

ISSN 2521-635X

*Volume 6  
Number 1  
2022*

# Journal of Baku Engineering University

MATHEMATICS AND  
COMPUTER SCIENCE

Journal is published twice a year  
Number - 1. June, Number - 2. December

An International Journal

<http://journal.beu.edu.az>

## **FOUNDER**

*Havar Mammadov*

## **EDITOR-IN-CHIEF**

*Hamzaga Orucov*

## **CO-EDITORS**

*Agasi Melikov*

## **EDITORIAL ADVISORY BOARD**

*Abzeddin Adamov* (Azerbaijan, ADA)

*Agil Khanmamedov* (Azerbaijan, Baku State University)

*Alekbər Aliyev* (Azerbaijan, Baku State University)

*Araz Aliyev* (Azerbaijan, Azerbaijan State Oil and Industry University is a tertiary education institution in Baku,)

*Gorbachuk Valentina Ivanovna* (Ukraina, Academy of Science)

*Hamdulla Aslanov* (Azerbaijan, Akademy of Science)

*Ibrahim Nebiyev* (Azerbaijan, Baku State University)

*Rakib Efendiyev* (Azerbaijan, Baku State University)

*Sosnin Petr Ivanovich*

(Russia,Ulyanovsk State Technical University)

## **INTERNATIONAL ADVISORY BOARD**

*Abdeljalil Nachaoui* (France, Nantes University)

*Bařiš Erbaš* (Anadolu University, Turkey)

*Che Soong Kim* (Koreya, Sangji University)

*Chakib Abdelkrim* (Morocco, Beni Mellal University)

*Elshad Eyvazov* (Azerbaijan, Baku State University)

*Ekber Eliyev* (Azerbaijan, National Academy of Science)

*Garib Murshudov* (York Academy,UK, London)

*Golovko Vladimir Adamovich* (Belarus, Brest State Universiteti)

*Hamed Sari-Sarraf* (USA,TexasTechnik University)

*Hari Srivastava* (Canada,Victoria,)

*Hidayyat Guseynov* (Azerbaijan, Baku State University)

*Jauberteau Francois* (France,Nantes University)

*Kamil Mansimov* (Azerbaijan, Baku State University)

*Ludmila Prikazchikova* (Keele University, England)

*Mourad Nachaoui* (France,Nantes University )

*Rasim Alikuliyev* (Azerbaijan, National Academy of Science)

*Tarasenko Vladimir Petrovich*

(National Technical University of Ukraine)

*Telman Aliyev* (Azerbaijan, National Academy of Science)

*Telman Malikov* (Azerbaijan, National Academy of Science)

*Vedat Coşkun* (Turkiye,Işık University)

*Vladimir B. Vasilyev* (Russia, Lipetsk State Technical University)

*Sabir Mirzayev* (Azerbaijan, Baku State University)

*Dimkov Mikhail Pakhomovich*

(Belarus State Economic University)

*Arquchintsev Alexander Valeryevich*, (Irkutsk State University)

## **EXECUTIVE EDITORS**

*Shafag Alizade*

## **ASSISTANT EDITORS**

*Svetlana Denmuhammedovna*

## **DESIGN**

*Ilham Aliyev*

## **CONTACT ADDRESS**

*Journal of Baku Engineering University*

AZ0102, Khirdalan city, Hasan Aliyev str. 120, Absheron, Baku, Azerbaijan

Tel: 00 994 12 - 349 99 95 Fax: 00 994 12 349-99-90/91

e-mail: [jurnal@beu.edu.az](mailto:jurnal@beu.edu.az)

web: <http://journal.beu.edu.az>

facebook: [Journal Of Baku Engineering University](#)

*Copyright © Baku Engineering University*

**ISSN 2521-635X**

ISSN 2521-635X



# Journal of Baku Engineering University

MATHEMATICS AND  
COMPUTER SCIENCE

Baku - AZERBAIJAN

# **Journal of Baku Engineering University**

## **MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE**

**2022. Volume 6, Number 1**

### **CONTENTS**

#### **TİPİNİ PARABOLİK DƏN ANTİPARABOLİK DƏYİŞƏN TƏNLİK ÜÇÜN KOŞI MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİ**

*Saleh Zeyni oğlu Əhmədov, Abbas Əli oğlu Mehdiyev* \_\_\_\_\_ 3

#### **YÜKLƏNMİŞ PARABOLİK TƏNLİK ÜÇÜN BİR MƏSƏLƏNİN HƏLLİ**

*Saleh Əhmədov, Səlimə Mirzəyeva* \_\_\_\_\_ 10

#### **РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОДНОМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ РАСТУЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ**

*Д.Г. Оруджев* \_\_\_\_\_ 19

#### **HİLBERT NÜVƏLİ SİNQULYAR İNTEQRAL OPERATORUN ORLİC FƏZALARINDA APPROKSİMASIYASI**

*Lalə Ə. Əlizadə* \_\_\_\_\_ 25

#### **“BIG DATA” TEKNOLOGİYALARI: MÖVCUD VƏZİYYƏT VƏ PERSPEKTİVLƏR**

*Esgerova Bahar, Elvin Jafarov, Nijat Babayev, Allahshukur Ahmadzada* \_\_\_\_\_ 31

#### **OBTAINING THE FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL EQUATION FOR THE LAPLACE TRANSFORM OF THE DISTRIBUTION OF THE BOUNDARY FUNCTIONAL**

*E.A. Ibayev* \_\_\_\_\_ 43

#### **EIGENFUNCTION EXPANSION ASSOCIATED WITH THE SCHRODINGER OPERATOR WITH ALMOST PERIODIC POTENTIALS**

*S. Bahlulzade* \_\_\_\_\_ 49

#### **DESIGNING OF SMART LEARNING ENVIRONMENTS**

*Masimli Pakizar* \_\_\_\_\_ 55

#### **ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ С КАТАСТРОФАМИ**

*Л.Э. Поладова* \_\_\_\_\_ 60

IOT 517.928

# TİPİNİ PARABOLİK DƏN ANTİPARABOLİK DƏYİŞƏN TƏNLİK ÜÇÜN KOŞI MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİ

SALEH ZEYNİ OĞLU ƏHMƏDOV, ABBAS ƏLİ OĞLU MEHDİYEV

Bakı Dövlət Universiteti

abbasmehdiyev@mail.ru, abbasmehdiyev@mail.ru

**XÜLASƏ**

İşdə iki tərtibli xüsusi törəməli tənlilik üçün bir Koşı məsələsinin həlli tədqiq olunmuşdur. Baxılan çoxluq x-a görə sonsuz, t-ə görə sonlu olmaqla sonsuz zolaq əmələ gətirir. Tənlilik tipini parabolikdən antiparabolikə dəyişməklə Şredinger cırlaşmasına malikdir. Belə ki, Şredinger tipini yaranan xətt parabolik və antiparabolikin sərhəddini təşkil edir. Baxılan məsələyə Furyenin integrallar çevirməsi tətbiq olunaraq, parametrdən asılı adı diferensial tənlilik üçün Koşı məsələsi alınmışdır. Belə ki, alınan Koşı məsələsi dəyişən əmsallı olmaqla birtərtibli tənlilik üçün yazılmışdır. Bu tənliyin ümumi həlli tapılaraq başlangıç verilənlər daxilində məsələnin həlli qurulmuşdur. Sonra isə, tərs Furye çevirməsindən istifadə olunaraq ilkin məsələnin həlli qeyri-məxsusi integrallar şəklində verilmişdir. Əsas məqsəd tapılmış qeyri məxsusi integralların mütləq və müntəzəm yığılmasını göstərməkdən ibarətdir. Həll üçün tapılmış qeyri-məxsusi integralların əsaslandırılması o vaxt mümkün olmuşdur ki, paraboliklik oblastı antiparaboliklik oblastından geniş olsun.

**Açar sözlər:** Koşı məsələsi, parabolik tənlilik, antiparabolik tənlilik, Furye çevirməsi, qeyri-məxsusi integrallar, kompleks parametr

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА, МЕНЯЮЩЕГО ТИП С ПАРАБОЛИЧЕСКОГО НА АНТИПАРАБОЛИЧЕСКИЙ**

**РЕЗЮМЕ**

В данной работе изучается решение задачи Коши для дифференциального уравнения с частными производными второго порядка. Рассматриваемая область, являющаяся бесконечной по  $x$  и конечной по  $t$  образует бесконечную полосу. Уравнение, мененяя тип с параболического на антипараболический в некоторой части области вырождается в уравнение типа Шредингера. Так, что линия вырождения образует границу между областями, где тип уравнения является параболическим и антипараболическим. Примененяя к рассматриваемой задаче интегральное преобразование Фурье получена задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, зависящего от параметра. Таким образом, полученная задача Коши является заданной для уравнения первого порядка с переменными коэффициентами. Найдено общее решение этого уравнения и установлено решение задачи в при начальных данных. Затем с помощью обратного преобразования Фурье решение исходной задачи получено в виде несобственного интеграла. Основная цель — показать абсолютную и равномерную сходимость полученного несобственного интеграла. Сходимость несобственного интеграла найденного для решения возможно, когда область параболичности больше области антипараболичности.

**Ключевые слова:** задача Коши, параболическое уравнение, антипараболическое уравнение, преобразование Фурье, несобственный интеграл, комплексный параметр.

**SOLUTION OF CAUCHY PROBLEM FOR A SECOND ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION  
CHANGING THE TYPE FROM PARABOLIC TO ANTIPARABOLIC**

**ABSTRACT**

In this paper, the solution of the Cauchy problem for a differential equation with partial derivatives of the second order is studied. The domain under consideration, which is infinite in  $x$  and finite in  $t$ , forms an infinite strip. The equation changing the type from parabolic to antiparabolic in some part of the domain degenerates into an equation of the Schrödinger type. So that the degeneracy line forms the boundary between the regions where the type of equation is parabolic and antiparabolic. Applying the integral Fourier transformation to the considered problem, the Cauchy problem for the ordinary differential equation, depending on the parameter, is obtained. Thus, the resulting Cauchy problem is given for a first-order equation with changeable coefficients. The general solution of this equation is found and the solution of the problem is established under the initial data. Then, with the help of the inverse Fourier

transformation, the solution of the original problem is obtained in the form of an improper integral. The main goal is to show the absolute and uniform convergence of the obtained improper integral. The justification of the improper integral found for the solution is possible when the area of parabolicity is greater than the area of antiparabolicity.

**Key words:** Cauchy problem, parabolic equation, antiparabolic equation, Fourier transformation, improper integral, complex parameter.

Tipini dəyişən ikitərtibli xüsusi törəməli tənlik üçün aşağıdakı kimi Koşı məsələsinə baxaq:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = (\alpha - t) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, -\infty < x < \infty, 0 < t < T \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), -\infty < x < \infty \quad (2)$$

burada  $\alpha$  kompleks ədəddir.

Əgər  $t < Re\alpha$  olduqda (1) tənliyi parabolik,  $t > Re\alpha$  olduqda (1) tənliyi antiparabolik,  $t = Re\alpha$  olduqda tənlik Şredinger cırlaşmasına malik olan tənlikdir.

(1)-(2) Koşı məsələsinin həll etmək üçün aşağıdakı kimi Furye integralların çevirməsindən istifadə edək.

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma x} \vartheta(\sigma, t) d\sigma \quad (3)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma x} \psi(\sigma) d\sigma \quad (4)$$

(3) və (4)-ü (1) və (2)-də yerinə yazsaq və Furye çevirməsinin yeganəlik xassasından istifadə etsək  $\sigma$  parametrindən asılı adı diferensial tənlik üçün Koşı məsələnini alarıq.

$$\frac{d\vartheta(\sigma, t)}{dt} + (\alpha - t)\sigma^2 \vartheta(\sigma, t) = 0 \quad (5)$$

$$\vartheta(\sigma, 0) = \psi(\sigma) \quad (6)$$

(5) tənliyinin ümumi həllini yazaq

$$\vartheta(\sigma, t) = ce^{(\frac{1}{2}t^2 - \alpha t)\sigma^2}.$$

(6)-ni axırıncı ifadədə nazara alsaq (5)-(6) məsələsinin həlli üçün aşağıdakı ifadəni alarıq.

$$\vartheta(\sigma, t) = \psi(\sigma) e^{(\frac{1}{2}t^2 - \alpha t)\sigma^2} \quad (7)$$

(3) və (4) Furye çevirmələrinin tərs çevirmələrinin yazaq

$$\vartheta(\sigma, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma x} u(x, t) dx \quad (8)$$

$$\psi(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma x} \varphi(x) dx \quad (9)$$

(8)-(9) düsturlarını (7)-də nəzərə alsaq alarıq

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma x} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma y} \varphi(y) dy \right) e^{\sigma^2 (\frac{1}{2}t^2 - \alpha t)} d\sigma,$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma(x-y) + \sigma^2 (\frac{1}{2}t^2 - \alpha t)} \varphi(y) d\sigma dy.$$

$Q(x - y, t)$  ilə aşağıdakı integralları işarə edək.

$$Q(x - y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma(x-y) + \sigma^2 (\frac{1}{2}t^2 - \alpha t)} d\sigma \quad (10)$$

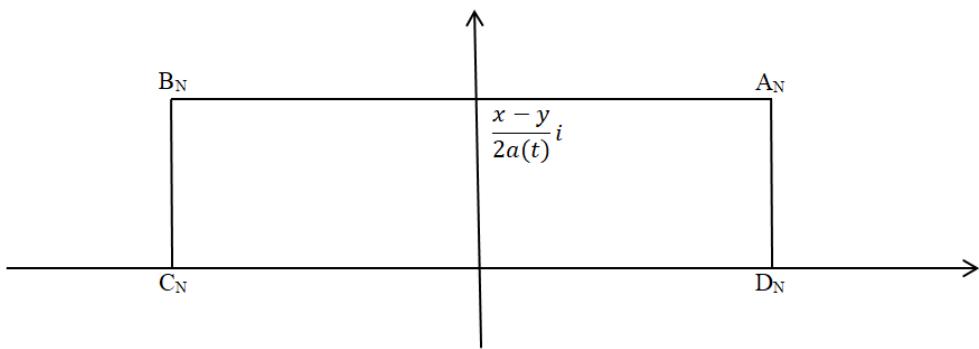
$$a(t) = \sqrt{at - \frac{1}{2}t^2}$$

Kökaltı ifadənin müsbət olması üçün  $t^2 - 2at < 0$  olmalıdır. Aydındır ki,  $0 < t < 2\alpha$  olduqda  $t^2 - 2at < 0$  bərabərsizlik ödənilir. Əgər  $\alpha > \frac{T}{2}$  seçsək onda  $0 < t \leq T$  üçün  $a(t) > 0$  ödənir.

Ona görə də bir apardığımız bütün hallarda qəbul edəcəyik ki,  $\alpha > \frac{T}{2}$  şərti ödənilir.

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x - y, t) \varphi(y) dy \quad (11)$$

(10) düsturu ilə təyin olunan  $Q(x - y, t)$  fundamental həlli üçün tapılmış integrallı şəklində olan ifadəni sadələşdirək.



$$\begin{aligned} l_N &= C_N D_N \cup D_N A_N \cup A_N B_N \cup B_N C_N \\ D_N(N, 0); A_N \left( N, \frac{x-y}{2a(t)} \right); C_N(-N, 0); B_N &= \left( -N, \frac{x-y}{2a(t)} \right) \end{aligned}$$

$Q(x - y, t)$ -ni aşağıdakı kimi çevirək.

$$\begin{aligned} Q(x - y, t) &= \frac{1}{2\pi a(t)} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[a(t)\sigma - i\frac{x-y}{2a(t)}\right]^2} d(a(t)\sigma) \\ Q(x - y, t) &= \frac{1}{2\pi a(t)} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[\delta - \frac{x-y}{2a(t)}i\right]^2} d\delta \end{aligned} \quad (12)$$

burada  $\delta = a(t)\sigma$

$$\int_{C_N D_N} e^{-z^2} dz = \int_{-N}^N e^{-x^2} dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{\pi}$$

burada  $z = x + i \frac{x-y}{2a(t)}$

$$\left| \int_{D_N A_N} e^{-z^2} dz \right| = \int_0^{\frac{x-y}{2a(t)}} e^{-Rez^2} |dz| = \int_0^{\frac{x-y}{2a(t)}} e^{\gamma^2 - N^2} d\gamma = e^{-N^2} \int_0^{\frac{x-y}{2a(t)}} e^{\gamma^2} d\gamma \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Eyni qayda ilə  $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{B_N C_N} e^{-z^2} dz = 0$

$e^{-z^2} = e^{-(\delta + i \frac{x-y}{2a(t)})^2}$  funksiyası ( $\delta$ -dan asılı)

$l_N$ -qapalı sınıq xətti daxilində analitik funksiya olduğundan

$$\int_{l_N} e^{-(\delta+i\frac{x-y}{2a(t)})^2} d\delta = 0 \text{ olur.}$$

$$\lim_{l_N} \int e^{-(\delta+i\frac{x-y}{2a(t)})^2} d\delta = 0$$

Yuxarıda göstərilənləri nəzərə alsaq alarıq.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-[a(t)\sigma-i\frac{x-y}{2a(t)}]^2} d\delta = \sqrt{\pi} \quad (13)$$

(13)-ü (12)-də nəzərə alaq.

$$Q(x-y, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}a(t)} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t)}} \quad (14)$$

(14) verilmiş məsələnin fundamental həllidir.

**Teorem:** Tutaq ki,  $\varphi(x)$  funksiyası  $(-\infty; +\infty)$  intervalında kəsilməz və məhduddur.  $Re\alpha > \frac{T}{2}$  olduqda

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x-y, t)\varphi(y)dy$$

funksiyası (1)-(2) Koşı məsələsinin  $C^{1,2}(0 < t \leq T, -\infty < x < +\infty) \cap C(0 \leq t \leq T, -\infty < x < +\infty)$ -dan olan məhdud həllidir. Burada  $Q(x-y, t)$  funksiyası (14) dusturu ilə verilib,  $a(t) = \sqrt{at - \frac{1}{2}t^2}$  kimi təyin olunur.

İsbati: Əvvəlcə  $u(x, t)$  funksiyasının  $t \in [0, T]$ ,  $x \in (-\infty; +\infty)$  çoxluğunda kəsilməz olduğunu göstərək.  $Re\alpha > \frac{T}{2}$  olduqda  $a(t) > 0$  olur.  $r$  ədədini ilə böyük seçək ki,  $r > 2x$  olsun.  $y > r$  üçün

$$y-x > y - \frac{r}{2} > \frac{y}{2}$$

$$Q(x-y, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}a(t)} e^{-\frac{(y-x)^2}{4a^2(t)}} < \frac{1}{2\sqrt{\pi}a(t)} e^{-\frac{y^2}{16a^2(t)}} \quad (15)$$

$0 < t_1$  şərtini ödəyən ixtiyari  $t_1$  üçün  $t_1 < t \leq T$  olduqda  $a(t)$  funksiyasının müsbət olduğunu göstərək.  $\alpha = \min\{a(t_1); a(T)\}$  işarə edək.

$$0 < \alpha \leq a(t) < \sqrt{\frac{1}{2}T}$$

$$\frac{2}{T^2} < \frac{1}{a^2(t)} \leq \frac{1}{\alpha^2} \quad (16)$$

(16)-ni (15)-də nəzərə alsaq alarıq

$$e^{-\frac{y^2}{16a^2(t)}} < e^{-\frac{y^2}{8T^2}} \quad (17)$$

(16) və (17)-ni (15)-də nəzərə alsaq alarıq

$$Q(x-y, t) < \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y^2}{8T^2}} \quad (18)$$

$$|Q(x-y, t)\varphi(y)| < \frac{M}{2\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y^2}{8T^2}}$$

$\int_r^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4t^2}} dy$  – integrallı yiğilir, onda  $\int_r^{+\infty} Q(x-y, t)\varphi(y)dy$  – integrallı mütləq və müntəzəm yiğilir. Eyni qayda ilə göstərmək olar ki,  $\int_{-\infty}^{-r} Q(x-y, t)\varphi(y)dy$  – integrallı mütləq və müntəzəm yiğilir. Deməli,  $\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x-y, t)\varphi(y)dy$  – integrallı mütləq və müntəzəm yiğilir. İnteqral altı funksiya kəsilməz olduğundan onun nəticəsi olan  $u(x, t)$  funksiyası kəsilməz olur. Eyni qayda ilə  $u_t(x, t), u_x(x, t), u_{xx}(x, t)$  funksiyalarının da kəsilməz olduğunu göstərə bilərik. İndi isə  $\forall x_0 \in (-\infty, +\infty)$  nöqtəsi götürüb qeyd edək. Göstərək ki,  $t \rightarrow t_0, x \rightarrow x_0$  olduqda  $u(x, t) \rightarrow \varphi(x_0)$  olur.

