta+\xi),(B_J,\beta_J)_{1,Q}}^{(\sigma-\mu-v,\zeta),(-\rho-2n-\mu',\xi),(A_J,\alpha_J)_{1,P}}\right], \quad (31)$$

where $s_{\mu',v'}(y)$stands for the Lommel's function.

(iii) By using (viii) of **Special cases of fractional integral operators**in (22) and (23), the general class of functions reduces to the generalized Mittag-Leffler function [36] and we get

$$\int_0^x t^{\mu+\sigma}(x-t)^{\rho-1}E_{\alpha,d}^{h,g}\left[z\left(1-\frac{t}{x}\right)\right]H_{P,Q}^{M,N}\left[yt^{\zeta}(x-t)^{\xi}\Big|_{(B_J,\beta_J)_{1,Q}}^{(A_J,\alpha_J)_{1,P}}\right]dt$$

$$= x^{\sigma+\mu+\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(h)_n\, z^n}{(g)_n\,\Gamma(d+\alpha n)}H_{P+2,Q+1}^{M,N+2}\left[yx^{\zeta+\xi}\Big|_{(-\rho-n-\mu-\sigma,\zeta+\xi),(B_J,\beta_J)_{1,Q}}^{(-\mu-\sigma,\zeta),(1-\rho-n,\xi),(A_J,\alpha_J)_{1,P}}\right] \quad (32)$$

and

$$\int_x^\infty t^{\sigma-\mu-\rho-v-1}(t-x)^{\rho-1}E_{\alpha,d}^{h,g}\left[z\left(1-\frac{x}{t}\right)\right]H_{P,Q}^{M,N}\left[yt^{-\zeta}\left(1-\frac{x}{t}\right)^{\xi}\Big|_{(B_J,\beta_J)_{1,Q}}^{(A_J,\alpha_J)_{1,P}}\right]dt$$

$$= x^{\sigma-\mu-v-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(h)_n\, z^n}{(g)_n\,\Gamma(d+\alpha n)}H_{P+2,Q+1}^{M,N+2}\left[yx^{-\zeta}\Big|_{(\sigma-\rho-n-\mu-v,\zeta+\xi),(B_J,\beta_J)_{1,Q}}^{(\sigma-\mu-v,\zeta),(1-\rho-n,\xi),(A_J,\alpha_J)_{1,P}}\right], \quad (33)$$

where$E_{\alpha,d}^{h,g}(y)$stands for the generalized Mittag-Lefflerfunction.

(iv) If we take $p=2,\ r=1,\ d=1,\ t=P, s=Q,\ \tau=1, k=1, w=0,\ q=0,\ k_m=0,\ a_j=0,\ b_1=-1, \alpha=1,\ \beta=-1, \delta=1$ and $\lambda=\frac{\prod_{m=1}^{P}\Gamma(h_m)}{\prod_{j=1}^{Q}\Gamma(g_j)}$ in (22) and (23), the general class of functions reduces to the MacRobert'sE-function [33] and we get

$$\int_0^x t^{\mu+\sigma}(x-t)^{\rho-1}E\left[P;\ (h_P);Q;\ (g_Q);\ \frac{x}{z(x-t)}\right]H_{P,Q}^{M,N}\left[yt^{\zeta}(x-t)^{\xi}\Big|_{(B_J,\beta_J)_{1,Q}}^{(A_J,\alpha_J)_{1,P}}\right]dt$$

$$= x^{\sigma+\mu+\rho}\frac{\prod_{m=1}^{P}\Gamma(h_m)}{\prod_{j=1}^{Q}\Gamma(g_j)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\prod_{m=1}^{P}(h_m)_n(-z)^n}{\prod_{j=1}^{Q}(g_j)_n n!}\times H_{P+2,Q+1}^{M,N+2}\left[yx^{\zeta+\xi}\Big|_{(-\rho-n-\mu-\sigma,\zeta+\xi),(B_J,\beta_J)_{1,Q}}^{(-\mu-\sigma,\zeta),(1-\rho-n,\xi),(A_J,\alpha_J)_{1,P}}\right] \quad (34)$$