$\forall \varepsilon > 0$  üçün  $\exists \delta(\varepsilon) > 0$  var ki,  $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$  və  $|t| < \delta(\varepsilon)$  üçün  $|u(x, t) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$  ödənilir.

$\varphi(x)$  funksiyası  $x_0$  nöqtəsində kəsilməz olduğu üçün elə  $\eta(\xi)$  var ki,  $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \frac{1}{6}\varepsilon$  olar.

İnteqrallama oblastını hissələrə ayıraraq  $u(x, t)$  funksiyasını üç toplananın cəmi kimi göstərək:

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t),$$

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}a(t)} \int_{-\infty}^{x_0-\eta} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t)}} \varphi(y)dy,$$

$$u_2(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}a(t)} \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t)}} \varphi(y)dy,$$

$$u_3(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}a(t)} \int_{-\infty}^{x_0+\eta} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t)}} \varphi(y)dy,$$

$x \rightarrow x_0$  və  $t \rightarrow 0$  olduqda  $u_1(x, t)$  funksiyasını qiymətləndirək. ( $\alpha > \frac{T}{2}$  üçün)

$$\begin{aligned} |u_1(x, t)| &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}a(t)} \left| \int_{-\infty}^{x_0-\eta} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t)}} \varphi(y)dy \right| \leq \frac{M}{2\sqrt{\pi}a(t)} \int_{-\infty}^{x_0-\eta} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t)}} dy \\ &= \frac{M}{2\sqrt{\pi}a(t)} \int_{-\infty}^{(x_0-\eta-x)(2a(t))} 2a(t)e^{-\omega^2} d\omega \end{aligned}$$

$|x - x_0| < \eta$  olduğundan  $x_0 - \eta - x < 0$  və  $\lim_{t \rightarrow 0} a(t) = 0$  olduğundan alırıq ki,  $\exists \delta_1(\varepsilon) > 0$  var ki,  $u_1(x, t) < \frac{1}{3}\varepsilon$ . Burada  $y = x + 2a(t)\omega$  əvəzləməsi götürülüb.

$$dy = 2a(t)d\omega,$$

$$\omega = \frac{y-x}{2a(t)},$$

$$y \rightarrow x_0 - \eta \Rightarrow \omega \rightarrow \frac{x_0 - \eta - x}{2a(t)},$$

$y \rightarrow -\infty \Rightarrow \omega \rightarrow -\infty$ . İndi isə  $u_2(x, t)$  funksiyasını qiymətləndirmək üçün onu aşağıdakı kimi çevirək:

$$u_2(x, t) = J_1(x, t) + J_2(x, t),$$

$$J_1(x, t) = \frac{\varphi(x_0)}{2\sqrt{\pi}a(t)} \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t)}} dy,$$

$$J_2(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}a(t)} \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} (\varphi(y) - \varphi(x_0)) e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t)}} dy.$$

Göstərək ki,

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow x_0}} J_1(x, t) = \varphi(x_0),$$

$$J_1(x, t) = \frac{\varphi(x_0)}{2\sqrt{\pi}a(t)} \int_{\frac{x_0-\eta-x}{2a(t)}}^{\frac{x_0+\eta-x}{2a(t)}} 2a(t)e^{-\omega^2} d\omega,$$

$$J_1(x, t) = \frac{\varphi(x_0)2a(t)}{2\sqrt{\pi}a(t)} \int_{\frac{x_0-\eta-x}{2a(t)}}^{\frac{x_0+\eta-x}{2a(t)}} e^{-\omega^2} d\omega,$$

$x + \eta - x > 0$  və  $x - \eta - x < 0$  eyni zamanda  $\lim_{t \rightarrow 0} a(t) = 0$  olduğundan integrallin yuxarı sərhəddi  $+\infty$ -ga, aşağı sərhəddi  $-\infty$ -ga yaxınlaşır.

Deməli :

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow x_0}} J_1(x, t) = \varphi(x_0).$$

Yəni

$$|J_1(x, t) - \varphi(x_0)| < \frac{1}{6}\varepsilon.$$

İndi isə göstərək ki,

$$|J_2(x, t)| < \frac{1}{6}\varepsilon,$$

$$\begin{aligned} |J_2(x, t)| &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}a(t)} \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} |\varphi(y) - \varphi(x_0)| e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t)}} dy < \frac{\varepsilon}{6} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}a(t)} \int_{(x_0-\eta-x)(2a(t))}^{(x_0+\eta-x)(2a(t))} 2a(t)e^{-\omega^2} d\omega \\ &< \frac{\varepsilon}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2} d\omega = \frac{\varepsilon}{6}, \quad |J_2(x, t)| < \frac{\varepsilon}{6}, \end{aligned}$$

$u_1(x, t)$  funksiyasını qiymətləndirdiyimiz kimi eyni qaydada  $u_3(x, t)$  funksiyası üçün elə  $\delta_2(\varepsilon) > 0$

var ki  $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$  və  $|t| < \delta(\varepsilon)$  üçün  $|u_3(x, t)| < \frac{1}{3}\varepsilon$  olsun.  $\forall \varepsilon > 0$  üçün  $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$  var ki,  $|x - x_0| < \delta$  və  $|t| < \delta$  üçün  $|u(x, t) - \varphi_0(x)| < \varepsilon$  ödənilir. Teorem isbat olundu.

## ƏDƏBİYYAT

1. Abbasova Aygün , Əhmədov Saleh. Solution of one mixed problem for the fourth order Partial differential equation by sense of Shilov// international periodic scientific journal, Scientific Look into the Future, Issue №19, Part I, Odessa, DOI: 10.30888/2415-7538.2020-19-01, November 2020, pp.103-107, <https://www.scilook.eu/index.php/slif/article/view/slif19-01-037>
2. V.G. Bagrov, V.V. Belov, V.N. Zadorozhnyi, A.Yu. Trifonov METHODS OF MATHEMATICAL PHYSICS Special Functions. Equations of Mathematical Physics
3. Məmmədov Y.Ə., Əhmədov S.Z. Dördüncü tərtib bir diferensial operatorun məxsusu ədədlərinin asimptotikasının tapılması. Вестник Бакинского Иниверситета , серия Физико-математических наук, №4, 2018.стр. 5-10.
4. Yu.A. Mammadov , H.İ. Ahmadov. A mixed problem for the heat equation with advanced time in boundary conditions. Russian Mathematics, 2020, vol. 64, No 3, pp. 25-42 (Известия Высших Ю. А. Мамедов Почти регуляяные условия в спектральных задачах для уравнений второго порядка. Коммун. в Теорет. физике (Пекин, Китайская Ак. Наук), 2004, Т.41 № 5, стр. 649-654
5. V.G. Bagrov, V.V. Belov, V.N. Zadorozhnyi, A.Yu. Trifonov METHODS OF MATHEMATICAL PHYSICS Special Functions. Equations of Mathematical Physics, Tomsk Polytechnic University, Tomsk State University, Moscow Institute of Electronics and Mathematics. – Tomsk: TPU Publishing House, 2012. – 257 p.
6. С.Д. Эйдельман, Параболические уравнения, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 1990, том 63, 201–313
7. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. НАУКА, Изд.2, Перераб. и доп. 1969.528с.
8. В. А. Литовченко, Задача Коши для параболических по Шилову уравнений, Сиб. матем. журн., 2004, том 45, номер 4, 809–821
9. Мамедов Ю.А., Ахмедов С.З., Мехтиев А.А. Решение одной смешанной задачи для уравнения четвертого порядка с меняющимся типом. 2nd International Scientific and Practical Internet conference “Integration of Education, Science and business in hadern environment: Summer Debates”. August 17-18, 2020, p. 302, Dnipro.

UOT 517.928

## YÜKLƏNMİŞ PARABOLİK TƏNLİK ÜÇÜN BİR MƏSƏLƏNİN HƏLLİ

SALEH ƏHMƏDOV

Bakı Dövlət Universiteti

Nahid Paşayev

Lənkəran Dövlət Universiteti

SƏLİMƏ MİRZƏYEVA

Lənkəran Dövlət universiteti

Salehmedov0@gmail.com

Umud-96@mail.ru

mirzayeva\_salima@mail.ru

### XÜLASƏ

İşdə baxılan tənlik yüksəlmiş xüsusi törəməli parabolik tənlikdir. Bu tənliyə sərhəd şərtləri elə daxil olmuşdur ki, baxılan parçanın üç nöqtələri ilə orta nöqtəsi arasında əlaqə verilmişdir. Eyni vaxta tənliyə başlanğıc şərt qoşulmuşdur ki, alınan məsələnin həllinin tapılması öyrənilir. Əvvəlcə məsələyə Laplas operatoru tətbiq olunaraq qarşıq məsələyə uyğun spektral məsələ qurulmuşdur, sonra isə alılmış üç nöqtəli spektal məsələ kompleks mütəvidə tətqiq olumuşdur.

Beləki, parametrdən asılı adı disferensial tənliyin ümumi həlli tapıldıqdan sonra sabitlərin variasiya üsulundan istifadə olunaraq, qeyri bircins tənliyin ümumi həlli qurulmuşdur. Ümumi həlldə iştirak edən sabitləri tapmaq üçün üçnöqtəli sərhəd şərtlərindən istifadə olunmuşdur.

Bundan əlavə, spektal məsələnin məxsusi ədədləri tapılmış və Qrin funksiyası qurulmuşdur.

Qrin funksiyası üçün qiymətlənmə alınmışdır, və bu qiymətlənmədən istifadə edərək, ayrılış teoremi verilmişdir. Bundan sonra, xüsusi törəməli diferensial tənlikdə iştirak edən yüksəlmiş həddi nəzərə alaraq tələb olunmuşdur ki, həll ilkin məsələni ödəsin. Bunun əsasında həlli tapmaq üçün Voltera integral tənlik alınmışdır və göstərilmişdir ki, baxılan məsələnin həlli varsa bu həll alınmış Voltera integral tənliyi ödəməlidir. Voltera integral tənliyin həllini tapmaq üçün arıdıcı yaxınlaşmalar üsulundan istifadə edilmişdir.

Açar sözlər. Fundamental həll, asimptotika, analitik funksiya, məxsusi ədəd, asimptotik düstur

### SOLUTION OF ONE PROBLEM FOR THE LOADED PARABOLIC TYPE OF EQUATION

#### ABSTRACT

The equation that we will consider is a parabolic equation with a loaded special derivative.

The boundary conditions included in this equation in a way that there is a relationship between the corner points and the midpoint in the region under consideration.

An initial condition is added to the equation and the solution of this problem is investigated.

First, the Laplace operator is applied to the problem and a spectral problem corresponding to the problem is constructed.

Then the resulting three-point spectral problem is studied in a complex equation. Depending on the parameters, after finding the general solution of an ordinary differential equation, a general solution of an inhomogeneous equation is constructed by the method of variation of constants.

There were used three-point boundary conditions for finding the constants included in the general solution.

In addition, the eigenvalues of the spectral problem were found and the Green's function was constructed.

An estimate was obtained for the Green's function, and was given a separation theorem by using this estimate.

Further, taking into account the loaded limit included in the differential-differential equation, it is required that the solution satisfies the original problem. Taking this into account, in order to find a solution, the Voltaire integral

equation was obtained and it was shown that if there is a solution to the problem under consideration, this solution must satisfy the obtained Voltaire integral equation. There were used the method of successive approximations is used for finding the solution of the Voltaire integral equation.

Keywords: Eigenvalues, Green function, fundamental solution, characteristic determinant, spectral problem.

## РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

### РЕЗЮМЕ

Уравнение-которое мы будем рассматривать является параболическим уравнением с нагруженной специальной производной.

Границные условия включены в это уравнение таким образом, что в рассматриваемой области между угловыми точками и средней точкой есть связь.

В уравнение добавляется начальное условие и исследуется решение данной задачи.

Сначала к задаче применяется оператор Лапласа и строится спектральная задача, соответствующая задаче, а затем полученная трехточечная спектральная задача исследуется в комплексном уравнении.

Таким образом в зависимости от параметров после нахождения общего решения обыкновенного дифференциального уравнения строится общее решение неоднородного уравнения методом вариации констант.

Для нахождения констант входящих в общее решение, использовались трехточечные граничные условия.

Кроме того, были найдены собственные значения спектральной задачи и построена функция Грина.

Была получена оценка для функции Грина и с использованием этой оценки была приведена теорема разделения.

Далее учитывая нагруженный предел, входящий в дифференциально-дифференциальное уравнение, требуется, чтобы решение удовлетворяло исходной задаче.

Учитывая это для нахождения решения было получено интегральное уравнение Вольтера и было показано, что при наличии решения рассматриваемой задачи это решение должно удовлетворять полученному интегральному уравнению Вольтера. Для нахождения решения интегрального уравнение Вольтера используется метод последовательных приближений.

Ключевые слова: Собственные значения, Функция Грина, фундаментальные решения, характеристический детерминант, спектральная задача.

Aşağıdakı kimi istilikkeçirmə tənliyinə baxaq:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + b \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}, -l < x < l, t > 0 \quad (1)$$

Bu tənliyə

$$u(-l, t) - u(l, t) = 0$$

$$u(0, t) = 0 \quad (2)$$

sərhəd şərtlərini

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (3)$$

başlangıç şərtini əlavə edək.

Burada,  $\varphi(x)$  funksiyası  $[-l, l]$  parçasında təyin olunmuşdur.

Laplas çevrilməsindən istifadə etməklə qoyulmuş qarışq məsələni  $\lambda$  parametrindən asılı olan  $x$ -ə görə ikitərtibli adi differensial tənlik üçün qoyulmuş sərhəd məsələsinə gətirmək olar. Həmin məsələ aşağıdakı kimidir:

$$\ddot{v}(x, \lambda) - \lambda^2 v(x, \lambda) = h(x) \quad (4)$$

$$v(-l) - v(l) = 0$$

$$v(0) = 0 \quad (5)$$

Deməli sərhəd şərtində  $\alpha_1 = 1, \beta_1 = 0, \gamma_1 = -1, \alpha_2 = 0, \beta_2 = 1, \gamma_2 = 0$  götürülmüşdür.

Sabitin variasiya üsulunu tətbiq edərək, (4) tənliyinin ümumi həllini taparıq.

$$\begin{aligned} v(x, \lambda) &= Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x} + \\ &+ \int_{-l}^x \frac{e^{\lambda(x-\xi)} - e^{-\lambda(x-\xi)}}{4\lambda} h(\xi) d\xi - \int_x^l \frac{e^{\lambda(x-\xi)} - e^{-\lambda(x-\xi)}}{4\lambda} h(\xi) d\xi = \\ &= Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x} + \int_{-l}^x \frac{sh\lambda(x-\xi)}{2\lambda} h(\xi) d\xi - \int_x^l \frac{sh\lambda(x-\xi)}{2\lambda} h(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Aldığımız ifadəni sadələşdirmək üçün yeni funksiya daxil edək:

$$g(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda(x-\xi)} - e^{-\lambda(x-\xi)}}{4\lambda}; & -l \leq \xi \leq x \leq l \\ -\frac{e^{\lambda(x-\xi)} - e^{-\lambda(x-\xi)}}{4\lambda}; & -l \leq x \leq \xi \leq l \end{cases}$$

Bu funksiyanın köməyi ilə (4) funksiyasının ümumi həlli üçün belə düstur alırıq:

$$v(x, \lambda) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x} + \int_{-l}^l g(x, \xi, \lambda) h(\xi) d\xi \quad (6)$$

Burada A və B ixtiyari sabitlərdir. A və B -ni tapmaq üçün sərhəd şərtindən istifadə etməklə aşağıdakı sistemi almış olarıq:

$$\begin{cases} A + B = - \int_{-l}^l g(0, \xi, \lambda) h(\xi) d\xi \\ A(e^{-\lambda l} - e^{\lambda l}) + B(e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}) = \int_{-l}^l [g(l, \xi, \lambda) - g(-l, \xi, \lambda)] h(\xi) d\xi \end{cases}$$

Bu sistemi Kramer qaydası ilə həll edək.

Baş determinant:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\lambda l} - e^{\lambda l} & e^{\lambda l} - e^{-\lambda l} \end{vmatrix} = 2(e^{\lambda l} - e^{-\lambda l})$$

Köməkçi determinantlar:

$$D_1 = \begin{vmatrix} - \int_{-l}^l g(0, \xi, \lambda) h(\xi) d\xi & 1 \\ - \int_{-l}^l [g(-l, \xi, \lambda) - g(l, \xi, \lambda)] h(\xi) d\xi & e^{-\lambda l} - e^{\lambda l} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & - \int_{-l}^l g(0, \xi, \lambda) h(\xi) d\xi \\ e^{\lambda l} - e^{-\lambda l} & - \int_{-l}^l [g(-l, \xi, \lambda) - g(l, \xi, \lambda)] h(\xi) d\xi \end{vmatrix}$$

$$A = \frac{D_1}{D}; B = \frac{D_2}{D}$$

Bunu ümumi həllin ifadəsində yerinə yazsaq,

$$\begin{aligned} v(x, \lambda) &= \frac{D_1}{D} e^{\lambda x} + \frac{D_2}{D} e^{-\lambda x} + \int_{-l}^l g(x, \xi, \lambda) h(\xi) d\xi = \\ &= \int_{-l}^l \frac{g(-l, \xi, \lambda) - g(l, \xi, \lambda)}{D(\lambda)} \frac{e^{-\lambda l} - e^{\lambda l}}{e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}} h(\xi) d\xi \\ \Delta(x, \xi, \lambda) &= \begin{vmatrix} g(x, \xi, \lambda) & e^{\lambda x} & e^{-\lambda x} \\ g(0, \xi, \lambda) & 1 & 1 \\ g(-l, \xi, \lambda) - g(l, \xi, \lambda) & e^{-\lambda l} - e^{\lambda l} & e^{\lambda l} - e^{-\lambda l} \end{vmatrix} \\ G(x, \xi, \lambda) &= \frac{\Delta(x, \xi, \lambda)}{D(\lambda)} \quad (7) \end{aligned}$$

ışarə edək.

(7) düsturu ilə təyin olunan  $G(x, \xi, \lambda)$  funksiyasına (4)-(5) məsələsinin Qrin funksiyası deyilir. Nəhayət, aldiğimiz (4)-(5) spektral məsələnin həllini aşağıdakı düstur şəklində təyin etmiş oluruq:

$$v(x, \lambda) = \int_{-l}^l G(x, \xi, \lambda) h(\xi) d\xi$$

$G(x, \xi, \lambda)$  Qrin funksiyası  $\lambda$ -a nəzərən meromorf funksiyadır. Ona görə də məxrəcin sıfırlarını, yəni  $G(x, \xi, \lambda)$ -nın polyuslarını və bunlardan (əgər varsa) kənardı  $G(x, \xi, \lambda)$  funksiyasının özünü tədqiq etməliyik.

$$\begin{aligned} D &= \left| \begin{matrix} 1 & 1 \\ e^{-\lambda l} - e^{\lambda l} & e^{\lambda l} - e^{-\lambda l} \end{matrix} \right| = 2(e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}) \\ D(\lambda) &= 0 \Leftrightarrow 2(e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}) = 0 \end{aligned}$$

Buradan

$$e^{2\lambda l} = 1 \text{ və ya } e^{2\lambda l} = e^{2\pi k i},$$

$$2\lambda_k l = 2k\pi i; \lambda_k = \frac{\pi k i}{l}, k \in \mathbb{Z}.$$

$\lambda_k$ -lar Qrin funksiyasının polyuslarıdır. Burada tapılan  $\lambda_k$  kökləri sərf xəyalı ədədlərdir və onlar  $\lambda$ -kompleks müstəvisində xəyalı oxun üzərində yerləşirlər. Bundan başqa  $k \rightarrow \infty$  şərti ilə bu köklər sixlaşmırlar. Doğrudan da istənilən  $k$  üçün iki qonşu kökü götürüb aralarındaki məsafəni hesablaşsaq alarıq:

$$|\lambda_{k+1} - \lambda_k| = \left| \frac{(k+1)\pi i}{l} - \frac{k\pi i}{l} \right| = \frac{\pi}{l}$$

Nəticə sabit olduğuna görə  $k \rightarrow \infty$  şərtindən asılı olmur və o sıfıra yaxınlaşır. Bu isə  $\lambda_k$  köklərinin sixlaşmadığını göstərir. Bundan başqa, əgər  $\lambda_k$  köklərini əhatə edən  $\delta_k$  radiuslu çevrələr çəksək, onda

$$D(\lambda) = 0$$

tənliyinin kökləri bu çevrələrin daxilində qaldığından onlardan kənardı götürülmüş istənilən oblastda

$$|D(\lambda)| \geq c > 0$$

olacaq. Yəni,  $D(x)$  bir funksiya kimi aşağıdan məhduddur.

İndi də  $\Delta(x, \xi, \lambda)$ -nın tədqiqinə keçək.

$$\Delta(x, \xi, \lambda) = \begin{vmatrix} g(x, \xi, \lambda) & e^{\lambda x} & e^{-\lambda x} \\ g(0, \xi, \lambda) & 1 & 1 \\ g(-l, \xi, \lambda) - g(l, \xi, \lambda) & e^{-\lambda l} - e^{\lambda l} & e^{\lambda l} - e^{-\lambda l} \end{vmatrix}$$

$$g(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda(x-\xi)} - e^{-\lambda(x-\xi)}}{4\lambda}; & -l \leq \xi \leq x \leq l \\ -\frac{e^{\lambda(x-\xi)} - e^{-\lambda(x-\xi)}}{4\lambda}; & -l \leq x \leq \xi \leq l \end{cases}$$

$g(x, \xi, \lambda)$  funksiyasından istifadə etsək, aşağıdakı fərqi tapmaq olar:

$$g(-l, \xi, \lambda) - g(l, \xi, \lambda) = \frac{e^{\lambda(l+\xi)} - e^{-\lambda(l+\xi)}}{4\lambda} - \frac{e^{\lambda(l-\xi)} - e^{-\lambda(l-\xi)}}{4\lambda} =$$

$$= \frac{sh\lambda(l+\xi) - sh\lambda(l-\xi)}{2\lambda}$$

Aldığımız ifadələrdən görmək olar ki,  $|\lambda| \rightarrow \infty$  şərti ilə  $G(x, \xi, \lambda)$  funksiyası özünü  $\frac{1}{|\lambda|}$  kimi aparır:

$$|G(x, \xi, \lambda)| \leq \frac{c}{|\lambda|}$$

Bu qiymətləndirmədən sonra qoyulmuş məsələnin requlyar olduğunu alırıq.

Məlumdur ki, requlyar məsələ üçün ayrılış düsturu mövcuddur. Daha doğrusu, aşağıdakı kimi hökm doğrudur:

Əgər  $f(x)$  və  $\dot{f}(x)$  funksiyaları  $[0, 1]$  parçasında kəsilməzdirsə,

$$-\frac{1}{2\pi i} \sum_{\partial} \int_{c_{\partial}} \lambda^s d\lambda \int_{-l}^l G(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi = - \sum_{\partial} \text{Res } \lambda^s \int_{-l}^l G(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi = \begin{cases} f(x), & s = 1 \\ 0, & s = 0 \end{cases}$$

Burada  $c_{\partial} - \lambda_{\partial} = \pi di$  kökünü əhatə edən və daxilində ancaq bir dənə kök saxlayan kiçik radiuslu çevrələrdir. Bundan başqa,  $D(x) = 0$  tənliyinin kökləri sadə olduğuna görə  $\text{Res } -\lambda_{\partial}$ -ə çıxıqlar da sadə polyuslara görə hesablanır.

Qarışiq məsələyə uyğun spektral məsələ requlyardır və bu halda ayrılış düsturu mövcuddur. Qarışiq məslənin həllini aşağıdakı düstur şəklində göstərmək olar:

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{\partial} \int_{c_{\partial}} e^{\lambda^2 t} \lambda d\lambda \left\{ \int_{-l}^l G(x, \xi, \lambda) \left[ \varphi(\xi) + \int_0^t e^{-\lambda^2 \tau} F(\tau) d\tau \right] d\xi \right\}$$

Burada  $F(\tau) = \frac{\partial u(0, \tau)}{\partial x}$  işaret olunmuşdur.  $c_{\partial}$  isə daxilində yalnız bir dənə  $\lambda_{\partial}$  polyusunu saxlayan kiçik radiuslu çevrələrdir. Bu integrallı iki cəm şəklində yazıb onları sadələşdirək:

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{\partial} \int_{c_{\partial}} e^{\lambda^2 t} \lambda d\lambda \int_{-l}^l G(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi) d\xi - \frac{1}{2\pi i} \sum_{\partial} \int_{c_{\partial}} e^{\lambda^2 t} \lambda d\lambda \int_{-l}^l G(x, \xi, \lambda) d\xi \int_0^t e^{-\lambda^2 \tau} F(\tau) d\tau$$

Qurdüğümüz funksiyanın həll olmasını yoxlama üsulu ilə görmək olar. Əgər  $u(x, t)$  funksiyasını (1) tənliyində yazıb formal olaraq differensiallaşsaq:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2\pi i} \sum_{\partial} \int_{c_\partial} e^{\lambda^2 t} \lambda^3 d\lambda \int_{-l}^l G(x, \xi, \lambda) \left[ \varphi(\xi) - \int_0^t e^{-\lambda^2 \tau} F(\tau) d\tau \right] d\xi - \\
 & -\frac{1}{2\pi i} \sum_{\partial} \int_{c_\partial} e^{\lambda^2 t} \lambda^3 d\lambda \int_{-l}^l G(x, \xi, \lambda) (-F(t)) d\xi = \\
 & = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{\partial} \int_{c_\partial} e^{\lambda^2 t} \lambda d\lambda \int_{-l}^l \frac{d^2 G(x, \xi, \lambda)}{dx^2} \left[ \varphi(\xi) - \int_0^t e^{-\lambda^2 \tau} F(\tau) d\tau \right] + F(t)
 \end{aligned}$$

Sonra  $G(x, \xi, \lambda)$  funksiyasını  $x \neq \xi$  olduqda

$$\frac{d^2 G(x, \xi, \lambda)}{dx^2} - \lambda^2 G(x, \xi, \lambda) = 0$$

tənliyinin həlli olmasının və ayrılış düsturunu nəzərə alsaq, onda (1) tənliyinin doğruluğu isbat olunur. Sərhəd şərtlərinin ödənilməsi də  $G(x, \xi, \lambda)$  funksiyasının xassəsindən alınır. (3) başlangıç şərti də ayrılış düsturuna görə alınır.

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{\partial} \int_{c_\partial} \lambda d\lambda \int_{-l}^l G(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi) d\xi = \varphi(x)$$

İndi  $u(x, t)$  üçün yazdığımız birinci toplananı sadələşdirək. Bunun üçün əvvəlcə  $\lambda$ -ya görə integrallı hesablayaq. Çıxıqlar düsturunu tətbiq edirik:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{\partial} \int_{c_\partial} e^{\lambda^2 t} \lambda d\lambda \int_{-l}^l G(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi) d\xi = \\
 &= \sum_{\partial} \left[ \int_{-l}^l \frac{\Delta(x, \xi, \lambda_\partial)}{D'(\lambda_\partial)} \varphi(\xi) d\xi \right] \lambda_\partial e^{\lambda_\partial^2 t} \\
 D(\lambda) &= e^{-\lambda} - e^\lambda \\
 D'(\lambda) &= e^{-\lambda} - e^\lambda = -(e^\lambda + e^{-\lambda}) \\
 \lambda_\partial &= \pi\partial i
 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
 D'(\lambda) &= -(e^{\pi\partial i} + e^{-\pi\partial i}) = -2 \frac{e^{\pi\partial i} - e^{-\pi\partial i}}{2} = -2\cos = -2(-1)^\partial \\
 \Delta(x, \xi, \lambda_\partial) &= g(x, \xi, \lambda_\partial) D(\lambda_\partial) - e^{\lambda_\partial x} \begin{vmatrix} g_2(\lambda_\partial) & 1 - he^{-\frac{1}{2}\lambda_\partial} \\ g_3(\lambda_\partial) & e^{-\lambda_\partial} + he^{-\frac{1}{2}\lambda_\partial} \end{vmatrix} + \\
 &+ e^{-\lambda_\partial x} \begin{vmatrix} g_2(\lambda_\partial) & 1 - he^{\frac{1}{2}\lambda_\partial} \\ g_3(\lambda_\partial) & e^{\lambda_\partial} + he^{\frac{1}{2}\lambda_\partial} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Burada  $D(\lambda_\partial) = 0$  olduğunu

$$\begin{aligned}
 \Delta(x, \xi, \lambda_\partial) &= -e^{\lambda_\partial x} \left[ g_2(\lambda_\partial) \left( e^{-\lambda_\partial} + he^{-\frac{1}{2}\lambda_\partial} \right) - g_3(\lambda_\partial) (1 - he^{-\frac{1}{2}\lambda_\partial}) \right] + \\
 &+ e^{-\lambda_\partial x} \left[ g_2(\lambda_\partial) \left( e^{\lambda_\partial} + he^{\frac{1}{2}\lambda_\partial} \right) - g_3(\lambda_\partial) (1 - he^{\frac{1}{2}\lambda_\partial}) \right]
 \end{aligned}$$

Buradakı  $\lambda_\partial$  kökləri  $e^\lambda - e^{-\lambda} = 0$  eyniliyini ödədiyinə görə  $e^{\lambda_\partial} = e^{-\lambda_\partial}$  yazmaqla  $\Delta(x, \xi, \lambda_\partial)$  ifadəsinə bir qədər də sadələşdirə bilərik:

$$\begin{aligned}\Delta(x, \xi, \lambda_\partial) &= e^{-\lambda_\partial x} \left[ g_2(\lambda_\partial) \left( e^{\lambda_\partial} + he^{\frac{1}{2}\lambda_\partial} \right) - g_3(\lambda_\partial) \left( 1 - he^{\frac{1}{2}\lambda_\partial} \right) \right] + \\ &\pm e^{\lambda_\partial x} \left[ g_2(\lambda_\partial) \left( e^{\lambda_\partial} + he^{\frac{1}{2}\lambda_\partial} \right) - g_3(\lambda_\partial) \left( 1 - he^{\frac{1}{2}\lambda_\partial} \right) \right] = \\ &= -2sh\lambda_\partial x \left[ g_2(\lambda_\partial) \left( e^{\lambda_\partial} + he^{\frac{1}{2}\lambda_\partial} \right) - g_3(\lambda_\partial) \left( 1 - he^{\frac{1}{2}\lambda_\partial} \right) \right]\end{aligned}$$

Sonra

$$k(\xi, \lambda_\partial) = g_2(\lambda_\partial) \left( e^{\lambda_\partial} + he^{\frac{1}{2}\lambda_\partial} \right) - g_3(\lambda_\partial) \left( 1 - he^{\frac{1}{2}\lambda_\partial} \right)$$

işarə etsək, alarıq:

$$I_1 = \sum_{\partial} e^{-(\partial\pi)^2 t} \frac{(\partial\pi i)}{(-1)^\partial} \left\{ \int_{-l}^l k(\xi, \lambda_\partial) \varphi(\xi) d\xi \right\} sh\partial\pi x$$

Bu qayda ilə ikinci toplananı hesablayırıq:

$$\begin{aligned}I_2 &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{\partial} \int_{c_\partial} e^{\lambda^2 t} \lambda d\lambda \int_{-l}^l G(x, \xi, \lambda) d\xi \int_{-l}^{-l} e^{-\lambda^2 \tau} F(\tau) d\tau = \\ &= \sum_{\partial} e^{-(\partial\pi)^2 t} \frac{(\partial\pi i)}{(-1)^\partial} \left[ \int_{-l}^l k(\xi, \lambda_\partial) d\xi \right] \int_0^t e^{(\partial\pi)^2 t} F(\tau) d\tau sh\partial\pi x\end{aligned}$$

İndi də həll üçün aldığımız ifadənin  $x$ -ə görə törəməsini tapaq:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \sum_{\partial} e^{-(\partial\pi)^2 t} \frac{(\partial\pi i)}{(-1)^\partial} \left\{ \int_{-l}^l k(\xi, \lambda_\partial) \varphi(\xi) d\xi \right\} (\pi\partial) ch\partial\pi x + \\ &+ \sum_{\partial} e^{-(\partial\pi)^2 t} \frac{(\partial\pi i)}{(-1)^\partial} \left[ \int_{-l}^l k(\xi, \lambda_\partial) d\xi \right] \partial\pi ch\partial\pi x \int_0^t e^{(\partial\pi)^2 t} F(\tau) d\tau\end{aligned}$$

Əgər bu bərabərlikdə  $x = 0$  yazsaq və  $F(t) = \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}$  olduğunu nəzərə alsaq, onda  $\frac{\partial u}{\partial x}$ -ə görə integrallı tənliyə gəlirik:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} &= \sum_{\partial} \frac{e^{-\pi^2 \partial^2 t} (\partial\pi)^2 i}{(-1)^\partial} \int_{-l}^l k(\xi, \lambda_\partial) \varphi(\xi) d\xi + \\ &+ \left( \sum_{\partial} \frac{e^{-\pi^2 \partial^2 t} (\partial\pi)^2 i}{(-1)^\partial} \int_{-l}^l k(\xi, \lambda_\partial) d\xi \right) \int_0^t e^{\pi^2 \partial^2 t} \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} d\tau\end{aligned}$$

Aldığımız bu tənliyi ardıcıl yaxınlaşma üsulu ilə həll etmək olar. Bunun üçün

$$\sum_{\partial} \frac{e^{-\pi^2 \partial^2 t} (\partial\pi)^2 i}{(-1)^\partial} \int_{-l}^l k(\xi, \lambda_\partial) \varphi(\xi) d\xi = A(t)$$

$$\sum_{\partial} \frac{e^{-\pi^2 \partial^2 (t-\tau)} (\partial\pi)^2 i}{(-1)^\partial} \int_{-l}^l k(\xi, \lambda_\partial) d\xi = B(t, -\tau)$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \psi(t)$$

işarə etmək lazımdır.

$$\psi(t) = A(t) + \int_0^t B(t, -\tau) \psi(\tau) d\tau$$

İndi  $A(t)$  və  $B(t, -\tau)$  funksiyalarını qiymətləndirərək alınmış integralların həll edildiyini göstərmək lazımdır. Başlangıç şərtində götürdüyüümüz  $\varphi(x)$  funksiyasının kafi qədər hamar olduğunu və  $k(\xi, \lambda_\theta)$ -nın qiymətlərini nəzərə alsaq,

$$|A(t)| \leq \sum_{\partial} e^{-\partial^2 \pi^2 t} (\partial \pi) M$$

yaza bilərik. Burada  $M = \max_{x \in [0,1]} |\varphi(x)|$ .

Göründüyü kimi, bu sira istənilən  $t > 0$  qiymətində yiğilan olacaqdır.  $t = 0$ -da yiğilmanı təmin etmək üçün  $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$  şərti qəbul edib, iki dəfə hissə-hissə integrallamaq lazımdır. Eyni qayda ilə  $B(t, -\tau)$  ifadəsinin də yiğilan olduğunu qəbul edirik.

Deməli aldığımız integralların tənliyi ardıcıl yaxınlaşma üsulu ilə həll edə bilərik. Bunun üçün  $\psi_0 = A(t)$  götürürük. Sonra

$$\begin{aligned} \psi_1 &= A(t) + \int_0^t B(t, -\tau) \psi_0(\tau) d\tau \\ \psi_2 &= A(t) + \int_0^t B(t, -\tau) \psi_1(\tau) d\tau \end{aligned}$$

və s. qəbul etməklə həllə yaxınlaşmaları təyin edirik. Bu qayda ilə qurduğumuz  $\{\psi_k(t)\}$  funksiyalar ardıcılılığını  $k \rightarrow \infty$  şərti ilə sonlu limiti olduğundan integralların tənliyin də həllinin varlığını deyə bilərik. Beləliklə,

$$\psi(t) = \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}$$

funksiyasını tapıb yerinə yazdıqdan sonra həlli tamamilə qurmuş oluruq. Qurdığumuz həll hələlik formal həldir. Alınan sıraların yiğilan olmasını  $\varphi(x)$  üzərinə müəyyən şərtlər qoymaqla əsaslandırmış olar.

#### **ƏDƏBIYYAT**

1. Садовничий В.А., Любишкін В.А. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций экспоненциального типа, Докл. АН, СССР, 1981, т. 256, №4, с. 794-798
2. Расулов М.Л. Метод контурного интеграла// М.: Наука, 1964, 462 с.
3. Расулов М.Л. Применение вычетного метода к решению задач дифференциальных уравнений // Баку: Элм, 1989, 328 с.
4. Мамедов Ю.А., Ахмедов С.З. Исследование характеристического определителя, связанныего с решением спектральной задачи// Вестник Бакинского Государственного Университета, серия физико-математических наук. 2005, №2, с.5-12
5. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969
6. Əhmədov S.Z., Ələsgərova S.T.  $\lambda$ -kompleks parametrindən asılı dördüncü tərtib təniliyin fundamental asimptotikasının qurulması, Baki Dövlət Universiteti Xəbərləri, fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, 2012, №1, s.70-77.
7. Əhmədov S.Z. Dördüncü tərtib kompleks parametrdən asılı tənlik üçün bir sərhəd məsələsinin xarakteristik determinantının sıfırlarının asimptotikası haqqında, Baki Dövlət Universiteti Xəbərləri, fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, 2018, №2, s.97-100

IOT: 517.91

# РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОДНОМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ РАСТУЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Д.Г. ОРУДЖЕВ

Бакинский инженерный университет

Баку, Азербайджан

dorucov@beu.edu.az

**РЕЗЮМЕ**

На всей оси рассматривается одномерное уравнение Шредингера, которое на положительной полуоси представляет собой возмущенный гармонический осциллятор. Изучен спектр соответствующего оператора. Получены формулы разложения по собственным функциям непрерывного и дискретного спектров.

**Ключевые слова:** гармонический осциллятор, уравнение Шредингера, спектр, собственные функции, формулы разложения.

**ƏLAVƏ ARTAN POTENSİALLI ŞREDİNGER OPERATORUNUN MƏXSUSİ  
FUNKSİYALARI ÜZRƏ AYRILIŞ DÜSTURLARI**

**XÜLASƏ**

Bütün oxda biröülü Şredinger tənliyinə baxılmışdır, hansı ki, müsbət yarım oxda həyəcanlanmış harmonik osilyatra çevrilir. Uyğun operatorun spektri tədqiq edilmişdir. Bu operatorun kəsilməz spektri və diskret spektrinə uyğun məxsusi funksiyalar üzrə ayrılmış düsturları alınmışdır.

**Açar sözlər:** Harmonik osilyator, Şredinger tənliyi, spektr, məxsusi funksiyalar, ayrılmış düsturları.

**EIGENFUNCTION EXPANSIONS OF A ONE-DIMENSIONAL SHRODINGER OPERATOR WITH AN  
ADDITIONAL GROWING POTENTIAL**

**ABSTRACT**

The one-dimensional Schrodinger equation on the whole axis is considered which on the positive semiaxis is a perturbed harmonic oscillator. The spectrum of the corresponding operator is studied. Formulas for expansion in terms of eigenfunctions of continuous and discrete spectra are obtained.

**Keywords:** Harmonic oscillator, Schrodinger equation, spectrum, eigenfunctions, expansion formulas.

## 1. Введение

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$-y'' + \theta(x)x^2 y + q(x)y = \lambda y, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (1.1)$$

где  $\theta(x)$  - функция Хевисайда, т.е.  $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ , а вещественный потенциал  $q(x)$

удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^0 (1 + |x|)q(x)dx + \int_0^{+\infty} (1 + x^2)q(x)dx < \infty. \quad (1.2)$$

Заметим, что при положительных значениях  $x$  уравнение (1.1) представляет собой возмущенный гармонический осциллятор.

Дифференциальное уравнение (1.1) определяет [1] в пространстве  $L_2(-\infty, +\infty)$  самосопряженный оператор  $L$ , который можно получить замыканием симметричного оператора, определяемого уравнением (1.1) на дважды непрерывно дифференцируемых финитных функциях. В данной работе получено разложение по собственным функциям непрерывного спектра оператора  $L$ . Изучен спектр оператора  $L$ .

Отметим, что различные спектральные задачи для гармонического осциллятора, т.е. для уравнения (1.1), в различных контекстах изучалась многими авторами (см. [2]–[7] и библиографию в них).