and

$$\int_x^\infty t^{\sigma-\mu-\rho-v-1}(t-x)^{\rho-1}E\left[P;\ (h_P);Q;\ (g_Q);\ \frac{t}{z(t-x)}\right]\times H_{P,Q}^{M,N}\left[yt^{-\zeta}\left(1-\frac{x}{t}\right)^{\xi}\Big|_{(B_J,\beta_J)_{1,Q}}^{(A_J,\alpha_J)_{1,P}}\right]dt$$

$$= x^{\sigma-\mu-v-1}\frac{\prod_{m=1}^{P}\Gamma(h_m)}{\prod_{j=1}^{Q}\Gamma(g_j)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\prod_{m=1}^{P}(h_m)_n(-z)^n}{\prod_{j=1}^{Q}(g_j)_n n!}\times H_{P+2,Q+1}^{M,N+2}\left[yx^{-\zeta}\Big|_{(\sigma-\rho-n-\mu-v,\zeta+\xi),(B_J,\beta_J)_{1,Q}}^{(\sigma-\mu-v,\zeta),(1-\rho-n,\xi),(A_J,\alpha_J)_{1,P}}\right]. \quad (35)$$

where $E\ [P;\ (h_P);Q;\ (g_Q);\ y]$stands for the MacRobert's E-function

(v) If we take $p = 2,\ m = 1, j = 2,\ r = 1,\ h_1 = 1,\ g_1 = 1,\ g_2 = 1,\ \tau = 1, k = 1,\ w = 0,\ q = 0,\ k_1 = 0,\ a_1 = 0, a_2 = 0, b_1 = 0,\ \beta = 0,\ \delta = 1$ and $\lambda = \frac{1}{\Gamma(d)}$ in (22) and (23), the general class of functions reduces to the Wright's generalized Bessel function [35] and by reducing the *H*-function therein to the Wright's generalized hypergeometric function by the following relationship [23, p.19, Eq. (2.6.11)]:

$$H_{P,Q+1}^{1,P}\left[-x \mid \begin{matrix} (1-A_J,\alpha_J)_{1,P} \\ (0,1),(1-B_J,\beta_J)_{1,Q} \end{matrix}\right] = {}_P\psi_Q\left[\begin{matrix} (A_J,\alpha_J)_{1,P}; \\ (B_J,\beta_J)_{1,Q}; \end{matrix}\ x\right], \quad (36)$$

we get

$$\int_0^x t^{\mu+\sigma}(x-t)^{\rho-1} J_d^{\alpha}\left[z\left(1-\frac{t}{x}\right)\right] {}_P\psi_Q\left[\begin{matrix} (A_J,\alpha_J)_{1,P}; \\ (B_J,\beta_J)_{1,Q}; \end{matrix}\ yt^{\zeta}(x-t)^{\xi}\right] dt$$

$$= x^{\sigma+\mu+\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{\Gamma(1+d+\alpha n)\, n!} H_{P+2,Q+2}^{1,P+2}\left[-yx^{\zeta+\xi} \mid \begin{matrix} (-\mu-\sigma,\zeta),(1-\rho-n,\xi),(1-A_J,\alpha_J)_{1,P} \\ (-\rho-n-\mu-\sigma,\zeta+\xi),(0,1),(1-B_J,\beta_J)_{1,Q} \end{matrix}\right] \quad (37)$$

and

$$\int_x^{\infty} t^{\sigma-\mu-\rho-v-1}(t-x)^{\rho-1} J_d^{\alpha}\left[z\left(1-\frac{x}{t}\right)\right] {}_P\psi_Q\left[\begin{matrix} (A_J,\alpha_J)_{1,P}; \\ (B_J,\beta_J)_{1,Q}; \end{matrix}\ yt^{-\zeta}\left(1-\frac{x}{t}\right)^{\xi}\right] dt$$

$$= x^{\sigma-\mu-v-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{\Gamma(1+d+\alpha n)\, n!} H_{P+2,Q+2}^{1,P+2}\left[yx^{-\zeta} \mid \begin{matrix} (\sigma-\mu-v,\zeta),(1-\rho-n,\xi),(1-A_J,\alpha_J)_{1,P} \\ (\sigma-\rho-n-\mu-v,\zeta+\xi),(0,1),(1-B_J,\beta_J)_{1,Q} \end{matrix}\right]. \quad (38)$$

where $J_d^{\alpha}(y)$ stands for the Wright's generalized Bessel function.