## 2. Предварительные сведения

Обозначим через  $\Gamma$  комплексную  $\lambda$ -плоскость с разрезом по положительной полуоси. Пусть  $\partial\Gamma$  – граница этой плоскости, состоящая из точек верхнего и нижнего разрезов по положительной полуоси. В плоскости  $\Gamma$  рассмотрим функцию  $\sqrt{\lambda}$ , выбирая регулярную ветвь радикала такую, что  $\sqrt{\lambda+i0} > 0$  при  $\lambda > 0$ . В работе [8] доказано, что при  $q(x)=0$  уравнение (1.1) для каждого комплексного значения  $\lambda$  имеет решения  $\psi_{\pm}(x, \lambda)$ , представимые в виде

$$\psi_+(x, \lambda) = \begin{cases} D_{\frac{\lambda-1}{2}}(\sqrt{2}x), & x \geq 0, \\ \frac{1}{2} \left[ D_{\frac{\lambda-1}{2}}(0) - i\sqrt{\frac{2}{\lambda}} D'_{\frac{\lambda-1}{2}}(0) \right] e^{i\sqrt{\lambda}x} + \\ + \frac{1}{2} \left[ D_{\frac{\lambda-1}{2}}(0) + i\sqrt{\frac{2}{\lambda}} D'_{\frac{\lambda-1}{2}}(0) \right] e^{-i\sqrt{\lambda}x}, & x < 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\psi_-(x, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ D_{\frac{\lambda-1}{2}}^{-1}(0) - i\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \left( D'_{\frac{\lambda-1}{2}}(0) \right)^{-1} \right] D_{\frac{\lambda-1}{2}}(\sqrt{2}x) + \\ + \frac{1}{2} \left[ D_{\frac{\lambda-1}{2}}^{-1}(0) + i\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \left( D'_{\frac{\lambda-1}{2}}(0) \right)^{-1} \right] D_{\frac{\lambda-1}{2}}(-\sqrt{2}x), & x \geq 0, \\ e^{-i\sqrt{\lambda}x}, & x < 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

где  $D_\nu(x)$  – функция Вебера (см [8], [9]). Обозначим через  $f_{\pm}(x, \lambda)$  решения уравнения (1.1) с асимптотиками

$$f_{\pm}(x, \lambda) = \psi_{\pm}(x, \lambda) + o(1), \quad x \rightarrow \pm\infty. \quad (2.3)$$

Из результатов работы [9] следует, что при условии (1.2) такие решения существуют и единственны. Справедливы представления с помощью операторов преобразования

$$f_{\pm}(x, \lambda) = \psi_{\pm}(x, \lambda) \pm \int_x^{\pm\infty} K_{\pm}(x, t) \psi_{\pm}(t, \lambda) dt, \quad (2.4)$$

где ядра  $K_{\pm}(x, t)$  являются непрерывными функциями и удовлетворяют соотношениям

$$K_{\pm}(x, t) = O\left(\sigma_{\pm}\left(\frac{x+t}{2}\right)\right), \quad x+t \rightarrow \pm\infty, \quad (2.5)$$

Из формул (2.2), (2.4) следует, что при  $\lambda \in \partial\Gamma$  решением уравнения (1.1) является также функция  $\overline{f_-(x, \lambda)}$ . Кроме того,  $\lambda \in \partial\Gamma, \lambda \neq 0$  решения  $f_-(x, \lambda)$  и  $\overline{f_-(x, \lambda)}$  линейно независимы, так как их вронскиан в силу (2.2), (2.3) равен  $2i\sqrt{\lambda}$ . Далее, заметим, что в силу (2.1), (2.4) решение  $f_+(x, \lambda)$  принимает при  $\lambda \in \partial\Gamma$  действительные значения. Следовательно, имеет место тождество

$$f_+(x, \lambda) = a(\lambda) \overline{f_-(x, \lambda)} + \overline{a(\lambda)} f_-(x, \lambda), \quad \lambda \in \partial\Gamma, \lambda \neq 0, \quad (2.6)$$

где функция  $a(\lambda)$  определяется формулой

$$a(\lambda) = \frac{\{f_-(x, \lambda), f_+(x, \lambda)\}}{2i\sqrt{\lambda}}, \quad (2.7)$$

причем здесь и далее через  $\{u, v\} = uv' - u'v$  обозначается вронскиан функций  $u$  и  $v$ . Функции  $t(\lambda) = a^{-1}(\lambda)$  и  $r(\lambda) = a^{-1}(\lambda) \overline{a(\lambda)}$  называются коэффициентами удаления и отражения для уравнения (1.1) соответственно.

Из формул (2.4), (2.7) вытекает, что функция  $a(\lambda)$  аналитична в плоскости  $\Gamma$  и непрерывно вплоть до границы  $\partial\Gamma$ , за исключением, быть может, точки  $\lambda = 0$ . В силу (2.6) при  $\lambda \in \partial\Gamma, \lambda \neq 0$  функция  $a(\lambda)$  не обращается в ноль. Кроме того, согласно формуле (2.7) в нулях функции  $a(\lambda)$  решения  $f_+(x, \lambda)$  и  $f_-(x, \lambda)$  линейно зависимы. Так как решения  $f_+(x, \lambda)$  и  $f_-(x, \lambda)$  экспоненциально убывают при  $x \rightarrow +\infty$  и  $x \rightarrow -\infty$  соответственно, то собственные значения оператора  $L$  совпадают с нулями функции  $a(\lambda)$ . Отсюда ввиду самосопряженности оператора  $L$ , функция  $a(\lambda)$  может иметь нули, расположенные лишь на отрицательной полуоси.

Далее, стандартным методом [10] доказывается, что функция  $a(\lambda)$  может иметь лишь конечное число простых отрицательных нулей  $\lambda_j, j = 1, \dots, N$ . Имеют место соотношения

$$f_+(x, \lambda_j) = C_j f_-(x, \lambda_j), \quad (2.8)$$

$$a(\lambda) = \frac{C}{2i\sqrt{\lambda}} + O(1), \quad \lambda \rightarrow 0, \quad (2.9)$$

$$a(\lambda) = (2i\sqrt{\lambda})^{-1} \left[ \sqrt{2} D'_{\frac{\lambda-1}{2}}(0) + i\sqrt{\lambda} D_{\frac{\lambda-1}{2}}(0) \right] \left[ 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right], \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (2.10)$$

Введем обозначения

$$(m_j^\pm)^2 \stackrel{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_\pm^2(x, \lambda_j) dx, \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.11)$$

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} \pi \sum_{\lambda_j < \lambda} (m_j^+)^{-2}, & \lambda \leq 0, \\ \pi \sum_{j=1}^N (m_j^+)^{-2} + \int_0^\lambda \frac{|a(u)|^{-2}}{4\sqrt{u}} d\lambda, & \lambda > 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

### 3. Разложения по собственным функциям

Исследуем спектр оператора  $L$ . Вначале выводим формулы разложения по собственным функциям этого оператора.

**Теорема 1.** Имеют место формулы разложения

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Gamma} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} [\overline{f_-(x, \lambda)} + r(\lambda) f_-(x, \lambda)] f_-(y, \lambda) d\lambda + \sum_{j=1}^N (m_j)^{-2} f_-(x, \lambda_j) f_-(y, \lambda_j) = \delta(x - y), \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_+(x, \lambda) f_+(y, \lambda) d\rho(\lambda) = \delta(x - y), \quad (3.2)$$

где  $\delta(x)$ -дельта функция Дирак,  $\rho(\lambda)$  определяется формулой (2.12) и  $\sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda + i0}$ .

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$-y'' + q(x)y - \lambda y = f(x),$$

где  $f(x)$ -произвольная вещественная функция из  $L_2(-\infty, \infty)$ , для которой нужно получить разложение. Следуя соответствующим рассуждениям Титчмарша [11, гл.2], находим, что соответствующая функция Грина  $G(x, y, \lambda)$  имеет вид

$$G(x, y, \lambda) = \begin{cases} \frac{f_+(x, \lambda) f_-(y, \lambda)}{2i\sqrt{\lambda}a(\lambda)}, & y \leq x, \\ \frac{f_-(x, \lambda) f_+(y, \lambda)}{2i\sqrt{\lambda}a(\lambda)}, & y > x \end{cases}.$$

Согласно последнему равенству  $G(x, y, \lambda)$  является аналитической функцией в плоскости  $\Gamma$ , за исключением простых полюсов  $\lambda_j, j = 1, \dots, N$ . Положим

$$\Phi(x, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, \lambda) f(y) dy.$$

Тогда будем иметь

$$f(x) = -\frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x, \lambda + i0) d\lambda,$$

$$f(x) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x, \lambda - i0) d\lambda.$$

Откуда следует, что

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma} \Phi(x, \lambda) d\lambda + \sum_{j=1}^N \operatorname{res}_{\lambda=\lambda_j} \Phi(x, \lambda).$$

Подставляя в последнее равенство вместо  $\Phi(x, \lambda), G(x, y, \lambda)$  их выражения, получаем, что

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma} \frac{f_+(x, \lambda)f_-(y, \lambda)}{2i\sqrt{\lambda}a(\lambda)} d\lambda + \sum_{j=1}^N \operatorname{res}_{\lambda=\lambda_j} \frac{f_+(x, \lambda)f_-(y, \lambda)}{2i\sqrt{\lambda}a(\lambda)} = \delta(x-y), \quad (3.3)$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma} \frac{f_-(x, \lambda)f_+(y, \lambda)}{2i\sqrt{\lambda}a(\lambda)} d\lambda + \sum_{j=1}^N \operatorname{res}_{\lambda=\lambda_j} \frac{f_-(x, \lambda)f_+(y, \lambda)}{2i\sqrt{\lambda}a(\lambda)} = \delta(x-y). \quad (3.4)$$

Учитывая равенства (3.4), (2.8)- (2.12) в формуле (3.3), получаем (3.1).

Далее, из формулы (3.3) следует, что при  $\lambda > 0$  верно тождество

$$\frac{f_+(x, \lambda)}{|a(\lambda)|^2} = \frac{f_-(x, \lambda+i0)}{a(\lambda+i0)} + \overline{\frac{f_-(x, \lambda+i0)}{a(\lambda+i0)}} = \frac{f_-(x, \lambda+i0)}{a(\lambda+i0)} + \frac{f_-(x, \lambda-i0)}{a(\lambda-i0)}.$$

Последнее соотношение вместе с (2.8)-(2.12) приводят нас к формуле разложения (3.2).

Теорема доказана.

Следует отметить, что при  $q(x)=0$  формулы (3.1), (3.2) превращаются в формулы разложения

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Gamma} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} [\overline{\psi_-(x, \lambda)} + r_0(\lambda)\psi_-(x, \lambda)] \psi_-(y, \lambda) d\lambda = \delta(x-y),$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_+(x, \lambda) \psi_+(y, \lambda) d\rho_0(\lambda) = \delta(x-y),$$

где

$$\rho_0(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda \leq 0, \\ \int_0^{\lambda} \frac{|a_0(u)|^{-2}}{4\sqrt{u}} du, & \lambda > 0, \end{cases}$$

$$a_0(\lambda) = (2i\sqrt{\lambda})^{-1} \left[ \sqrt{2} D'_{\frac{\lambda-1}{2}}(0) + i\sqrt{\lambda} D_{\frac{\lambda-1}{2}}(0) \right],$$

$$r_0(\lambda) = \frac{\overline{a_0(\lambda)}}{a_0(\lambda)}.$$

Далее, пользуясь формулами разложения (3.1), (3.2) легко устанавливается следующее утверждение.

**Теорема 2.** Оператора  $L$  имеет непрерывный спектр, заполняющий положительную полуось  $[0, +\infty)$ . Кроме того, этот оператор может иметь лишь конечное число простых собственных значений, лежащих на отрицательной полуоси.

## **ЛИТЕРАТУРА**

1. Березин Ф.А., Шубин М.А., *Уравнение Шредингера*// М.: 1983.
2. Гасымов М.Г., Мустафаев Б.А. Обратная задача рассеяния для ангармонического уравнения на полуоси // *ДАН СССР*, 1976, т. 228, №1, с.321-323.
3. McKean H.P., Trubowitz E. The spectral class of the quantum-mechanical harmonic oscillator// *Comm. Math. Phys.*, 1982, v.82, pp.471-495.
4. Левитан Б.М.Об операторах Штурма-Лиувилля на всей прямой с одинаковым дискретным спектром// Матем. Сборник,1987, т. 132, с.73-103.
5. Chelkak D., Kargaev P., Korotyaev E.The inverse problem for an harmonic oscillator perturbed by potential: Uniqueness// *Lett. Math. Phys.*, 2003, v.64, №1, pp. 7-21.
6. Chelkak D., Korotyaev E.The inverse problem for perturbed harmonic oscillator on the half-line with Dirichlet boundary condition// *Ann. Henri Poincare*, 2007, v.8, №6, pp.1115–1150.
7. Guseinov I.M., Khanmamedov A.Kh., Mamedova A.F. Inverse scattering problem for the Schrodinger equation with an additional quadratic potential on the entire axis// *Theoretical and Mathematical Physics*, 2018, v.195, №1, pp.538–547.
8. Orucov D.H., Spectral analysis of a one-dimensional Shrodinger operator with a growing potential// NEWS OF BAKU UNIVERSITY, Series of physico-mathematical sciences, 2021, №3, pp.39-47.
9. Masmaliev G. M. and Khanmamedov A. K. Transformation operators for a perturbed harmonic oscillator// *Math. Zametki*, 2019, т.105, №5, pp.740–746.
10. Marchenko V. A. Sturm–Liouville Operators and Applications// Translated from the Russian by A. Jacob, Oper. Theory Adv. Appl. 22, Birkhauser, Basel, 1986.
11. Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка// т.1, Москва, 1960.

IOT: 517.968.23

## HİLBERT NÜVƏLİ SİNQULYAR İNTEQRAL OPERATORUN ORLİÇ FƏZALARINDA APPROKSİMASIYASI

LALƏ Ş. ƏLİZADƏ

Bakı Dövlət Universiteti

lale-alizade-98@mail.ru

**XÜLASƏ**

Bu məqalədə Orlıç fəzalarında Hilbert nüvəli sinqulyar integrallı operator bu operatorun əsas xassələrini saxlayan xüsusi operatorlar ardıcılılığı ilə approksimasiya olunur və yaxınlaşmanın yığılma sürəti göstərilir.

**Açar sözlər:** sinqulyar integrallı operator, Hilbert nüvəsi, Orlıç fəzası, approksimasiya.

### АППРОКСИМАЦИЯ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ЯДРОМ ГИЛЬБЕРТА В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА

**РЕЗЮМЕ**

В настоящей работе в пространствах Орлича сингулярный интегральный оператор с ядром Гильберта аппроксимируется последовательностью операторов, сохраняющих основные свойства этого оператора, и показаны скорости сходимости приближения.

**Ключевые слова:** сингулярный интегральный оператор, ядро Гильберта, пространство Орлича, аппроксимация.

## APPROXIMATION OF SINGULAR INTEGRAL OPERATOR WITH HILBERT KERNEL IN ORLICZ SPACES

## ABSTRACT

In this paper, singular integral operator with Hilbert kernel is approximated by a sequence of operators in Orlicz spaces, and the convergence rates of the approximation are shown.

**Keywords:** singular integral operator, Hilbert kernel, Orlicz space, approximation.

### 1. Giriş

$L_p(T)$ ,  $1 \leq p < \infty$  ilə  $p$  dərəcədən integrallanan  $2\pi$ -periodlu funksiyaların

$\|\varphi\|_{L_p(T)} = \left( \int_T |\varphi(t)|^p dt \right)^{1/p}$  normalı fəzasını işarə edək, burada  $T = [-\pi, \pi]$ . Məlumdur ki (bax, məs., [12]),  $1 < p < \infty$  halında Hilbert nüvəli

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cot \frac{t-\tau}{2} \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in T$$

sinqulyar integrallı operatoru  $L_p(T)$  fəzasında məhdud operatordur.

[1] məqaləsində isbat edilib ki,

$$(S_n \varphi)(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cot \left( -\frac{\pi(2k+1)}{2n} \right) \varphi \left( t + \frac{\pi(2k+1)}{n} \right), \quad n \in N$$

operatorlar ardıcılılığı  $L_2(T)$  fəzasında məhduddur və dərəcəsi  $n-1$  ədədini aşmayan ixtiyarı  $P(t)$  çoxhədlisi üçün

$$(S_n P)(t) = (SP)(t)$$

bərabərliyi ödənilir. Bundan əlavə [1] məqaləsində  $S_n$  operatorlar ardıcılığının  $L_2(T)$  fəzasında Hilbert nüvəli  $S$  sinqulyar integral operatoruna güclü yiğilması göstərilərək Hilbert nüvəli sinqulyar integral tənliyin yeni konstruktiv həll üsulu verilmişdir. Biz bu məqalədə Hilbert nüvəli sinqulyar integral operatorun Orliç fəzalarında  $S_n$  operatorlar ardıcılığı ilə approksimasiyasını verərək yiğilma sürətini qiymətləndirəcəyik.

## 2. Orliç fəzaları

**Tərif 2.1.** Qabarıq və soldan kəsilməz  $\Phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty]$  funksiyası

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \Phi(r) = \Phi(0) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \Phi(r) = +\infty$$

şərtlərini ödəyərsə, onda ona Yunq funksiyası deyilir.

Tərifdən alınır ki, Yunq funksiyası azalmayandır və  $\sum_{k \in Z} \alpha_k = 1$  şərtini ödəyən ixtiyari  $\alpha_k \geq 0, k \in Z$  ardıcılılığı və ixtiyari  $t_k \geq 0, k \in Z$  nöqtələri üçün

$$\Phi\left(\sum_{k \in Z} \alpha_k t_k\right) \leq \sum_{k \in Z} \alpha_k \Phi(t_k)$$

bərabərsizliyi ödənilir.

**Y** ilə ixtiyari  $0 < r < +\infty$  üçün  $0 < \Phi(r) < +\infty$  şərtini ödəyən Yunq funksiyaları çoxluğunun işarə edək. Hər bir  $\Phi \in Y$  funksiyası  $[0, +\infty)$  yarımintervalında mütləq kəsilməz biyektiv funksiyadır.

**Tərif 2.2.** Fərz edək ki,  $\Phi$  Yunq funksiyadır.  $L_\Phi(T) = \left\{ f : \exists k > 0 \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(k|f(x)|) dx < \infty \right\}$

funksiyalar sinifi Orliç fəzası adlanır.

Qeyd edək ki,  $\Phi(r) = r^p, 1 \leq p < \infty$  halında  $L_\Phi(T) = L_p(T); \Phi(r) = 0, 0 \leq r \leq 1, \Phi(r) = \infty, r > 1$  halında isə  $L_\Phi(T) = L_\infty(T)$  olur.

$L_\Phi(T)$  fəzası

$$\|f\|_{L_\Phi} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{-\pi}^{\pi} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx \leq 1 \right\}$$

norması ilə birlikdə Banax fəzası təşkil edir. Fatu teoreminə əsasən ixtiyari  $f \in L_\Phi(T)$  funksiyası üçün

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L_\Phi}}\right) dx \leq 1$$

bərabərsizliyi ödənilir.

Fərz edək ki,  $\Phi$  Yunq funksiyasıdır. Əgər elə  $k > 1$  ədədi varsa ki, ixtiyari  $r > 0$  üçün

$$\Phi(2r) \leq k\Phi(r)$$

bərabərsizliyi ödənilir, onda deyəcəyik ki,  $\Phi$  funksiyası  $\Delta_2$  şərtini ödəyir və bunu  $\Phi \in \Delta_2$  kimi işarə edəcəyik. Aydındır ki,  $\Phi \in \Delta_2$  olduqda  $\Phi \in \mathbf{Y}$  münasibəti də ödənilir. Əgər elə  $k > 1$  ədədi varsa ki, ixtiyari  $r > 0$  üçün

$$\Phi(r) \leq \frac{1}{2k} \Phi(kr)$$

bərabərsizliyi ödənilir, onda deyəcəyik ki,  $\Phi$  funksiyası  $\nabla_2$  şərtini ödəyir və bunu  $\Phi \in \nabla_2$  kimi işarə edəcəyik.

Orlıç fəzaları haqqında dolğun məlumatı [4, 8, 9, 10] monoqrafiyalarında tapmaq olar.

### 3. Hilbert nüvəli sinqulyar integral operatorun Orlıç fəzalarında approksimasiyası

$l_p$ ,  $1 \leq p < \infty$  ilə sonlu  $\|b\|_{l_p} = \left( \sum_{n \in Z} |b_n|^p \right)^{1/p}$  normasına malik  $b = \{b_n\}_{n \in Z}$  ardıcılıqlar fəzasını işarə edək.  $(h(b))_n = \sum_{m \neq n} \frac{b_m}{n - m}$ ,  $n \in Z$  bərabərliyi ilə təyin olunan  $h(b) = \{(h(b))_n\}_{n \in Z}$  ardıcılığına  $b = \{b_n\}_{n \in Z}$  ardıcılığının diskret Hilbert çevirməsi deyilir. M.Riss (bax: [11]) göstərmişdir ki,  $1 < p < \infty$  halında diskret Hilbert çevirməsi  $l_p$  fəzasında məhdud operatordur, yəni bu halda  $b \in l_p$  münasibətindən  $h(b) \in l_p$  münasibəti alınar və

$$\|h(b)\|_{l_p} \leq C_p \|b\|_{l_p}$$

bərabərsizliyi ödənilir, burada  $C_p$  yalnız  $p$  ədədindən asılı sabitdir.

Biz diskret Hilbert çevirməsinin modifikasiya olunmuş variantından istifadə edəcəyik:

$(\tilde{h}(b))_n = \sum_{m \in Z} \frac{b_m}{n - m - 1/2}$ ,  $n \in Z$ . K.Andersen [3] göstərmişdir ki, modifikasiya olunmuş diskret Hilbert çevirməsi də  $p > 1$  halında  $l_p$  fəzasında məhdud operatordur, yəni yalnız  $p$  ədədindən asılı sabitdir elə  $\tilde{C}_p > 0$  ədədi var ki, ixtiyari  $b \in l_p$  üçün

$$\|\tilde{h}(b)\|_{l_p} \leq \tilde{C}_p \|b\|_{l_p}$$

bərabərsizliyi ödənilir.