(vi) If we take $p = 1,\ m = 1, j = 2,\ r = 1,\ h_1 = 1,\ g_1 = 1,\ g_2 = 1,\ \tau = 1, k = 2,\ w = 1,\ q = 0,\ k_1 = 0,\ a_1 = 0, a_2 = 0, b_1 = 0, \alpha = 1,\ \beta = 0,\ \delta = 1$ and $\lambda = \frac{1}{\Gamma(d)}$ in (22) and (23), the general class of functions reduces to the Bessel function [34] and we get

$$\int_0^x t^{\mu+\sigma}(x-t)^{\rho-1} J_d\left[z\left(1-\frac{t}{x}\right)\right] H_{P,Q}^{M,N}\left[yt^{\zeta}(x-t)^{\xi} \mid \begin{matrix} (A_J,\alpha_J)_{1,P} \\ (B_J,\beta_J)_{1,Q} \end{matrix}\right] dt$$

$$= x^{\sigma+\mu+\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+d}}{\Gamma(1+d+n)\, n!} H_{P+2,Q+1}^{M,N+2}\left[yx^{\zeta+\xi} \mid \begin{matrix} (-\mu-\sigma,\zeta),(1-\rho-2n-d,\xi),(A_J,\alpha_J)_{1,P} \\ (-\rho-2n-d-\mu-\sigma,\zeta+\xi),(B_J,\beta_J)_{1,Q} \end{matrix}\right] \quad (39)$$

and

$$\int_x^{\infty} t^{\sigma-\mu-\rho-v-1}(t-x)^{\rho-1} J_d\left[z\left(1-\frac{x}{t}\right)\right] H_{P,Q}^{M,N}\left[yt^{-\zeta}\left(1-\frac{x}{t}\right)^{\xi} \mid \begin{matrix} (A_J,\alpha_J)_{1,P} \\ (B_J,\beta_J)_{1,Q} \end{matrix}\right] dt$$

$$= x^{\sigma-\mu-v-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+d}}{\Gamma(1+d+n)\, n!} H_{P+2,Q+1}^{M,N+2}\left[yx^{-\zeta} \mid \begin{matrix} (\sigma-\mu-v,\zeta),(1-\rho-2n-d,\xi),(A_J,\alpha_J)_{1,P} \\ (\sigma-\rho-2n-d-\mu-v,\zeta+\xi),(B_J,\beta_J)_{1,Q} \end{matrix}\right]. \quad (40)$$

where $J_d\ (y)$ stands for the Bessel function.

Remark 6. Several other fractional integrals involving special functions may be obtained by specializing the parameters of the general class of functions and *H*-function involved in the results (22) and (23) (see[23, 27, 29]).

REFERENCES

1. R. K. Saxena, R. K. Kumbhat.*A generalization of Kober operators*,Vijnana Parishad AnusandhanPatrika, Vol. 16, p. 31-36, 1973
2. M. Saigo.*A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions*, Math. Rep. Kyushu Univ., Vol. 11, p. 135-143, 1978
3. A. Erdélyi.*On fractional integration and its applications to the theory of Hankel transforms*, Quart. J. Math., Oxford, Second Ser., Vol. 11, No 1, p. 293-303, 1940
4. H. Kober.*On a fractional integral and derivative*. Quart. J. Math., Oxford, Second Ser., Vol. 11, No. 1, p. 193-211, 1940
5. A. Erdélyi, W. Magnus,F.Oberhettinger, F. G. Tricomi. *Tables of Integral Transforms*. Vol. II, McGraw-Hill Book Company, 1954
6. R. Hilfer. *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, Singapore, 2000
7. A. A. Kilbas, M. Saigo.*Fractional Calculus of the H-Function*, Fukuoka Univ. Sci. Rep., Vol. 28, p. 41-51, 1998
8. A. A. Kilbas. *Fractional Calculus of Generalized Wright Function*, Frac. Calc. Appl. Anal., Vol. 8, No. 2, p. 113-126, 2005
9. V. Kiryakova.*The Special Functions of Fractional Calculus as Generalized Fractional Calculus Operators of Some Basic Functions*,Comput. Math. Appl., Vol 8, No. 2, 113-126, 2010
10. V. Kiryakova.*The MultiindexMittag-Leffler Functions as an Important Class of Special Functions of Fractional Calculus*,Comput. Math. Appl., Vol. 59, No. 5, 1885-1895, 2010
11. I. Podlubny.*Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999
12. H. M. Srivastava, Shy-Der Lin, Pin-Yu Wang.*Some Fractional-Calculus Results for the* $\overline{H}$ *-Function Associated with a Class of Feynman Integrals*, Russ. J. Math. Phys., Vol. 13, No. 1, p. 94-100, 2006
13. H. M. Srivastava, R. K. Saxena.*Operators of Fractional Integration and Their Applications,* Appl. Math. Comput., Vol. 118, No. 1, p. 1-52, 2001
14. R. K. Saxena, A. M. Mathai, H. J. Haubold.*Unified Fractional Kinetic Equations and a Fractional Diffusion Equation*, Astrophysics and Space Science, Vol. 290, p. 299-310, 2004
15. S. P. Goyal, R. Mukherjee.*On the Laplace Transform and the Generalized Weyl Fractional Integral Operator Involving the H-Function*, Kyungpook Math. J., Vol. 44, No. 4, p. 481-493, 2004
16. S. P. Goyal, R. Goyal.*A General Theorem for the Generalized Weyl Fractional Integral Operator Involving the Multivariable H-Function*, Taiwanese J. Math., Vol. 8, No. 4, p. 559-568, 2004
17. K. C. Gupta, R. Jain, P. Kumawat. *A study of new Fractional Integral Operators Involving Extended Hurwitz-Lerch zeta Function and Generalized Krätzel Function*, J. Rajasthan Acad. Phys. Sci., Vol. 11, No. 4, p. 339-352, 2012
18. K. Gupta, M. K. Gurjar.*A Study of Unified Finite Integral Involving Hypergeometric Function and General Class of Functions*-I, Inter. J. Mathematical Archive, Vol. 4, No. 4, p. 296-303, 2013
19. K. Gupta, M. K. Gurjar. *A Study of Unified Finite Integral Involving Hypergeometric Function and General Class of Functions*-II. J. Rajasthan Acad. Phys. Sci., Vol. 12, No. 2, p. 213-226, 2013
20. R. Jain, M. A. Pathan.*On Weyl Fractional Integral Operators*,Tamkang J. Math., Vol. 35, No. 2, p. 169-173, 2004
21. A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, j. j. Trujillo.*Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North Holland, Mathematics Studies 204, Elsevier, New York, 2006
22. R. K. Saxena, T. K. Pogány.*On Fractional Integration Formulae for Aleph Functions*, Appl. Math. Comput., Vol. 218, No. 3, p. 985-990, 2011
23. H. M. Srivastava, K. C. Gupta, S. P. Goyal.*The H-functions of One and Two Variables with Applications*, South Asian Publishers, New Delhi and Madras, 1982
24. A. A. Kilbas, M. Saigo.*H-Transforms*: *Theory and Application*, Chapman& Hall/CRC Press, Boca Raton, London, New York, 2004
25. A. M. Mathai, R. K. Saxena, H. J. Haubold.*The H-Function: Theory and Applications*, Springer, New York, 2010
26. A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev.*Integrals and Series*, Vol. 3, *More Special Functions*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1990
27. V. Kumar. A general class of functions and *N*-fractional calculus, J. Rajasthan Acad. Phys. Sci., Vol. 11, No. 3, p. 223-230, 2012