[2] məqaləsində isbat edilmişdir ki, ixtiyari  $p > 1$  və  $\delta > 0$  ədədləri üçün

$$(H_\delta u)(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{u(t + (k + 1/2)\delta)}{-k - 1/2}, \quad t \in R$$

operatoru  $L_p(R)$  fəzasında məhdud operatordur və

$$\|H_\delta\|_{L_p(R) \rightarrow L_p(R)} \leq \|\tilde{h}\|_{l_p \rightarrow l_p} \quad (3.1)$$

bərabərsizliyi ödənilir.

Bu nəticədən istifadə edərək  $S_n$  operatorlar ardıcılığının  $L_p(T)$  fəzasında müntəzəm məhdudluğunu göstərə bilərik.

**Teorem 3.1.** İxtiyari  $p > 1$  üçün  $S_n$  operatorlar ardıcılığı  $L_p(T)$  fəzasında müntəzəm məhduddurlar və ixtiyari  $n \in N$  üçün

$$\|S_n\|_{L_p(T) \rightarrow L_p(T)} \leq 4 + 2\|\tilde{h}\|_{l_p \rightarrow l_p}$$

bərabərsizliyi ödənilir.

**İsbati.** Fərz edək ki,  $\varphi \in L_p(T)$ . Aşağıdakı qayda ilə  $u(t)$ ,  $t \in R$  funksiyası təyin edək:

$$u(t) = \varphi(t), \quad t \in [-2\pi, 2\pi] \text{ olduqda və } u(t) = 0, \quad t \in R \setminus [-2\pi, 2\pi] \text{ olduqda.}$$

Onda  $u \in L_p(R)$  olar və (3.1) bərabərsizliyindən alarıq ki, ixtiyari  $\delta > 0$  üçün

$$\|H_\delta u\|_{L_p(R)} \leq \|\tilde{h}\|_{l_p \rightarrow l_p} \cdot \|u\|_{L_p(R)} = 2\|\tilde{h}\|_{l_p \rightarrow l_p} \cdot \|\varphi\|_{L_p(T)}. \quad (3.2)$$

ödənilir. İxtiyari  $t \in [-\pi, \pi]$  üçün

$$(S_n \varphi)(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cot\left(-\frac{\pi(2k+1)}{2n}\right) \varphi\left(t + \frac{\pi(2k+1)}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k \in \Delta_n} \cot\left(-\frac{\pi(2k+1)}{2n}\right) \varphi\left(t + \frac{\pi(2k+1)}{n}\right)$$

$$\left(H_{\frac{2\pi}{n}} u\right)(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{u\left(t + \frac{\pi(2k+1)}{n}\right)}{-k - 1/2} = \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \Delta_n} \frac{\varphi\left(t + \frac{\pi(2k+1)}{n}\right)}{-k - 1/2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \Delta'_n} \frac{u\left(t + \frac{\pi(2k+1)}{n}\right)}{-k - 1/2}$$

olduğundan, burada

$$\Delta_n = \left\{ k \in Z : \left[ \frac{-n+1}{2} \right] \leq k \leq \left[ \frac{n-1}{2} \right] \right\}, \quad \Delta'_n = \left\{ k \in Z : |k| \leq 2n, \quad k > \left[ \frac{n-1}{2} \right] \text{ or } k < \left[ \frac{-n+1}{2} \right] \right\}$$

alarıq ki,

$$\begin{aligned} \left(H_{\frac{2\pi}{n}} u\right)(t) - (S_n \varphi)(t) &= \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k \in \Delta_n} \left[ \cot \frac{\pi(2k+1)}{2n} - \frac{2n}{\pi(2k+1)} \right] \varphi\left(t + \frac{\pi(2k+1)}{n}\right) + \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \Delta'_n} \frac{u\left(t + \frac{\pi(2k+1)}{n}\right)}{-k - 1/2}. \quad (3.3) \end{aligned}$$

(3.3) bərabərliyi və ixtiyari  $0 < |x| \leq \frac{\pi}{2}$  üçün

$$\left| \cot x - \frac{1}{x} \right| \leq \frac{2}{\pi}$$

bərabərsizliyindən

$$\left\| H_{\frac{2\pi}{n}} u - S_n \varphi \right\|_{L_p([-\pi, \pi])} \leq \frac{1}{n} \sum_{k \in \Delta_n} \frac{2}{\pi} \|\varphi\|_{L_p(T)} + \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \Delta'_n} \frac{2}{n} \|\varphi\|_{L_p(T)} \leq 4 \|\varphi\|_{L_p(T)}. \quad (3.4)$$

qiymətləndirməsini alarıq. (3.2) və (3.4) bərabərsizliklərindən isə

$$\|S_n \varphi\|_{L_p(T)} \leq \left\| H_{\frac{2\pi}{n}} u - S_n \varphi \right\|_{L_p([-\pi, \pi])} + \left\| H_{\frac{2\pi}{n}} u \right\|_{L_p(R)} \leq \left( 4 + 2 \|\tilde{h}\|_{L_p \rightarrow L_p} \right) \cdot \|\varphi\|_{L_p(T)}$$

olduğunu alarıq. Teorem isbat olundu.

**Nəticə 3.1.** Fərz edək ki  $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ . Onda  $S_n$  operatorlar ardıcılılığı  $L_\Phi(T)$  fəzasında müntəzəm məhduddurlar, yəni elə  $C_\Phi > 0$  sabit ədədi var ki, ixtiyari  $n \in N$  üçün

$$\|S_n\|_{L_\Phi(T) \rightarrow L_\Phi(T)} \leq C_\Phi \quad (3.5)$$

bərabərsizliyi ödənilir.

**İsbati.**  $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$  şərtinə əsasən  $L_\Phi(T)$  fəzası refleksivdir. Buna görə də elə  $1 < q < p < \infty$  ədədləri var ki,  $L_p(T) \subseteq L_\Phi(T) \subseteq L_q(T)$  kəsilməz daxilolma münasibəti ödənilir (bax, məs. [7, 10]). Teorem 3.1-ə əsasən ixtiyari  $p > 1$  üçün  $S_n$  operatorlar ardıcılılığı  $L_p(T)$  fəzasında müntəzəm məhduddurlar. Onda Orlıç fəzalarında interpolasiya teoreminə əsasən (bax, [5, 6, 10]) alarıq ki,  $S_n$  operatorlar ardıcılılığı  $L_\Phi(T)$  fəzasında müntəzəm məhduddurlar, yəni elə  $C_\Phi > 0$  sabit ədədi var ki, ixtiyari  $n \in N$  üçün (3.5) bərabərsizliyi ödənilir.

**Teorem 3.2.** Fərz edək ki,  $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ . Onda  $S_n$  operatorlar ardıcılılığı  $L_\Phi(T)$  Orlıç fəzasında  $S$  operatoruna güdü yığılır və ixtiyari  $\varphi \in L_\Phi(T)$  funksiyası üçün

$$\|S\varphi - S_n \varphi\|_{L_p(T)} \leq \left( \|S\|_{L_\Phi(T) \rightarrow L_\Phi(T)} + C_\Phi \right) E_{n-1}^\Phi(\varphi), \quad n \in N,$$

bərabərsizliyi ödənilir, burada  $C_\Phi$  (3.5) bərabərsizliyində iştirak edən sabit,  $E_{n-1}^\Phi(\varphi)$  – isə  $\varphi$  funksiyasının  $L_\Phi(T)$  metrikasında dərəcəsi  $n-1$  ədədini aşmayan trigonometrik çoxhəndlilərlə ən yaxşı yaxınlaşmasıdır, yəni

$$E_{n-1}^\Phi(\varphi) = \inf \left\{ \|\varphi - P_{n-1}\|_{L_\Phi} : P_{n-1}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n-1} (a_m \cos mt + b_m \sin mt) \right\}.$$

**İsbati.** Fərz edək ki,  $q_{n-1}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n-1} (a_m \cos mt + b_m \sin mt)$  çoxhədlisi  $\varphi$  funksiyasının  $L_\Phi(T)$  metrikasında dərəcəsi  $n-1$  ədədini aşmayan trigonometrik çoxhəndlilərlə ən yaxşı yaxınlaşma çoxhədlisidir. Onda

$$(S_n q_{n-1})(t) = (S q_{n-1})(t)$$

bərabərliyindən alarıq ki,

$$(S\varphi - S_n \varphi)(t) = S(\varphi - q_{n-1})(t) - S_n(\varphi - q_{n-1})(t)$$

olur. Buradan isə

$$\begin{aligned} \|S\varphi - S_n\varphi\|_{L_\Phi(T)} &\leq (\|S\|_{L_\Phi(T) \rightarrow L_\Phi(T)} + \|S_n\|_{L_\Phi(T) \rightarrow L_\Phi(T)}) \cdot \|\varphi - q_{n-1}\|_{L_\Phi(T)} \leq \\ &\leq (\|S\|_{L_\Phi(T) \rightarrow L_\Phi(T)} + C_\Phi) E_{n-1}^\Phi(\varphi) \end{aligned}$$

bərabərsizliyinin ödənildiyini alarıq. Teorem isbat olundu.

#### ƏDƏBİYYAT

1. Aliev R.A., Amrahova A.F. *A constructive method for the solution of integral equations with Hilbert kernel*. Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN, **18:4**, p. 14-25, 2012 (in Russian).
2. Aliev R.A., Gadjeva Ch.A. *On the approximation of the Hilbert transform*. Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN, **25:2**, p. 30-41, 2019 (in Russian).
3. Andersen K.F. *Inequalities with weights for discrete Hilbert transforms*. Canad. Math. Bull., **20:1**, p. 9-16, 1977.
4. Bennett C., Sharpley R. *Interpolation of Operators*, Academic Press, Boston, 1988.
5. Boyd D.W. *Indices of Function Spaces and Their Relationship to Interpolation*, Can. J. Math., **21**, p.1245-1254, 1969.
6. Boyd D.W. *Indices for the Orlicz Spaces*, Pacific J. Math. **38**, p. 315-323, 1971.
7. Karlovic A.Yu. *Algebras of Singular Integral Operators with Piecewise Continuous Coefficients on Reflexive Orlicz Spaces*, Math. Nachr. **179**, p. 187-222, 1996.
8. Krasnoselskii M.A., Rutitskiy Ya.B. *Convex Functions and Orlicz Spaces*, Fizmatgiz, Moscow, 1958 (in Russian). English transl.: Noordhoff Ltd., Groningen, 1961.
9. Lindenstrauss J., Tzafriri L. *Classical Banach Spaces. function Spaces*, Springer Verlag, New York, Berlin, 1979.
10. Maligranda L. *Orlicz Spaces and Interpolation*, Sem. Math. 5, Dep. Mat., Univ. Estadual de Campinas, Campinas SP, Brazil, 1989.
11. Riesz M. *Sur les fonctions conjuguées*. Math. Z., **27**, p. 218-244, 1928.
12. Zygmund A. *Trigonometric series, vol. I*. Cambridge Univ. Press; 1959.

IOT: 004.02

## “BIG DATA” TEKNOLOGİYALARI: MÖVCUD VƏZİYYƏT VƏ PERSPEKTİVLƏR

**DOSENT, T.E.N. ESGEROVA BAHAR, ELVIN JAFAROV,  
NIJAT BABAYEV, ALLAHSHUKUR AHMADZADA**

Azerbaijan State Oil and Industry University

Information Technology and Management/ Information Technology and Systems

*bahar2870@mail.ru, elvincafarov95@gmail.com, nicatbabayev@gmail.com, a.ahmadzada1998@gmail.com*

BAKU, AZERBAIJAN

### XÜLASƏ

Məqalə “Böyük Verilənlər” – “Big Data” fenomeninə həsr olunub. Məqalədə böyük verilənlərin mahiyyəti, mənbələri və imkanları təhlil olunur. Məqalədə həmçinin, böyük verilənlərin problemləri, 3V konsepsiyası və mövcud yanaşmalar tədqiq olunur, böyük verilənlərin analizi məsələləri araşdırılır. Bu konsepsiyanın reallaşdırılmasında mövcud program-aparat məhsulları analiz olunur.

Big Data müxtəlif mənbələrdən fərqli formatlarda yüksək sürətlə daxil olan böyük həcmli verilənlərin emalı, analizi və onlardan faydalı biliklərin çıxarılması texnologiyalarını və alətlərini özündə birləşdirir. Son dövrlər elmi və kütləvi ədəbiyyatda Big Data texnologiyaları elektron dövlət, biznes, səhiyyə, elm, istehsal və digər fəaliyyət sahələrində yeni perspektivlər açan və inqilabi dəyişikliklər edə biləcək texnologiyalar kimi təqdim edilir. Bu işdə həmin iddiaların söykəndiyi arqumentlərin potensialını müəyyən etmək və Big Data sahəsində düzgün strategiya seçmək üçün həmin texnologiyaların mahiyyəti, xüsusiyyətləri, texnoloji komponentləri və analitik imkanları kritik analiz edilir, üstünlük'ləri, perspektivləri və mövcud problemləri göstərilir.

Eyni zamanda, “Big Data”nın zərərli və faydalı tərəfləri, problemləri və gələcək perspektivləri öz əksini tapıb.

**Açar sözlər:** Böyük Verilənlər, Big Data analitikası, verilənlərin intellektual analizi, Hadoop, prediktiv analitika.

### “BIG DATA” TECHNOLOGIES: CURRENT SITUATION AND PROSPECTS

#### ABSTRACT

The article was devoted to the "Big data" phenomenon. The article analyzes the essence, sources and possibilities of big data. The article also examines the problems of big data, the 3V concept and existing approaches, and examines the issues of big data analysis. In the implementation of this concept, the existing hardware and software products are analyzed.

Big Data combines technologies and tools for processing, analyzing and extracting useful knowledge from large volumes of data coming in at high speed from various sources in different formats. In the recent scientific and mass literature, Big Data technologies are presented as technologies that open new perspectives and can make revolutionary changes in electronic government, business, healthcare, science, production and other fields of activity. In this work, in order to determine the potential of the arguments on which those claims are based and to choose the right strategy in the field of Big Data, the nature, characteristics, technological components and analytical capabilities of those technologies are critically analyzed, their advantages, perspectives and current problems are shown.

At the same time, the harmful and beneficial aspects, problems and future prospects of "Big Data" have been reflected.

**Keywords:** Big Data, Big Data analytics, intelligent data analysis, Hadoop, predictive analytics.

#### ТЕХНОЛОГИИ “BIG DATA”: ТЕКУЩЕЕ СОСТОЯНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ

#### РЕЗЮМЕ

Статья посвящена феномену «Больших Данных» - "Big data". В статье анализируются сущность, источники и возможности больших данных. В статье также рассматриваются проблемы больших данных, концепция 3V и существующие подходы, рассматриваются вопросы анализа больших данных. При реализации данной концепции анализируются существующие программно-аппаратные продукты.

Большие данные объединяют технологии и инструменты для обработки, анализа и извлечения полезных знаний из больших объемов данных, поступающих с высокой скоростью из различных источников в различных

форматах. В новейшей научной и массовой литературе технологии Big Data представляются как технологии, открывающие новые перспективы и способные произвести революционные изменения в электронном правительстве, бизнесе, здравоохранении, науке, производстве и других сферах деятельности. В данной работе, чтобы определить потенциал аргументов, на которых основаны эти утверждения, и выбрать правильную стратегию в области больших данных, критически анализируются природа, характеристики, технологические компоненты и аналитические возможности этих технологий, показаны их преимущества, перспективы и текущие проблемы.

При этом были отражены вредные и полезные стороны, проблемы и перспективы «Больших Данных».

**Ключевые слова:** Большие Данные, аналитика Больших Данных, интеллектуальный анализ данных, Hadoop, прогнозная аналитика.

## **INTRODUCTION**

The “Big Data” phenomenon, which appeared since the 2000s – reflecting a new era in data acquisition and use, this concept is relative and may change from time to time. That is, information considered “big” for today can be considered normal for tomorrow. Big data volume is considered from 1 terabyte (1Tb=1024 Gb) to larger data (1Zetabyte=1024Exabyte). (Worldwide Big Data Technology and Services 2013–2017 Forecast. <http://www.idc.com>)

In the last few years, as a result of the rapid increase in the volume and variety of processed data and a number of technological solutions that accompany it, a “transition from quantity to quality” is taking place - this phenomenon is called “Big Data”. Experts point out that the “Big Data” trend is the obvious driving force of the ICT industry. (Manyika J., Chui M., Brown B., Bughin J., Dobbs R., Roxburgh C., Byers, 2011: p.85). Today, it is already clear that “Big Data” is one of the leading areas of computer science that opens new perspectives for research in the field of processing, analyzing and extracting useful knowledge from large volumes of various types of data.

Today, the ICT industry is poised to offer a variety of approaches that work with Big Data to benefit both the public sector and businesses. Large enterprises (banks, telecommunications operators, retailers) can learn almost everything about their customers based on the analysis of data stored in their customer databases. Thanks to the integration of Big Data and cloud technologies, Big Data also opens up great opportunities for small businesses. But despite all the advantages provided by Big Data technologies, only 0.5% of digital data collected in the world is investigated.

The main sources of Big Data are scientific experiments, sensor and social networks, portals of government agencies, climate data, GPS signals, GIS systems, databases of large companies, e-mail, mobile devices, large sales centers, bank transactions, etc. Sources of Big Data are mainly divided into five categories: web and social media; machine-to-machine (M2M); transactions; scientific; human-generated data. (Philip C.L., Zhang C-Y., 2014: pp. 314–347). The idea of “Internet of Things” is the best example of M2M communication.

## **KEY PROBLEMS OF “BIG DATA” OR THE 3V CONCEPT**

Regardless of the areas of application, there are common characteristics that describe “Big Data” and also reflect their main challenges: volume, velocity, and variety. In English-language sources, it is also called “3Vs”. Convergence of these parameters helps define Big Data and differentiate it from other data. This model was first given by D. Laney in 2001 and constitutes the basic concept of “Big Data” technologies. (Laney D. 2001. <http://blogs.gartner.com/>). This

concept reflects the idea of more efficiently using, storing and analyzing large amounts of data collected from various sources at a very high speed and obtaining more valuable information from it. Analysts also mention the fourth - veracity and fifth - value characteristics, which are sometimes described as "5Vs". (Big data: The next frontier for innovation, competition, and productivity, 2011. <http://www.mckinsey.com/>).

*Volume* is the main characteristic of "Big Data". The volume problem primarily poses a storage problem, requiring large-scale storage and distributed processing. Currently, a number of technologies that perform the migration of information between devices in solving the storage issue: DAS (Direct-AttachStorage), NAS (Network Attached Storage), SAN (Storage Area Networks), HSM (Hierarchical Storage Management), ILM (Information Life-cycle Management) is available. Recently, by implementing the clustering and virtualization of computing and memory resources, the application of "grid" and "cloud computing" technologies that serve data processing and storage have almost eliminated the problems in the field of storage. (Chen J., Chen Y., Xiaoyong D., et.all, 2013: pp. 157–164). Depending on the volume, "Big Data" is divided into 3 groups: (McAfee A., Brynjolfsson E., 2012: pp. 60–68).

1. *Fast Data* – their volume is measured in terabytes;
2. *Big Analytics* - their volume is measured in petabytes;
3. *Deep Insight* - their size is measured in exabytes and zettabytes.

*Speed*. As the volume increases, processing speed is also required. Two cases are considered here. First, new data is generated at a great speed, existing ones are updated and collected. Second, speed is evaluated as a time problem and is explained by the fact that existing processing technologies have the ability to analyze data in real time. (McAfee A., Brynjolfsson E., 2012: pp. 60–68).

*Diversity* is one of the natural features of "Big Data". In addition to structured data expressed in rows and columns of a traditional relational database, "Big Data" is also available in such unstructured types – text, video-audio files, images, etc. This type of data makes up 80-90% of all information in the world. It is very difficult to assemble and co-process them and put them in a suitable form for analysis.

## **"BIG DATA" TOOLS AND TECHNOLOGICAL SOLUTIONS**

"Big Data" technologies are related to the emergence of a phase – "information explosion" - which has reached a "perfect" content level and is expressed by exponential growth with the achievement of the Internet. With the overabundance of information, it becomes more difficult to manage them, creating the problem of information overload. In order to solve the problem, Google File System and MapReduce software-hardware platform was created by Google, one of the giants of the IT field. Based on this, the open-source Apache Hadoop and Hadoop File System software were developed and thereby laid the foundation of "Big Data" technologies. (Hadoop. <http://hadoop.apache.org>).