28. V. Kumar.*N*-fractional calculus of general class of functions and Fox's *H*-function, Proc. Natl. Acad. Sci., sec. A, Phys. Sci., Vol. 83, No. 3, p. 217-277, 2013
29. V. Kumar.*The Euler transform of V-function*, Afr. Mat., Vol. 29, No. 1-2, p. 23-27, 2018
30. V. Kumar. *On a General Theorem Connecting Laplace Transform and Generalized Weyl fractional Integral Operator Involving Fox's H-Function and a General Class of Functions*, J. Frac. Calc. and Appl., Vol. 11, No. 2, p. 270-280, 2020
31. V. Kumar.*On a Generalized Fractional Fourier Transform*, Palestine J. Maths., Vol. 9, No. 2, p. 903-907, 2020
32. S. P. Goyal, R. K. Laddha.*On the generalized Riemann-zeta functions and the generalized Lambert transform*,Ganita Sandesh, Vol. 11, No. 2, p. 99-108, 1997
33. A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi. *Higher Transcendental Functions*. Vol. I, McGraw-Hill Book Company, 1953
34. A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi. *Higher Transcendental Functions*. Vol. II, McGraw-Hill Book Company, 1953
35. E. M. Wright.*The Asymptotic Expansion of the Generalized Bessel Function*. Proc. London Math. Soc., Vol. s2-38, No. 1, p. 257-270, 1935
36. T. O. Salim.*Some properties relating to the generalized Mittag-Leffler function*. Advances and Applications in Mathematical Analysis, Vol. 4, p. 21-30, 2009
37. T. R. Prabhakar.*A singular integral equation with generalized Mittag-Leffler function in the kernel*, Yokohama Math. J., Vol. 19, No. 1, p. 7-15, 1971
38. A. Wiman.*Über den Fundamentalsatz in der Teorie der FunktionenE*$_\alpha$ (x). Acta. Math., Vol. 29, No. 1, p. 191-201, 1905
39. P. Humbert, R. P. Agarwal.*la fonction de Mittag-Leffler et quelquesunes de ses generalizations. Bull. Sci. Math*., Vol. 77, No. 2, p. 180-185, 1953
40. G. M. Mittag-Leffler.*Sur la nouvelle function*E_α(x), C R Acad. Sci. Paris, Vol. 137, p. 554-558, 1903

INSTRUCTIONS FOR AUTHORS

1. "The Baku Engineering University Mathematics and Computer Science" accepts original unpublished articles and reviews in the research field of the author.
2. Articles are accepted in English.
3. File format should be compatible with **Microsoft Word** and must be sent to the electronic mail (**journal@beu.edu.az**) of the Journal. The submitted article should follow the following format:

- Article title, author's name and surname
- The name of workplace
- Mail address
- Abstract and key words

4. The title of the article should be in each of the three languages of the abstract and should be centred on the page and in bold capitals before each summary.
5. **The abstract** should be written in **9 point** type size, between **100** and **150** words. The abstract should be written in the language of the text and in two more languages given above. The abstracts of the article written in each of the three languages should correspond to one another. The keywords should be written in two more languages besides the language of the article and should be at least three words.
6. .**UDC** and **PACS** index should be used in the article.
7. The article must consist of the followings:

- Introduction
- Research method and research
- Discussion of research method and its results
- In case the reference is in Russian it must be given in the Latin alphabet with the original language shown in brackets.

8. **Figures, pictures, graphics and tables** must be of publishing quality and inside the text. Figures, pictures and graphics should be captioned underneath, tables should be captioned above.
9. **References** should be given in square brackets in the text and listed according to the order inside the text at the end of the article. In order to cite the same reference twice or more, the appropriate pages should be given while keeping the numerical order. For example: [7, p.15].

Information about each of the given references should be full, clear and accurate. The bibliographic description of the reference should be cited according to its type (monograph, textbook, scientific research paper and etc.) While citing to scientific research articles, materials of symposiums, conferences and other popular scientific events, the name of the article, lecture or paper should be given.

Samples:

a) ***Article:*** Demukhamedova S.D., Aliyeva İ.N., Godjayev N.M.. *Spatial and electronic structure af monomerrik and dimeric conapeetes of carnosine üith zinc,* Journal of structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010

b) ***Book:*** Christie ohn Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles*. Fourth Edition, Prentice Hall, p.386-398, 2002

c) ***Conference paper:*** Sadychov F.S., Aydın C., Ahmedov A.İ.. Appligation of Information – Commu-nication Technologies in Science and education. II International Conference."*Higher Twist Effects In Photon- Proton Collisions", Bakı, 01-03 Noyabr, 2007, ss 384-391*
References should be in 9-point type size.

10. The margins sizes of the page: - Top 2.8 cm. bottom 2.8 cm. left 2.5 cm, right 2.5 cm. The article main text should be written in Palatino Linotype 11 point type size single-spaced. Paragraph spacing should be 6 point.
11. The maximum number of pages for an article should not exceed 15 pages
12. The decision to publish a given article is made through the following procedures:

- The article is sent to at least to experts.
- The article is sent back to the author to make amendments upon the recommendations of referees.
- After author makes amendments upon the recommendations of referees the article can be sent for the publication by the Editorial Board of the journal.

YAZI VƏ NƏŞR QAYDALARI

1. "Journal of Baku Engineering University- Riyaziyyat və kompüter elmləri" - əvvəllər nəşr olunmamış orijinal əsərləri və müəllifin tədqiqat sahəsi üzrə yazılmış icmal məqalələri qəbul edir.
2. Məqalələr İngilis dilində qəbul edilir.
3. Yazılar **Microsoft Word** yazı proqramında, (**journal@beu.edu.az**) ünvanına göndərilməlidir. Göndərilən məqalələrdə aşağıdakılara nəzərə alınmalıdır:

- Məqalənin başlığı, müəllifin adı, soyadı,
- İş yeri,
- Elektron ünvanı,
- Xülasə və açar sözlər.

4. **Məqalədə başlıq hər xülasədən əvvəl** ortada, qara və böyük hərflə xülasələrin yazıldığı hər üç dildə olmalıdır.
5. **Xülasə** 100-150 söz aralığında olmaqla, 9 punto yazı tipi böyüklüyündə, məqalənin yazıldığı dildə və bundan əlavə yuxarıda göstərilən iki dildə olmalıdır. Məqalənin hər üç dildə yazılmış xülasəsi bir-birinin eyni olmalıdır. Açar sözlər uyğun xülasələrin sonunda onun yazıldığı dildə verilməklə ən azı üç sözdən ibarət olmalıdır.
6. Məqalədə UOT və PACS kodları göstərilməlidir.
7. Məqalə aşağıdakılardan ibarət olmalıdır:

- Giriş,
- Tədqiqat metodu
- Tədqiqat işinin müzakirəsi və onun nəticələri,
- İstinad ədəbiyyatı rus dilində olduğu halda orjinal dili mötərzə içərisində göstərməklə yalnız Latın əlifbası ilə verilməlidir.

8. **Şəkil**, **rəsm**, **qrafik** və **cədvəllər** çapda düzgün, aydın çıxacaq vəziyyətdə və mətn içərisində olmalıdır. Şəkil, rəsm və qrafiklərin yazıları onların altında yazılmalıdır. Cədvəllərdə başlıq cədvəlin üstündə yazılmalıdır.
9. **Mənbələr** mətn içərisində kvadrat mötərizə daxilində göstərilməklə məqalənin sonunda mətn daxilindəki sıra ilə düzülməlidir. Eyni mənbəyə iki və daha cox istinad edildikdə əvvəlki sıra sayı saxlanmaqla müvafiq səhifələr göstərilməlidir. Məsələn: [7,səh.15].

Ədəbiyyat siyahısında verilən hər bir istinad haqqında məlumat tam və dəqiq olmalıdır. İstinad olunan mənbənin biblioqrafik təsviri onun növündən (monoqrafiya, dərslik, elmi məqalə və s.) asılı olaraq verilməlidir. Elmi məqalələrə, simpozium, konfrans, və digər nüfuzlu elmi tədbirlərin materiallarına və ya tezislərinə istinad edərkən məqalənin, məruzənin və ya tezisin adı göstərilməlidir.

Nümunələr:

a) ***Məqalə:*** Demukhamedova S.D., Aliyeva İ.N., Godjayev N.M.. *Spatial and electronic structure af monomeric and dimeric complexes of carnosine with zinc,* Journal of structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010

b) ***Kitab:*** Christie ohn Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles*. Fourth Edition, Prentice Hall, 2002

c) ***Konfrans:*** Sadychov F.S., Aydın C., Ahmedov A.İ.. Appligation of Information-Communication Technologies in Science and education. II International Conference. "*Higher Twist Effects In Photon- Proton Collisions", Bakı, 01-03 Noyabr, 2007, ss 384-391*

Mənbələr 9 punto yazı tipi böyüklüyündə olmalıdır.