*MapReduce* distributed computing model was introduced by Google in 2004 and is the basis of parallel programming on "Big Data". (Ghemawat S., Gobioff H., Leung S.T., 2003: pp. 29–43). Its main idea is to process large and complex data by dividing it into small parts. The work of MapReduce consists of two stages (Map and Reduce). In the "Map" stage, the input data is sent to the master node for preliminary processing, and there it is distributed among other computers

(worker nodes). In the “Reduce” phase, the main node collects the processed data from the working nodes and based on it, the result of solving the problem is formed.

*Hadoop*, a project of the Apache Software Foundation, which is considered the de facto standard of “Big Data”, is a more widespread technology, the main platform for processing and analyzing big data in a distributed computing environment, an open source (open access) system of the MapReduce model, and provides scalability to more than 1000 nodes. Hadoop consists of two main components: Hadoop MapReduce and Hadoop Distributed File System (HDFS). MapReduce addresses parallel computing, while HDFS distributed file system addresses data management. (*Hadoop*. <http://hadoop.apache.org>).

*New types of databases*. Under the influence of a sharp increase in the volume of data, certain activity is beginning to be felt in the field of database management systems (DBMS), which is considered a stable field, which manifests itself in the emergence of two movements such as NoSQL and NewSQL. (Dean J., Ghemawat S., 2004: pp.137–150).

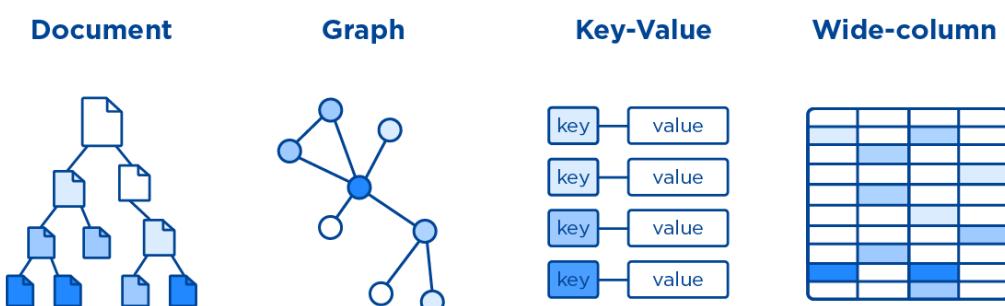
NoSQL (not only SQL or no SQL) is a term denoting a number of projects and approaches aimed at implementing database models that are significantly different from accessing data through SQL used in traditional relational databases (emerged in 2009).

NoSQL databases are a new type of database: non-relational, distributed, open source and horizontally scalable. When implementing NoSQL-solutions, tables, trees and other data structures can be used to describe the data schema. (Anglade T. noSQL Tapes. <http://www.nosqltapes.com>)

Proponents of the NoSQL concept point out that this concept does not completely negate relational models and the SQL language. The project proceeds from the fact that SQL is an important tool, but it cannot be universal. One of the stated problems for relational databases is that they perform poorly with large amounts of data. The goal of the project is to extend the capabilities of databases where SQL is not flexible.

NoSQL (Not Only SQL) is considered the basis of the “Big Data” world today and is used to solve problems such as scalability, availability and consistency of data management. In the literature, these three characteristics of distributed systems are also known as the CAP (Consistency, Availability and Partition Tolerance) theorem proposed by Eric Brewer, a professor at Berkeley University. (Stonebraker M., Madden S., Abadi D. J., Harizopoulos S., Hachem N., Helland P., 2007: pp. 1150-1160).

**Figure 1.** NoSQL Databases



*Efficient cluster solutions*. Currently, parallel database technologies are widespread. This technology provides multiple processors access to a single database, which allows transactions to

reach a higher throughput, support a large number of users at the same time, and accelerate the execution of complex queries.

*SNA (Shared Nothing Architecture)* – an architecture where resources are not shared, scales better and is becoming increasingly popular. SNA is a distributed independent computing architecture where each node has its own memory, disk array, and input-output (I/O) devices. In such an architecture, each node is independent in itself and does not share anything with other nodes in the network. Each SNA node performs its own task by interacting with other nodes using a specific protocol. The performance of such systems can be increased by adding processors, RAM, disk storage to each node, or by increasing the number of such nodes.

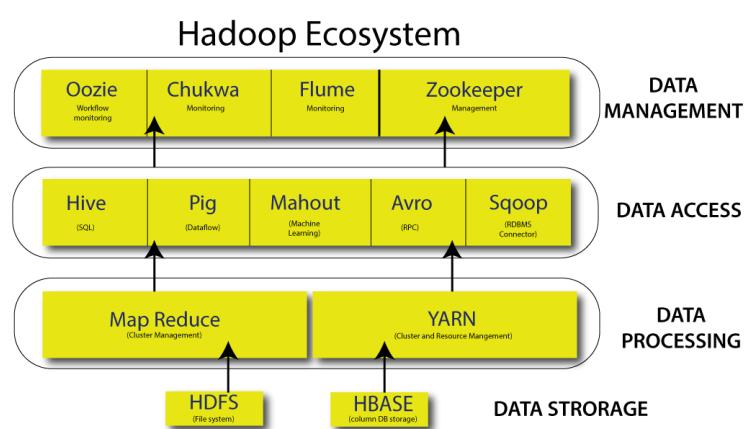
*Big Data and Cloud technologies.* Cloud technologies are, above all, a flexible approach that provides efficiency, scalability, migration and extensibility for Big Data analysis. (Stonebraker M., Madden S., Abadi D. J., Harizopoulos S., Hachem N., Helland P., 2007: pp. 1150-1160). The cloud environment helps improve the efficiency of data access and offers a flexible set of resources to process large volumes of data. At this time, the problems of storing huge amounts of data and providing sufficient computing resources for their processing are solved. In the cloud, data is placed in several areas, which makes it possible to place it close to the user, reduce the application time and increase productivity. (Ghemawat S., Gobioff H., Leung S.T., 2003: pp. 29–43).

To support the integration of Big Data and cloud technologies, a virtual company called Pivotal Initiative has been created, which includes companies such as Pivotal Labs, Greenplum, vFabric, Cloud Foundry, Spring and Cetas. It is about combining PaaS and Big Data analytics solutions into a single structure. In this alliance, VMware products are responsible for the integration of infrastructure and PaaS, Greenplum systems - analytics, Pivotal - product areas and creating a common commercial solution.

*The Hadoop ecosystem.* Currently, the Hadoop ecosystem (Figure 2) is considered synonymous with "Big Data". MapReduce technology, which provides automatic parallelization of data and their processing in clusters, is implemented in Hadoop (created in 2005 by Doug Cutting and Mike Cafarella, the name Hadoop was taken from the name of Cutting's young son's toy elephant). Most of the components of Hadoop are open source software developed in various Apache projects. (Ghemawat S., Gobioff H., Leung S.T., 2003: pp. 29–43).

Below is a brief description of some of the components included in the Hadoop ecosystem is given:

**Figure 2. Hadoop Ecosystem**



*HDFS (Hadoop Distributed File System)* – at the core of Hadoop is a distributed file system for storing and managing data stores ranging from several terabytes to petabytes in size. HDFS divides the input data into blocks, and each block is placed in allocated locations on a cluster of servers. TCP/IP layer is used for communication. HDFS is fault tolerant, if any of the components fail, it does not affect the overall performance of the system. HDFS implementation enables applications to operate at the scale of thousands of nodes and petabytes of data. For example, the HDFS system manages about 40 Petabytes of data at Yahoo!

*Pig* is a high-level language for evaluating large amounts of data. The *Apache Pig* component was created with the idea of creating and executing commands on Big Data clusters. A key feature of Pig programs is parallelization, which helps in handling large datasets. The Pig component consists of a compiler that generates MapReduce program sequences and the “*Pig Latin*” language, which supports executing SQL-like queries on Hadoop distributed databases. (Agrawal D., Das S., Amr El, 2011: pp.530-533).

Often, Hadoop is used together with standard technologies of data storage and processing, and sometimes innovative solutions such as Storm, Dremel, Drill are also added. In addition, practically all major manufacturers of business analytics products add functionality to their products for accessing data that is persistently stored in Hadoop clusters. This list of components can be expanded many times, as more and more companies enter the market with products related to Hadoop in one way or another.

Currently, there are various software and hardware solutions that provide parallel processing by information technology giants such as IBM, Microsoft, SAS, HP, EMC for storing, managing, analyzing and visualizing large volumes of data. Traditional data warehouses provide a set of tools such as multivariate analysis (OLAP), classification, clustering, today, for the analytical processing of terabytes of information in the RAM, there are products from the SAP company HaNa (High-performance Analytic Appliance), Oracle Exalytics, Oracle Exadata. In addition, companies such as Netezza, Teradata, and Greenplum have software tools that efficiently process terabytes and exabytes of data based on a traditional relational data management system.

Today, modern IT factors: big data, analytics and cloud technologies cannot be imagined separately from each other. Cloud technologies are one of the most successful approaches to storage and large scale computing. Here, a large amount of digital information is managed and stored centrally through “cloud” services – *IaaS* - Infrastructure as a service, *PaaS* - Platform as a service, *SaaS* - Software as a service. (Agrawal D., Das S., Amr El, 2011: pp.530-533).

## **“BIG DATA” ANALYTICS**

We are currently living in an era of widespread science, technics and technology that has enabled the production of large data streams in exabytes and zettabytes. In the field of science, “Big Data” is increasing, because now scientific research is more focused on scientific experiments (LHS-Large Hydron Collider, LSST-Large Synoptic Survey Telescope, Hubble telescope, etc., which generates information in petabytes) than theoretical thoughts. The “Big Data” array is emerging in commerce, because now most of the human activity is on the Internet, online.

The demand for data analysis in real-time as close as possible led to the creation of Big Data Analytics, which allows finding correlations between various parameters, characteristics, events,

classification and analytical reports, and making predictions based on this. (Chen Y., Alspaugh S., Katz R.H., 2012: pp. 1802–1813). Experts note two approaches in Big Data analysis: ***store and analyze; analyze and store***. In the first case, before applying analytical tools to the data raw data obtained from transaction systems (OLTP - Online Transaction Processing) are processed and loaded into the data warehouse. Traditional analytical solutions (OLAP - Online Analytical Processing) created on the basis of this principle are inconsistency in the analysis of Big Data. It is known that supercomputers calculate a large number of (flops) per second operations and are useful only when working with structured data. Now, for data streaming analysis, a hypothetical device is needed that processes the data immediately closer to the point of collection, rather than collecting it in dedicated storage locations. Called DataScope, this device aims to work with experimental data, unlike supercomputers. In general, the need to process data arrays with petabytes has brought forth the “Data-Intensive Computing” approach. In this case, data is directed not to calculations, but calculations to data.

In the field of Big Data analysis, there are the most modern technologies such as ROLAP (Relational On-Line Analytical Processing), MOLAP (Multi-Dimensional On-Line Analytical Processing), HOLAP (Hybrid Online Analytical Processing). Choosing one of them depends on updating the data.

Deeper intellectual analysis (mining) of unstructured data and visualization of results are the main issues of Big Data analytics. In solving the problem, such methods as classification, clustering, neural networks from the class of data mining technologies are applied. (Wu X., Zhu X., Wu G.Q., Ding W., 2014, vol.26, pp.97-107).

Intellectual analysis of unstructured data is a relatively young field of scientific research, more studies have been conducted in the field of intellectual analysis of text data - Text Mining. The main areas of research in the field of Text Mining are text classification, clustering, abstracting, feature extraction, question answering, thematic indexing, keyword searching, tone of judgment analysis (Sentiment analysis), analysis of opinions (Opinion Mining) can be attributed. (Wu X., Zhu X., Wu G.Q., Ding W., 2014, vol.26, pp.97-107).

*Predictive analytics.* Predictive analytics is a set of methods of statistics, data analysis and game theory used in the analysis of current and past data or events to predict future data or events. (Siegel E. Predictive Analytics, 2013: 320 p).

A close concept to predictive analytics is *Data Mining*, as predictive analytics uses partially similar methods. The essence of predictive analytics is the identification of a predictor or predictors (parameters that affect the predicted event). For example, insurance companies look at predictors such as age and driving experience when determining premiums. A set of predictors constitutes a predictive analytics model, and this model predicts the observed event with a certain probability in the future. (Siegel E. Predictive Analytics, 2013: 320 p).

The most famous example of the use of predictive analytics is the application of scoring models for assessing the customer's ability to pay when granting a loan in a bank. However, the fields of application of predictive analytics are quite wide, the greatest need for it is in banking and financial services working with end consumers, insurance, pharmaceuticals, public sector, telecommunications and information technologies, and retail.

Eric Siegel in his book “Predictive Analytics” shows the ten most common application areas of predictive analytics: direct marketing; predictive advertising targeting; detection of fraud

schemes; investment risk management; customer retention; referral services; education; political campaigns; decision making systems in medicine; insurance and mortgage loan. (McAfee A., Brynjolfsson E., 2012: pp. 60–68).

In order to deal with the problems of Big Data, there is a need for more specialized specialists called “data scientist” with skills and habits in various fields, starting from traditional informatics to mathematics. Starting from 2013, master’s programs in the field of “data science” have been taught at the University of Dundee (Scotland), the University of Auckland (New Zealand), Imperial College London, the University of Southern California, Washington, Berkeley, and New York. This problem is considered as a new issue of education.

*Building Big Data models.* Often the challenge is to build accurate models for “Big Data” data. Various Data Mining, Machine Learning algorithms have Map-Reduce implementations for parallel processing of large volumes of data. But it is difficult to say whether the final model obtained from the processing of large volumes of data is really accurate.

In fact, it is more convenient to build models of data that are not large. One approach to Big Data analysis is to use the entire volume of data for segmentation and clustering, build a large number of models for the resulting small segments and clusters, and then make predictions on the appropriate model. At the limit, a separate model of each person can be built on a large database of customers to predict future purchases.

Thus, an analytics platform supporting Big Data should be able to handle hundreds or even thousands of models and have the ability to retune them when necessary.

### **THREATS AND BENEFITS OF “BIG DATA”**

Big Data, like other technologies, has two sides: disadvantages and benefits. While fighting one, the other cannot be forgotten. Heterogeneous raw data is a source of knowledge with an impact that can fundamentally change all areas of society. In order to make new scientific discoveries and achieve economic development, these data should be turned into knowledge. To show the benefit of Big Data technologies, it is enough to mention the “Global Pulse” initiative of the UN in 2009. Using this technology is important as a result of two-way interaction such as “human-machine” and “machine-machine”, the joint analysis of data collected from various sources and in various formats and the acquisition of new knowledge and useful information from them are used in making new scientific discoveries, making the right decisions in public and private organizations, in the protection of legal rules, social security, national security, terrorism, job creation, predicting disease epidemics, improving marketing, uncovering people’s hidden behavior, understanding their goals and intentions, understanding their interaction with other people, the environment, national level economic in the financial sector in better understanding risks, guiding policymakers and regulators, and better managing risk systems. (Soares S., 2012: p.102)

Despite the mentioned advantages, as data increases, the number of subjects who have access to information and use it also increases. Since most of the data is personal information, it should be protected. Analyzing data about people without their knowledge is ethically and legally unacceptable. This situation may lead to a new digital explosion between people and organizations.

## SOME PROBLEMS OF “BIG DATA”

One of the main problems of “Big Data” applications is related to the evaluation of the effectiveness of “Big Data” projects. There are two sources of effectiveness of such projects:

- 1) It reduces the costs and time spent on the analysis of large amounts of data, and enables quick preparation of information for prompt decision-making;
- 2) Application of Big Data technologies provides customization of e-services. However, despite the announced promises of cost-effectiveness and feasibility, it is extremely difficult to calculate the cost-effectiveness of “Big Data” projects.

The second problem is related to the training of specialists who can apply “Big Data” technologies in various fields. On the one hand, such specialists should be trained in mathematical statistics, data analysis, machine learning, must have programming skills, and be able to work in hardware-software complexes offered by IBM, Oracle, HP, SAS, SAP and other companies. On the other hand, they should have the habit of posing problems in which Big Data technologies are applied in a specific field. They should know the methods, scenarios and algorithms of activity in the considered field, and should be able to formulate requirements for the functional characteristics of the hardware-software systems implementing Big Data technologies.

At the same time, addiction to new technologies can lead to frustration. For example, meaningless correlations can be revealed as a result of “Big Data” analysis - Harvard University professor David Leinweber proves that the income of companies included in the S&P 500 can be predicted with high accuracy based on the volume of butter production in Bangladesh. (Leinweber D., 2007: pp. 15-22). Many interesting problems can be studied and solved using a small, sparse data set.

*“Small Data” movement.* Another important revolution is hidden behind the successes in the field of Big Data: Small Data. A massive democratization of data collection and processing is taking place thanks to the rapidly falling cost of data storage. Contrary to the trends of centralization and control over large volumes of data (Big Data), in the age of technologies, the greatest potential lies in the ecosystem of decentralized, distributed data and knowledge:

– Even at organizations like Microsoft and Yahoo! most of the work can be done on a single computer. For example, the average job size at Microsoft is 14 GB and 80% of jobs are less than 1 Tb. The estimated average job size on Yahoo! is 12 GB. (Leinweber D., 2007: pp. 15-22).

– Studies show that jobs on Facebook obey the law of upper distribution, with small jobs dominating. In at least 90% of cases, the size of the input data is less than 100 GB. A careful study of Hadoop workloads at Facebook revealed that a very small minority of jobs scaled to terabytes and larger, most jobs have input and output data in the megabyte-gigabyte range. (Chen Y., Alspaugh S., Katz R.H., 2012: pp. 1802–1813).

*Personal data protection.* Big Data technologies create serious problems in terms of privacy. Various socio-economic actors collect quite a lot of data about users – the user's behavior in social networks on the website, the behavior and relationships of the persons connected with the user, their shopping behavior, etc. In addition, emotional shades of communications are also analyzed. They analyze not only what the user writes on social media, but also how he/she writes. In short, everything that seems important or unnecessary about a potential user is collected and a 360-degree profile is created.

Thus, the emergence of the possibility of “tracking a person from the cradle to the grave” based on modern tracking technologies and Big Data analysis creates a very critical dilemma between the attempts to protect the integrity of his/her personal life and the information demand of society. (Tene O., Polonetsky J., 2012. <http://www.stanfordlawreview.org/online/privacy-paradox/big-data>)

## **“BIG DATA” APPLICATION TREND ANALYSIS IN ENERGY INDUSTRY**

We consider 3 application directions of Big Data:

- Renewable Energy;
- Demand Response;
- Electric Vehicles.

Each direction contains numerous technical spheres. In spite of, we introduce these three applications particularly, there are no clear boundaries between them. Demand response should be considered in both renewable energy and EVs while EVs is also a concrete implementation of renewable energy.

All researches in different application fields have a common goal: cost minimization. In addition, owing to the over-exploitation of fossil fuels, energy becomes precious and energy consumption problem has arisen wide attention. Kung and Wang proposed a recommender system for the best combination of renewable energy resources with cost-benefit analysis, which contains analytical module, cloud data base, and user interface. (L. Kung and H.-F. Wang, 2015: pp. 1–10). This study used Markov Chain to investigate the influences of decision-making related to renewable energy and electricity demand in random time. Since the historical electricity data is recorded in continuous time series, Continuous Markov Chain can be applied to analyze energy big data in order to help power enterprises make optimal investment of renewable energy and evaluate optimal energy configuration.

Based on the classification analysis, the total demand response from a region or a kind of users can be available through polymerization. Meanwhile, the analysis results will work in designing incentive demand response mechanism. Liu et al. provided a power demand model which is derived from workload models and cooling demands of the data center. (L. Kung and H.-F. Wang, 2015: pp. 1–10). Specifically, they calculated the total power demand by:  $d(t) = d_{IT}(t) + c(d_{IT}(t))$ , where  $d_{IT}(t)$  represents the total Information Technology (IT) workload demand at time t which is the energy necessary to serve demand, and function  $c()$  represents cooling power demand which is associated with IT demand  $d_{IT}$ . Note that PUE(t) means the Power Usage Effectiveness (PUE) at time t, thus,  $c(d_{IT}(t))$  can be calculated by  $c(d_{IT}(t)) = (PUE(t) - 1) * d_{IT}(t)$ .

Goyena and Acciona introduced an energetic balance algorithm to warranty the electric demand in a big energy storage system. This system analyzes the measured data constantly and commits for high accuracy. In this algorithm, electric demand situations of overproduction and underproduction are distinguished. Compared with the none-renewable production, renewable production has been considered as the priority in order to meet the energy demand. According to the results of this balance algorithm, datastorage level will be increased, decreased or limited. (S. G. Goyena and S. A. Acciona, 2009: pp. 1–7).

Electric Vehicles becomes a promising alternative transportation method which is related to the smart grid domain. With the increasing number of EVs, many problems in various areas of EVs such as performance evaluation, driving range and battery capacity become great concerns

by researchers. Lee and Wu provided a EV-battery big data modeling method which has been used to improve the driving range estimation of EVs, using data cloud analysis and processing technologies. The authors first presented a simple approach to project life cycles of battery packs based on collected test data. The operating voltage of a battery pack  $E_{(I,SOC,T)}$  can be evaluated by: (C.-H. Lee and C.-H. Wu, 2015: pp. 1980–1993).

$$E_{(I,SOC,T)} = OCV_{(SOC,T)} - I(R_{(SOC,T)} + \eta r_{(SOC,T)})^r$$

where  $I$  – means the current,  $SOC$  is noted as the state of charge,  $T$  – represents the temperature,  $OCV$  – is short for the open circuit voltage,  $R$  – is the resistance of battery cell and  $\eta$  – represents the resistance caused by polarization. Then they used a machine learning approach to cluster the collected *EV* data by ever-increasing hierarchical self-organizing maps.

## CONCLUSION

Big Data is a new generation technology that allows using large information arrays. Software-hardware platforms such as MapReduce, Hadoop, HDFS, NoSQL created for the purpose of processing and analyzing data characterized by features such as large volume, speed and variety are available. Although certain problems in working with large volumes of data have been overcome with the help of supercomputers, grid and cloud technologies, there are still personnel, practical and scientific-theoretical problems in this field. The problem is not only in the storage and management of large volumes of data, but also in the analysis of unstructured data and the interpretation of results. By applying Big Data technologies, it is possible to quickly achieve high achievements in many fields of science, gain in management and business activity, and gain certain advantages in competition. Therefore, this new scientific direction should be further studied and developed.

Currently, public interest in the field of Big Data is at its peak. For now, it is difficult to say whether Big Data technologies will become as necessary in people's lives as personal computers and the Internet in the near future, but it is in sight and no one doubts that it will change our lives and business environment.

Big Data technologies have great potential and will seriously affect various fields of activity. Changing the corporate information architecture is not enough. It is required to make changes in the work of almost all structural divisions of the organization. The process of data analysis will change from an isolated functional area to become an integral part of business processes. In order to effectively benefit from the great potential of Big Data technologies, the development of a purposeful and well-thought-out Big Data strategy is of particular importance for the management and analysis of large volumes of data.

## REFERENCES

1. Anglade T. noSQL Tapes. <http://www.nosqltapes.com>.
2. Agrawal D., Das S., El Abbadi A. Big data and cloud computing: current state and future opportunities / Proc. of the 14th International Conference on Extending Database Technology, 2011, pp. 530-533.
3. Big data: The next frontier for innovation, competition, and productivity. Analyst report. McKinsey Global Institute, May 2011. <http://www.mckinsey.com/>
4. C.-H. Lee and C.-H. Wu, "A novel big data modeling method for improving driving range estimation of EVs," IEEE Access, vol. 3, pp. 1980–1993, 2015.

5. Chen Y., Alspaugh S., Katz R.H. Interactive analytical processing in big data systems: A cross-industry study of mapreduce workloads // Proc. of the VLDB Endowment (VLDB), 2012, vol. 5, no. 12, pp. 1802–1813.
6. Chen J., Chen Y., Xiaoyong D., et.all., "Big data challenge: a data management perspective," // Frontiers of Computer Science in China, 2013, vol.7, №2, pp. 157–164.
7. Dean J., Ghemawat S. "MapReduce: Simplified Data Processing on Large Clusters," / Proceedings of the Sixth Symposium on Operating System Design and Implementation, vol.6, 2004, pp.137–150.
8. Ghemawat S., Gobioff H., Leung S. The Google file system / Proc. of the 19th ACM Symposium on Operating Systems Principles, 2003, pp. 29-43.
9. Ghemawat S., Gobioff H., Leung S.T. "The Google File System", / Proceedings of the Nineteenth ACM Symposium on Operating Systems Principles (SOSP'03), 2003, pp. 29–43.
10. Hadoop. <http://hadoop.apache.org>
11. Lee K.H., Lee Y.J., Choi H., Chung Y.D., Moon B. Parallel data processing with MapReduce: a survey // ACM SIGMOD Record, 2012, vol. 40, no. 4, pp. 11-20.
12. Leinweber D., Stupid Data Miner tricks: Overfitting the S&P 500 // The Journal of Investing, 2007, vol. 16, no. 1, pp. 15-22.
13. Laney D. "3D Data Management: Controlling Data Volume, Velocity and Variety." Technical report, META Group, Inc (now Gartner, Inc.), February 2001. <http://blogs.gartner.com/>
14. L. Kung and H.-F. Wang, "A recommender system for the optimal combination of energy resources with cost-benefit analysis," in Proc. Int. Conf. Ind. Eng. Oper. Manage. (IEOM), Mar. 2015, pp. 1–10.
15. Manyika J., Chui M., Brown B., Bughin J., Dobbs R., Roxburgh C., Byers A.H. Big data: The next frontier for innovation, competition, and productivity. McKinsey Global Institute. 2011.
16. McAfee A., Brynjolfsson E. "Big Data: The Management Revolution. Harvard Business Review" 2012, vol.90, №10, pp. 60–68.
17. Philip C.L., Zhang C-Y. "Data-intensive applications, challenges, techniques and technologies: A survey on Big Data," // Information Sciences, 2014, vol. 275, № xx, pp. 314–347.
18. Siegel E. Predictive Analytics: The power to predict who will click, buy, lie, or die. Wiley; 1st edition. 2013. 320 p.
19. Soares S. "Big Data Governance - An Emerging Imperative." MC Press Online, LLC, 1st edition, 2012.
20. Stonebraker M., Madden S., Abadi D. J., Harizopoulos S., Hachem N., Helland P. End of an Architectural Era (It's Time for a Complete Rewrite) / Proc. of the 33rd International Conference on Very Large Data Bases (VLDB '07), 2007, pp. 1150-1160.
21. Shvachko K., Kuang H., Radia S., Chansler R. The Hadoop distributed file system / IEEE 26th Symposium on Mass Storage Systems and Technologies, 2010, pp. 1-10.
22. S. G. Goyena and S. A. Acciona, "Sizing and analysis of big scale and isolated electric systems based on renewable sources with energy storage," in Proc. IEEE PES/IAS Conf. Sustain. Alternative Energy (SAE), Sep. 2009, pp. 1–7.
23. Tene O., Polonetsky J. Privacy in the age of big data: A time for big decisions // Stanford Law Review Online, 2012. <http://www.stanfordlawreview.org/online/privacy-paradox/big-data>
24. Worldwide Big Data Technology and Services 2013–2017 Forecast. <http://www.idc.com>
25. Wu X., Zhu X., Wu G.Q., Ding W. "Data mining with big data // IEEE Transactionson Knowledge and Data Engineering." 2014, vol.26, no. 1, pp.97-107.

UDC 519.21

## OBTAINING THE FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL EQUATION FOR THE LAPLACE TRANSFORM OF THE DISTRIBUTION OF THE BOUNDARY FUNCTIONAL

E.A. IBAYEV

Institute of Control Systems of ANAS, Baku, Azerbaijan

elshanibayev@gmail.com

**ABSTRACT**

In this paper the semi-Markovian random walk processes with negative drift, positive jumps are considered. We give a mathematical modeling of the semi-Markovian random walk processes with a delaying positive screen, given in the general form by means of an integral equation. In this paper, the residence time of the system is given by the gamma distribution with parameters  $\alpha > 0$  and  $\beta > 0$  resulting in the fractional order integral equation. The main purpose of this paper is to reduce an integral equation for the Laplace transform of the conditional distribution of the boundary functional of semi-Markovian random walk processes to fractional order differential equation. The Laplace transform of the conditional distribution of the first passage time for the semi-Markovian random walk processes with positive delaying screen is find.

**Keywords:** Laplace transform, random variable, semi-Markovian random walk process, integral equation, Weyl fractional derivative,

**ПОЛУЧЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА ДЛЯ  
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГРАНИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА**

**АННОТАЦИЯ**

В работе рассматриваются процессы полумарковского случайного блуждания с отрицательным сносом и положительными скачками. Приведено математическое моделирование процессов полумарковского случайного блуждания с задерживающим положительным экраном, заданное в общем виде с помощью интегрального уравнения. В этой статье время пребывания системы задается гамма-распределением с параметрами,  $\alpha > 0$  и  $\beta > 0$ , что приводит к интегральному уравнению дробного порядка. Основная цель настоящей работы состоит в том, чтобы свести интегральное уравнение для преобразования Лапласа условного распределения граничного функционала процессов полумарковского случайного блуждания к дифференциальному уравнению дробного порядка. Найдено преобразование Лапласа условного распределения времени первого достижения для процессов полумарковского случайного блуждания с положительным задерживающим экраном.

**Ключевые слова:** Преобразование Лапласа-Стильтеса, случайная величина, процесс полумарковского блуждания, интегральное уравнение, дробная производная Вейля.

**SƏRHƏD FUNKSİONALININ PAYLANMASININ LAPLAS ÇEVİRMƏSİ ÜÇÜN KƏSR TƏRTİB  
DİFERENSİAL TƏNLİYİN ALINMASI**

**XÜLASƏ**

Məqalədə mənfi axınlı, müsbət sıçrayışlı semi-Markov dolaşma prosesi qurulmuşdur. Ümumi halda mənfi axınlı, müsbət sıçrayışlı semi-Markov dolaşma prosesinin integrallı tənliliklə ifadə olunan riyazi modeli verilmişdir. Bu məqalədə sistemin gözləmə müddəti  $\alpha > 0$  və  $\beta > 0$  parametrlə Qamma paylanması ilə verilir və kəsr tərtib integrallı tənlilik yaranır. Məqalədə əsas məqsəd semi-Markov dolaşma prosesinin sərhəd funksionalının şərti paylanmasıın Laplas çevirməsi üçün qurulmuş integrallı tənliliyin kəsr tərtib diferensial tənliliyə gətirməkdir. Semi-Markov dolaşma prosesinin müsbət gecikdirən ekrana birinci dəfə çatma anının şərti paylanmasıın Laplas çevirməsi tapılmışdır.

**Açar sözlər.** Laplas çevirməsi, təsadüfi kəmiyyət, semi-Markov dolaşma prosesi, integrallı tənlilik, Veyl mənada kəsr tərəmə.

## 1. INTRODUCTION

It is known that the semi-Markovian processes are a generalization of Markov processes since the exponential distribution of time intervals is replaced with an arbitrary distribution. The semi-Markovian process is constructed by the so-called Markov renewal process. The Markov renewal process is defined by the transition probabilities matrix, called the renewal kernel, and by an initial distribution. As is known, developments of semi-Markovian processes theory were proposed by Pyke [21]-[22], Pyke and Schaufele [23], C, inlar [3], Gikhman and Skorokhod [5], Korolyuk and Turbin [9], Limnios and Oprisan [11], Silvestrov [24], Grabski [6] and Feller [4]. The most important information concerning continuous semi-Markovian processes was studied by Harlamov [7]. In the work of Metzler and Klafter [14] a generalized diffusion equation of fractional order on the basis of the continuous time random walk model was investigated. Using asymptotic methods and factorization methods similar problems were studied by Lebowitz and Percus [10] and Lotov [12]. In many cases asymptotic analysis of the factorization representations of dual transforms leads to the complete asymptotic expansions of the distributions under consideration (see, [12]). But in particular case of semi-Markovian random walk processes we can obtain the explicit form for probability characteristics. In the works of Nasirova [16] and her collaborators the Laplace transform of the distribution of the first moment reaching level zero of the semi-Markovian random walk processes was studied (see, [1], [8], [17]-[20]). Note that, finding the Laplace transform of the distribution of the boundary functional of the semi-Markovian random walk processes is a powerful tool in the fields of inventory theories, stock control, queuing, etc.

In the present paper, the semi-Markovian random walk processes with negative drift, positive jumps and delaying in positive screen is investigated. An integral equation for the Laplace transform of the conditional distribution of the semi-Markovian random walk processes is constructed. In particular, constructed integral equation is reduce to the fractional order differential equation in the class of gamma distributions. Finally, we find an exact solution of the fractional order differential equation.

## 2. PROBLEM STATEMENT AND PRELIMINARIES

Let  $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ , and  $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$  be two independent sequences of random variables defined on any probability space  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , such that the random variables in each sequence are independent, positive and identically distributed. Now we can construct the stochastic process  $X(t)$  as follows:

$$X(t) = z - t + \sum_{i=0}^{k-1} \zeta_i, \text{ if } \sum_{i=0}^{k-1} \xi_i \leq t < \sum_{i=0}^k \xi_i,$$

where  $\xi_0 = \zeta_0 = 0$ . The process  $X(t)$  is called "The semi-Markovian random walk process with negative drift, positive jumps". Using form Borovkov A. A. [1] we delay the process  $X(t)$  at "a" we have

$$X_1(t) = X(t) - \sup_{0 \leq s \leq 1} (0, X(s) - a).$$

Introduce the following random variable:

$$\tau_1^a = \inf \{ t : X_1(t) \geq a \}.$$

The random variable  $\tau_1^a$  is called boundary functional of the process  $X_1(t)$ .

Our aim to find the Laplace transform of the conditional distribution of random variable  $\tau_1^a$ .

We denote

$$L(\theta|z) = E\left(e^{-\theta\tau_1^a} | X_1(0) = z\right).$$

$L(\theta|z)$ - is called the Laplace transform for the conditional distribution of  $\tau_1^a$ .

Suppose that  $X_1(0) = z$  ( $z \geq 0$ ). It is obvious that we can write express of  $\tau_1^a$ :

$$\tau_1^a = \begin{cases} \xi_1, & \text{if } z - \xi_1 + \zeta_1 > a, \\ \xi_1 + T, & \text{if } z - \xi_1 + \zeta_1 < a. \end{cases}$$

where  $T$  and  $\tau_1^a$  are different, but identically distributed random variables.

### 3. THE CONSTRUCTION OF AN INTEGRAL EQUATION FOR THE LAPLACE TRANSFORM OF THE CONDITIONAL DISTRIBUTION AND REDUCTION TO THE FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL EQUATION

**Theorem 1.** Let  $X_1(t)$  be the semi-Markovian random walk process with negative drift, positive jumps and delaying screen on  $a$  level  $a > 0$ . Then integral equation for the Laplace transform of the conditional distribution of  $\tau_1^a$  has the form:

$$\begin{aligned} L(\theta|z) &= \int_{s=0}^{\infty} e^{-\theta s} P\{\zeta_1 > a - z + s\} dP\{\xi_1 < s\} + \\ &+ \int_{s=0}^{\infty} e^{-\theta s} dP\{\xi_1 < s\} \int_{y=z-s}^a L(\theta|y) d_y P\{\zeta_1 < y - z + s\}. \end{aligned} \tag{1}$$

*Proof.* By the law total probability, we have

$$\begin{aligned} L(\theta|z) &= E\left(e^{-\theta\tau_1^a} | X_1(0) = z\right) = \int_{\Omega} e^{-\theta\tau_1^a} P(d\omega | X_1(0) = z) = \\ &= \int_{\{\omega: z - \xi_1 + \zeta_1 > a\}} e^{-\theta\xi_1} P(d\omega | X_1(0) = z) + \int_{\{\omega: z - \xi_1 + \zeta_1 < a\}} e^{-\theta[\xi_1 + T]} P(d\omega | X_1(0) = z). \end{aligned} \tag{2}$$

Let us make a substitution

$$\xi_1 = s, T = x, \zeta_1 = y.$$

Then equation (2) will be as follows:

$$\begin{aligned} L(\theta|z) &= \int_{s=0}^{\infty} e^{-\theta s} \int_{y=a-z+s}^{\infty} P\{\xi_1 \in ds, \zeta_1 \in dy\} + \int_{s=0}^{\infty} e^{-\theta s} \int_{x=0}^{\infty} e^{-\theta x} \int_{y=0}^{a-z+s} P\{\xi_1 \in ds, \zeta_1 \in dy; T \in dx | X_1(0) = z - s + y\} = \\ &= \int_{s=0}^{\infty} e^{-\theta s} \int_{y=a-z+s}^{\infty} P\{\xi_1 \in ds\} P\{\zeta_1 \in dy\} + \int_{s=0}^{\infty} e^{-\theta s} \int_{x=0}^{\infty} e^{-\theta x} \int_{y=0}^{a-z+s} P\{T \in dx | X_1(0) = z - s + y\} P\{\xi_1 \in ds\} P\{\zeta_1 \in dy\} = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\theta s} P\{\xi_1 \in ds\} P\{\zeta_1 > a - z + s\} + \int_0^{\infty} e^{-\theta s} \int_0^{a-z+s} L(\theta|z - s + y) dP\{\xi_1 < s\} dP\{\zeta_1 < y\}. \end{aligned}$$

Thus, the Laplace transform of the conditional distribution of  $\tau_1^a$  satisfies the integral equation (1)

The theorem has been proven.

Let's assume that random variable  $\xi_1$  has the gamma distribution with parameters  $\alpha > 0$  and  $\beta > 0$  while random variable  $\zeta_1$  has the exponential distribution with parameter  $\lambda$

$$\rho_{\xi_1}(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad \rho_{\zeta_1}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

In this case integral equation (1) will be as:

$$\begin{aligned} L(\theta|z) = & \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda(a-z)} \int_0^\infty e^{-(\lambda+\theta+\beta)s} s^{\alpha-1} ds + \\ & + \frac{\lambda\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{\lambda z} \int_0^\infty e^{-(\lambda+\theta+\beta)s} s^{\alpha-1} \int_{z-s}^a e^{-\lambda y} L(\theta|y) dy ds. \end{aligned} \quad (3)$$

Multiplying both sides of equation (3) by  $e^{-\lambda z}$  and differentiate both sides with respect to  $z$ , we get :

$$e^{-\lambda z} L'_z(\theta|z) - \lambda e^{-\lambda z} L(\theta|z) = \frac{\lambda\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda z} \int_0^\infty e^{-(\beta+\theta)s} s^{\alpha-1} L(\theta|z-s) ds.$$

After some transformations, the last integral equation will be as follows:

$$e^{(\theta+\beta)z} L'_z(\theta|z) - \lambda e^{(\theta+\beta)z} L(\theta|z) = -\frac{\lambda\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^z e^{(\beta+\theta)u} (z-u)^{\alpha-1} L(\theta|u) du. \quad (4)$$

We denote

$$Q(\theta|z) = e^{(\theta+\beta)z} L(\theta|z).$$

Then from equation (4) we get

$$Q'_z(\theta|z) - (\lambda + \theta + \beta) Q(\theta|z) = -\frac{\lambda\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^z Q(\theta|u) (z-u)^{\alpha-1} du. \quad (5)$$

It is known that the Weyl fractional integral of order  $\alpha$  of a function  $Q(\theta|z)$  is defined as (see [14] and [16])

$$D^{-\alpha}(Q(\theta|z)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^z Q(\theta|u) (z-u)^{\alpha-1} du.$$

Taking into account the last equality in (5), we have

$$Q'_z(\theta|z) - (\lambda + \theta + \beta) Q(\theta|z) = -\lambda\beta^\alpha D^{-\alpha}(Q(\theta|z)). \quad (6)$$

Let  $\alpha \in (0,1)$  and let  $\phi(z)$  be a differentiable function. The Weyl fractional derivative of order  $\alpha$  of a function  $\phi(z)$  is defined as (see [13] and [15])

$$D^\alpha \phi(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^z (z-u)^{-\alpha} \phi'(u) du.$$

Applying to both sides of equation (6) the Weyl fractional derivative of order  $\alpha \in (0,1)$ , we get

$$D_z^{\alpha+1} Q(\theta|z) - (\lambda + \theta + \beta) D_z^\alpha Q(\theta|z) + \lambda \beta^\alpha (Q(\theta|z)) = 0. \quad (7)$$

Thus, we have proved the following theorem.

**Theorem 2.** Let  $X_1(t)$  be the semi-Markovian random walk process with negative drift, positive jumps and delaying screen on  $a$  level  $a > 0$ . Let  $\xi_1$  be a random variable has the gamma distribution with parameters  $\alpha > 0$  and  $\beta > 0$  and let  $\zeta_1 > 0$  be a random variable has the exponential distribution with parameter  $\lambda > 0$ . Then integral equation (1) is reduced to the fractional differential equation (7)

#### 4. SOLUTION OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION (7)

Weyl fractional derivative of order  $\alpha$  of the function  $e^{k(\theta)z}$  can be written:

$$D^\alpha e^{k(\theta)z} = (k(\theta))^\alpha e^{k(\theta)z}.$$

We will take a solution of fractional equation (7) in the form  $Q(\theta|z) = C(\theta)e^{k(\theta)z}$ . Here  $k(\theta)$  is a solution of the following characteristic equation of (7) with fractional exponents

$$[k(\theta)]^{\alpha+1} - (\lambda + \theta + \beta) \cdot [k(\theta)]^\alpha + \lambda \beta^\alpha = 0$$

and the unknown function  $C(\theta)$  can be determined from initial conditions

$$\begin{aligned} L(\theta|0) &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda a} \int_0^\infty e^{-(\lambda+\theta+\beta)s} s^{\alpha-1} ds + \\ &+ \frac{\lambda \beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-(\lambda+\theta+\beta)s} s^{\alpha-1} \int_{-s}^a e^{-\lambda y} L(\theta|y) dy ds. \end{aligned} \quad (8)$$

Thus  $L(\theta|z) = C(\theta)e^{(k(\theta)-\theta-\beta)z}$ . It is obvious that  $L(0|z) = 1$ . Hence,  $C(0) = 1$  and  $k(0) = \beta$ .