10. **Səhifə ölçüləri:** üstdən 2.8 sm, altdan 2.8 sm, soldan 2.5 sm və sağdan 2.5 sm olmalıdır. Mətn 11 punto yazı tipi böyüklüyündə, **Palatino Linotype** yazı tipi ilə və tək simvol aralığında yazılmalıdır. Paraqraflar arasında 6 punto yazı tipi aralığında məsafə olmalıdır.
11. Orijinal tədqiqat əsərlərinin tam mətni bir qayda olaraq 15 səhifədən artıq olmamalıdır.
12. Məqalənin nəşrə təqdimi aşağıdakı qaydada aparılır:

- Hər məqallə ən azı iki ekspertə göndərilir.
- Ekspertlərin tövsiyələrini nəzərə almaq üçün məqalə müəllifə göndərilir.
- Məqalə, ekspertlərin tənqidi qeydləri müəllif tərəfindən nəzərə alındıqdan sonra Jurnalın Redaksiya Heyəti tərəfindən çapa təqdim oluna bilər.

YAZIM KURALLARI

1. “Journal of Baku Engineering University- Matematik ve Bilgisayar Bilimleri” önceler yayımlanmamış orijinal çalışmaları ve yazarın kendi araştırma alanın-da yazılmış derleme makaleleri kabul etmektedir.
2. Makaleler İngilizce kabul edilir.
3. Makaleler Microsoft Word yazı programında, (**journal@beu.edu.az**) adresine gönderilmelidir. Gönderilen makalelerde şunlar dikkate alınmalıdır:
- Makalenin başlığı, yazarın adı, soyadı,
- İş yeri,
- E-posta adresi,
- Özet ve anahtar kelimeler.
4. **Özet** 100-150 kelime arasında olup 9 font büyüklüğünde, makalenin yazıldığı dilde ve yukarıda belirtilen iki dilde olmalıdır. Makalenin her üç dilde yazılmış özeti birbirinin aynı olmalıdır. Anahtar kelimeler uygun özetin sonunda onun yazıldığı dilde verilmekle en az üç sözcükten oluşmalıdır.
5. Makalede UOT ve PACS tipli kodlar gösterilmelidir.
6. Makale şunlardan oluşmalıdır:
- Giriş,
- Araştırma yöntemi
- Araştırma
- Tartışma ve sonuçlar,
- İstinat Edebiyatı Rusça olduğu halde orjinal dili parantez içerisinde göstermekle yalnız Latin alfabesi ile verilmelidir.
7. **Şekil, Resim, Grafik** ve **Tablolar** baskıda düzgün çıkacak nitelikte ve metin içerisinde olmalıdır. Şekil, Resim ve grafiklerin yazıları onların alt kısımda yer almalıdır. Tablolarda ise başlık, tablonun üst kısmında bulunmalıdır.
8. **Kullanılan kaynaklar**, metin dâhilinde köşeli parantez içerisinde numaralandırılmalı, aynı sırayla metin sonunda gösterilmelidir. Aynı kaynaklara tekrar başvurulduğunda sıra muhafaza edilmelidir. Örneğin: [7,seh.15].

Referans verilen her bir kaynağın künyesi tam ve kesin olmalıdır. Referans gösterilen kaynağın türü de eserin türüne (monografi, derslik, ilmî makale vs.) uygun olarak verilmelidir. İlmi makalelere, sempozyum, ve konferanslara müracaat ederken makalenin, bildirinin veya bildiri özetlerinin adı da gösterilmelidir.

Örnekler:

a) ***Makale:*** Demukhamedova S.D., Aliyeva İ.N., Godjayev N.M.. *Spatial and Electronic Structure of Monomerik and Dimeric Conapeetes of Carnosine Üith Zinc,* Journal of Structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010

b) ***Kitap:*** Christie ohn Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles.* Fourth Edition, Prentice Hall, p.386-398, 2002

c) ***Kongre:*** Sadychov F.S., Aydın C., Ahmedov A.İ. Appligation of Information-Communication Technologies in Science and education. II International Conference. “*Higher Twist Effects In Photon- Proton Collisions”, Bakı, 01-03 Noyabr, 2007, ss 384-391*

Kaynakların büyüklüğü 9 punto olmalıdır.

9. **Sayfa ölçüleri**; üst: 2.8 cm, alt: 2.8 cm, sol: 2.5 cm, sağ: 2.5 cm şeklinde olmalıdır. Metin 11 punto büyüklükte **Palatino Linotype** fontu ile ve tek aralıkta yazılmalıdır. Paragraflar arasında 6 puntoluk yazı mesafesinde olmalıdır.
10. Orijinal araştırma eserlerinin tam metni 15 sayfadan fazla olmamalıdır.
11. Makaleler dergi editör kurulunun kararı ile yayımlanır. Editörler makaleyi düzeltme için yazara geri gönderilebilir.
12. Makalenin yayına sunuşu aşağıdaki şekilde yapılır:
- Her makale en az iki uzmana gönderilir.
- Uzmanların tavsiyelerini dikkate almak için makale yazara gönderilir.
- Makale, uzmanların eleştirel notları yazar tarafından dikkate alındıktan sonra Derginin Yayın Kurulu tarafından yayına sunulabilir.
13. Azerbaycan dışından gönderilen ve yayımlanacak olan makaleler için,(derginin kendilerine gonderilmesi zamani posta karşılığı) 30 ABD Doları veya karşılığı TL, T.C. Ziraat Bankası/Üsküdar-İstanbul 0403 0050 5917 No’lu hesaba yatırılmalı ve makbuzu üniversitemize fakslanmalıdır.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. «Journal of Baku Engineering University» - Математики и информатики публикует оригинальные, научные статьи из области исследования автора и ранее не опубликованные.
2. Статьи принимаются на английском языке.
3. Рукописи должны быть набраны согласно программы **Microsoft Word** и отправлены на электронный адрес (**journal@beu.edu.az**). Отправляемые статьи должны учитывать следующие правила:

- Название статьи, имя и фамилия авторов
- Место работы
- Электронный адрес
- Аннотация и ключевые слова

4. **Заглавие статьи** пишется для каждой аннотации заглавными буквами, жирными буквами и располагается по центру. Заглавие и аннотации должны быть представлены на трех языках.
5. **Аннотация**, написанная на языке представленной статьи, должна содержать 100-150 слов, набранных шрифтом 9 punto. Кроме того, представляются аннотации на двух других выше указанных языках, перевод которых соответствует содержанию оригинала. Ключевые слова должны быть представлены после каждой аннотации на его языке и содержать не менее 3-х слов.
6. В статье должны быть указаны коды UOT и PACS.
7. Представленные статьи должны содержать:

- Введение
- Метод исследования
- Обсуждение результатов исследования и выводов.
- Если ссылаются на работу на русском языке, тогда оригинальный язык указывается в скобках, а ссылка дается только на латинском алфавите.

8. **Рисунки, картинки, графики и таблицы** должны быть четко выполнены и размещены внутри статьи. Подписи к рисункам размещаются под рисунком, картинкой или графиком. Название таблицы пишется над таблицей.
9. **Ссылки** на источники даются в тексте цифрой в квадратных скобках и располагаются в конце статьи в порядке цитирования в тексте. Если на один и тот же источник ссылаются два и более раз, необходимо указать соответствующую страницу, сохраняя порядковый номер цитирования. Например: [7, стр.15]. Библиографическое описание ссылаемой литературы должно быть проведено с учетом типа источника (монография, учебник, научная статья и др.). При ссылке на научную статью, материалы симпозиума, конференции или других значимых научных мероприятий должны быть указаны название статьи, доклада или тезиса.

Например:

a) ***Статья:*** Demukhamedova S.D., Aliyeva I.N., Godjayev N.M. *Spatial and electronic structure of monomeric and dimeric complexes of carnosine with zinc*, Journal of Structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010

b) ***Книга:*** Christie on Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles*. Fourth Edition, Prentice Hall, 2002

c) ***Конференция:*** Sadychov F.S, Fydin C,Ahmedov A.I. Appligation of Information-Communication Nechnologies in Science and education. II International Conference. *“Higher Twist Effects In Photon-Proton Collision”,* Bakı,01-03 Noyabr, 2007, ss.384-391

Список цитированной литературы набирается шрифтом 9 punto.

10. **Размеры страницы:** сверху 2.8 см, снизу 2.8 см, слева 2.5 и справа 2.5. Текст печатается шрифтом **Palatino Linotype**, размер шрифта 11 punto, интервал-одинарный. Параграфы должны быть разделены расстоянием, соответствующим интервалу 6 punto.
11. Полный объем оригинальной статьи, как правило, не должен превышать 15 страниц.
12. Представление статьи к печати производится в ниже указанном порядке:

- Каждая статья посылается не менее двум экспертам.
- Статья посылается автору для учета замечаний экспертов.
- Статья, после того, как автор учел замечания экспертов, редакционной коллегией журнала может быть рекомендована к печати.