Using initial conditions (8) we get

$$C(\theta) = -\frac{k(\theta) - \lambda - \beta - \theta}{\lambda} e^{-(k(\theta)-\beta-\theta)a}.$$

Thus the Laplace transform of the conditional distribution of random variable  $\tau_1^a$  has form

$$L(\theta|z) = -\frac{k(\theta) - \lambda - \beta - \theta}{\lambda} e^{(k(\theta)-\beta-\theta)(z-a)}.$$

#### 5. CONCLUSION

This study is intended to investigate the semi-Markovian random walk processes with negative drift, positive jumps and delaying in positive screen. We construct an integral equation for the Laplace transform of the conditional distribution of semi-Markovian random walk

processes. In particular, constructed integral equation reduced to the fractional order differential equation in the class of gamma distributions. The fractional derivatives are described in the Weyl sense. Finally, we find an exact solution of the fractional order differential equation.

## REFERENCES

1. Borovkov A.A. Probability theory. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers;1998.
2. Bandaliyev R.A., Nasirova T.H. and Omarova K.K. Mathematical modeling of the semi- Markovian random walk processes with jumps and delaying screen by means of a fractional order differential equation. *Math. Meth. Appl. Sci.* 41(18), 2018, 9301-9311.
3. Cinlar E. Markov renewal theory. *Adv. Appl. Probab.* 1(2), 1969, 123-187.
4. Feller W. On semi-Markov processes, *Proc. Nat. Acad. Sci.* 51(4), 1964, 653-659.
5. Gikhman I.I. and Skorokhod A.V. The theory of stochastic processes II. Springer-Verlag,1975.
6. Grabski F. Semi-Markov processes: Applications in systems reliability and maintenance. Amsterdam, Elsevier, 2014.
7. Harlamov B.P. Continuous semi-Markov processes. St. Petersburg, Nauka, 2001. (In Russian).
8. Ibayev E.A. Laplace transform of the distribution of the first moment reaching positive level. *Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci.* 6(4), 2006, 115-120.
9. Korolyuk V.S. and Turbin A.F. Semi-Markov processes and their applications. Kiev, Naukova Dumka, 1976. (In Russian).
10. Lebowitz J.L. and Percus J.K. Asymptotic behavior of the radial distribution function, *J. Math. Phys.* 4(2), 1963, 248-254.
11. Limnios N. and Oprisan G. Semi-Markov processes and reliability. Boston, Birkhauser,2001.
12. Lotov V.I. and Orlova N.G. Factorization representations in the boundary crossing Problems for random walks on a Markov chain, *Sib. Math. J.* 46(4), 2005, 661-667.
13. Mainardi F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: an introduction to mathematical models. World Scientific, 2010.
14. Metzler R. and Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. *Phys Rep.* 339(1), 2000, 1-77.
15. Miller K.S. and Ross B. An Introduction to the fractional calculus and fractional Differential equations. Wiley, New York, 1993.
16. Nasirova T.I. The processes of semi-Markov random walk. Baku, Elm, 1984. (In Russian).
17. Nasirova T.I., Ibayev E.A. and Aliyeva T.A. The Laplace transform of the ergodic distribution of the process of semi-Markovian random walk with negative drift, nonnegative jumps, delays, and delaying screen at zero. *Theory Stoch. Proc.* 15(31), 2009, 49-60.8
18. Nasirova T.I. and . Kerimova U.Y. Definition of Laplace transform of the first passage of zero level of the semi-Markov random process with positive tendency and negative jump, *Appl. Math.* 2(7), 2011, 908-911.
19. Nasirova T.I. and . Omarova K.K. Distribution of the lower boundary functional of the step process of semi-Markov random walk with delaying screen at zero. *Ukr. Math. J.* 59(7), 2007, 1010-1018.
20. Omarova K.K and . Bakhshiyyev Sh.B. The Laplace transform for the distribution of the lower bound functional in a semi-Markov walk process with a delay screen at zero. *Autom. Control Comput. Sci.* 44(4), 2010, 246-252.
21. Pyke R. Markov renewal processes: definitions and preliminary properties. *Ann. Math.Stat.* 32(4), 1961, 1231-1242.
22. Pyke R. Markov renewal processes with finitely many states. *Ann. Math. Stat.* 32(4),1961, 1243-1259.
23. Pyke R. and Schaufele R. Limit theorems for Markov renewal processes. *Ann. Math.Stat.* 35(4), 1964, 1746-1764.
24. Silvestrov D.C. Semi-Markov processes with a discrete state space. Moscow, Sovetskoe Radio, 1980. (in Russian).

IOT: 517.91

## EIGENFUNCTION EXPANSION ASSOCIATED WITH THE SCHRODINGER OPERATOR WITH ALMOST PERIODIC POTENTIALS

S. BAHLULZADE

Baku Engineering University, Department of Mathematics Teaching,

Baku, Azerbaijan

*subahlulzada@beu.edu.az***ABSTRACT**

The spectral analysis for the Schrodinger operator with complex almost periodic potentials and the discontinuous right-hand side on the axis are studied. Investigated the main properties of the fundamental solutions, and constructed the resolvent of the operator. A lemma about eigenfunction expansion for the Schrodinger operator is proved. The procedure for finding eigenfunction expansion for the Schrodinger operator is given and eigenfunction expansion is obtained.

**Keywords:** Sturm-Liouville Equation, Schrodinger operation, Almost Periodic Potentials

**SANKI HƏR YERDƏ PERİODİK ƏMSALLI ŞRÖDİNGER OPERATORUNUN  
MƏXSUSİ FUNKSIYALARA GÖRƏ AYRILIŞI**

**XÜLASƏ**

Sağ tərəfi kəsilən sanki hər yerdə periodik kompleks əmsallı Şrödinger operatorunun spektral analizi öyrənilmişdir. Fundamental həllərin əsas xüsusiyyətləri araşdırılmışdır, operatorun rezolventası qurulmuşdur. Məxsusi funksiyaya ayrılmış haqqında lemma isbat edilmişdir. Məxsusi funksiyaya ayrılmışın mərhələləri verilmişdir və məxsusi funksiyaya ayrılmış tapılmışdır.

**Ключевые слова:** Уравнение Штурм – Лювила, оператор Шредингера, Почти всюду периодические потенциалы

**РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА  
С ПОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ**

**РЕЗЮМЕ**

Изучается спектральный анализ оператора Шредингера с комплексными почти всюду периодическими потенциалами и разрывной правой частью на оси. Исследована основные свойства фундаментальных решений и построил резольвенту оператора. Доказана лемма о разложении по собственным функциям оператора Шредингера. Данна процедура нахождения разложения по собственным функциям оператора Шредингера и получено разложение по собственным функциям.

**Açar sözlər:** Sturm – Lyuvill tənliyi, Şrödinger operatoru, sanki hər yerdə periodik potensial

**AMS Subject Classification:** 34B24, 34B27, 34L05, 34L25

### Introduction

In this work, we investigated the spectrum of the differential operator  $L$  generated by the expression

$$l(y) \equiv \frac{1}{\rho(x)} \left[ -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \right] \quad (1)$$

in the space  $L_2(-\infty, \infty)$  where

$$\rho(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \geq 0 \\ \beta^2 & \text{for } x < 0 \end{cases} \quad (2)$$

and the function  $q(x)$  is almost periodic in the form of

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n e^{i\alpha_n x}; \sum_{n=1}^{\infty} |q_n| < +\infty \quad (3)$$

The set of exponents  $G = \{\alpha_n\}$  is a numerable set of positive real numbers, the numbers are increasing as the indexes are increasing and closed to the addition:

- 1)  $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \dots \alpha_n \rightarrow +\infty$
- 2) If  $\alpha_i, \alpha_j \in G$  then  $\alpha_i + \alpha_j \in G$ .

This paper is an extended version of the conference paper published in [1].

#### Properties of the fundamental solutions:

$f_1^\pm(x, \lambda)$  and  $f_2^\pm(x, \lambda)$  are the solutions of the Sturm – Liouville equation

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda^2 \rho(x)y(x) \quad (4)$$

where  $\lambda$  is the complex number and satisfy the following conditions:

$$\lim_{\operatorname{Im} x \rightarrow \infty} f_1^\pm(x, \lambda) e^{\mp i\lambda x} = 1 \quad \text{for } \pm \operatorname{Im} \lambda > 0$$

$$\lim_{\operatorname{Im} x \rightarrow -\infty} f_2^\pm(x, \lambda) e^{\mp i\lambda x} = 1 \quad \text{for } \pm \operatorname{Re} \lambda > 0$$

and the following theorem.

**Theorem 1.** Let  $q(x)$  be in the form of (3) and  $\rho(x)$  be in the form of (2) then the equation (4) has the particular solutions of the form

$$f_1^\pm(x, \lambda) = e^{\pm i\lambda x} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=n}^{\infty} \frac{w_{ns}}{\alpha_n \pm 2\lambda} e^{i\alpha_s x} \right) \quad \text{for } x \geq 0 \quad (5)$$

$$f_2^\pm(x, \lambda) = e^{\pm i\beta\lambda x} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=n}^{\infty} \frac{w_{ns}}{\alpha_n \pm 2\beta\lambda} e^{i\alpha_s x} \right) \quad \text{for } x < 0 \quad (6)$$

Where the numbers  $w_{ns}$  for  $f(x, \lambda)$  are determined from the following recurrent relations:

$$\alpha_s(\alpha_s - \alpha_n)w_{ns} + \sum_{\substack{\alpha_r + \alpha_k = \alpha_s \\ k > n}} q_r w_{nk} = 0$$

$$\sum_{n=1}^s \alpha_s w_{ns} + q_s = 0$$

and the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \sum_{s=n}^{\infty} \alpha_s |w_{ns}|; \quad (6)$$

converge.

### The spectrum of the operator $L$

The functions  $f_1^+(x, \lambda), f_1^-(x, \lambda)$  and  $f_2^+(x, \lambda), f_2^-(x, \lambda)$  are the linearly independent solutions of (4) when  $\operatorname{Im} \lambda = 0$ ,  $\operatorname{Re} \lambda = 0$  respectively and each solution of (4) can be written as the linear combination of these solutions.

$$\left. \begin{array}{l} f_2^-(x, \lambda) = A(\lambda)f_1^+(x, \lambda) + B(\lambda)f_1^-(x, \lambda) \quad \text{when } x \geq 0 \\ f_1^+(x, \lambda) = C(\lambda)f_2^+(x, \lambda) + D(\lambda)f_2^-(x, \lambda) \quad \text{when } x < 0 \end{array} \right\} \quad (7)$$

By solving the system of linear equations (7) we can find all the four coefficients:

$$A(\lambda) = \frac{W[f_2^-(0, \lambda), f_1^-(0, \lambda)]}{2i\lambda} \quad B(\lambda) = \frac{W[f_1^+(0, \lambda), f_2^-(0, \lambda)]}{2i\lambda} \quad C(\lambda) = \frac{1}{\beta}B(\lambda) \quad D(\lambda) = -\frac{1}{\beta}A(\lambda) \quad (8)$$

**Theorem 2.** The kernel of (1), (2), (3) has the following form:

$$\begin{aligned} R_{11}(x, t, \lambda) &= \begin{cases} \frac{1}{2i\lambda B(\lambda)} \begin{cases} f_1^+(x, \lambda)f_2^-(t, \lambda) & t \leq x \\ f_1^+(t, \lambda)f_2^-(x, \lambda) & t > x \end{cases} & \lambda \in S_0 \end{cases} \\ R_{12}(x, t, \lambda) &= -\frac{1}{2i\lambda B(\lambda)} \begin{cases} f_1^-(x, \lambda)f_2^+(t, \lambda) & t \leq x \\ f_1^-(t, \lambda)f_2^+(x, \lambda) & t > x \end{cases} & \lambda \in S_1 \end{aligned} \quad (9)$$

### Eigenfunction expansions

Let  $L$  be the operator generated by  $\frac{1}{\rho(x)} \left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \right\}$  in the space  $L_2(-\infty, +\infty, \rho(x))$ .

In the previous articles we have found the fundamental solutions and resolvent of this equation. Now to define the spectral data of the operator  $L$  it's important to obtain eigenfunction expansion for this operator. Let's consider the following lemma.

**Lemma 1.** Let  $\psi(x)$  be an arbitrary twice differentiable continuous function belonging to  $L_2(-\infty, \infty, \rho(x))$ . Then

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x, t, \lambda) \rho(t) \psi(t) dt = -\frac{\psi(x)}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} \int_{-\infty}^{\infty} R(x, t, \lambda) g(t) dt \quad (10)$$

where

$$g(x) = -\psi''(x) + q(x)\psi(x) \in L_2(-\infty, \infty)$$

Proof: From (9) we get that

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} R_{11}(x, t, \lambda) \rho(t) \psi(t) dt = \frac{f_1^+(x, \lambda)}{2i\lambda B(\lambda)} \int_{-\infty}^x \left\{ -\frac{1}{\lambda^2} f''_2(t, \lambda) + \frac{1}{\lambda^2} q(t) f_2^-(t, \lambda) \right\} \psi(t) dt + \\ & + \frac{f_2^-(x, \lambda)}{2i\lambda B(\lambda)} \int_x^{\infty} \left\{ -\frac{1}{\lambda^2} f''_1(t, \lambda) + \frac{1}{\lambda^2} q(t) f_1^+(t, \lambda) \right\} \psi(t) dt \end{aligned}$$

By integrating this identity twice by integrating by parts method we obtain the following:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x, t, \lambda) \rho(t) \psi(t) dt = -\frac{\psi(x)}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} \int_{-\infty}^{\infty} R(x, t, \lambda) g(t) dt$$

where

$$g(x) = -\psi''(x) + q(x) \psi(x) \in L_2(-\infty, \infty)$$

It's easy to prove that if the conditions of the lemma satisfy, then when  $|\lambda| \rightarrow \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x, t, \lambda) \rho(t) \psi(t) dt = -\frac{\psi(x)}{\lambda^2} + \bar{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \quad (11)$$

Analogously, we can prove that formulae (10) and (11) are correct for any  $\lambda \neq 0$ . Lemma is proven.

Integrating both hand sides of (10) along the circle  $|\lambda|=R$  and passing to the limit as  $R \rightarrow \infty$  we get

$$\psi(x) = -\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=R} 2\lambda d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} R(x, t, \lambda) \rho(t) \psi(t) dt$$

The function  $\int_{-\infty}^{\infty} R(x, t, \lambda) \rho(t) \psi(t) dt$  is analytical inside the contour with respect to  $\lambda$

excepting the points  $\lambda=\lambda_n$ ,  $n \in N$ ,  $\lambda=\pm \frac{\alpha_n}{2}$ ,  $\lambda=\pm \frac{\alpha_n}{2\beta}$

Let  $\Gamma_0^+ \cup \Gamma_0^-$  denote the contour formed by the segments

$\left[0, \frac{\alpha_1}{2\beta} - \delta\right], \left[\frac{\alpha_1}{2\beta} + \delta, \frac{\alpha_1}{2} - \delta\right], \dots, \left[\frac{\alpha_n}{2\beta} + \delta, \frac{\alpha_n}{2} - \delta\right]$  and the semicircles of the radius  $\delta$  with centres at

the points  $\frac{\alpha_n}{2} \left( \frac{\alpha_n}{2\beta} \right)$ ,  $n=1, 2, 3$ , located in the upper (lower) half plane. Then

$$\begin{aligned} \psi(x) &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\lambda \rho(t) \psi(t) \left[ \int_{\Gamma_0^+} R_{11}(x, t, \lambda) d\lambda - \int_{\Gamma_0^-} R_{12}(x, t, \lambda) d\lambda \right] dt = \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\lambda \rho(t) \psi(t) \int_{\Gamma_0^-} [R_{11}(x, t, \lambda) - R_{12}(x, t, \lambda)] d\lambda dt + \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_n} R_{11}(x, t, \lambda) + \operatorname{Res}_{\lambda=\frac{\alpha_n}{2\beta}} R_{11}(x, t, \lambda) + \\ &+ \operatorname{Res}_{\lambda=\frac{\alpha_n}{2}} R_{11}(x, t, \lambda) \end{aligned}$$

Let's calculate every term separately:

$$R_{11}(x, t, \lambda) - R_{12}(x, t, \lambda) = \frac{f_1^+(x, \lambda) f_1^+(t, \lambda)}{2i\lambda B(\lambda) C(\lambda)},$$

The residues of the resolvents  $R_{11}(x, t, \lambda)$  at  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$  are denoted by  $G_{11}(\lambda_n, x, t)$ . Thus  $G_{11}(\lambda_n, x, t)$  will be equal to

$$G_{11}(\lambda_n, x, t) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} (\lambda - \lambda_n) R_{11}(x, t, \lambda).$$

In order to find the residues of the resolvent  $R_{11}(x, t, \lambda)$  at the points  $\lambda = \frac{\alpha_n}{2}, \lambda = \frac{\alpha_n}{2\beta}$  we need to calculate the following limits. Taking into account  $f_n^\pm(x) = V_{nn} f_1^\pm\left(x, \mp \frac{\alpha_n}{2}\right)$  and the coefficients  $A(\lambda), B(\lambda), C(\lambda), D(\lambda)$  which were defined in [1], we calculate:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \frac{\alpha_n}{2}} (\alpha_n - 2\lambda) R_{11}(x, t, \lambda) &= \frac{1}{2i\lambda} f_1^+(x, \lambda) \left[ f_1^+(t, \lambda) \frac{W[f_2^-, f_1^-]}{W[f_1^+, f_2^-]} + f_1^-(t, \lambda) \right] = \\ &= \frac{1}{i\alpha_n} f_1^+\left(x, \frac{\alpha_n}{2}\right) f_1^+\left(t, \frac{\alpha_n}{2}\right) + \frac{1}{i\alpha_n} f_1^+\left(x, \frac{\alpha_n}{2}\right) f_1^+\left(t, \frac{\alpha_n}{2}\right) = \frac{2}{i\alpha_n} f_1^+\left(x, \frac{\alpha_n}{2}\right) f_1^+\left(t, \frac{\alpha_n}{2}\right) \end{aligned}$$

Analogously, taking into account that  $\tilde{f}_2^-(x, \lambda) = f_2^-(x, \lambda) (\alpha_n - 2\lambda\beta)$  has no poles at the points  $\frac{\alpha_n}{2\beta}, n \in N$ , we get

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \frac{\alpha_n}{2\beta}} (\alpha_n - 2\lambda\beta) R_{11}(x, t, \lambda) &= \left[ \frac{1}{i\alpha_n} f_2^+\left(x, \frac{\alpha_n}{2\beta}\right) - \frac{1}{i\alpha_n} \frac{W[\tilde{f}_2^-(x, \frac{\alpha_n}{2\beta}), f_1^-]}{W[f_1^+(x, \frac{\alpha_n}{2\beta}), \tilde{f}_2^-(x, \frac{\alpha_n}{2\beta})]} \right] \tilde{f}_2^-\left(x, \frac{\alpha_n}{2\beta}\right) \tilde{f}_2^-\left(t, \frac{\alpha_n}{2\beta}\right) = \\ &= F\left(x, t, \frac{\alpha_n}{2\beta}\right) \end{aligned}$$

Then for any function,  $\psi(x) \in L_2(-\infty, \infty, \rho(x))$  we have the following eigenfunction expansion:

$$\psi(x) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(t) \psi(t) \left[ \oint_{\Gamma_0^-} \frac{f_1^+(x, \lambda) f_1^+(t, \lambda)}{2i\lambda B(\lambda) C(\lambda)} d\lambda + G_{11}(\lambda_n, x, t) + \frac{2}{i\alpha_n} V_{nn} f_1^+\left(x, \frac{\alpha_n}{2}\right) f_1^+\left(t, \frac{\alpha_n}{2}\right) + F\left(x, t, \frac{\alpha_n}{2\beta}\right) \right] dt$$

#### REFERENCES:

- Bahlulzade, S.J. (2022). Eigenfunction expansion for the Sturm - Liouville operator with almost periodic potentials and discontinuous right hand, 2, 135 – 137
- Bahlulzade, S.J. (2020). Construction of resolvent for Sturm-Liouville equation with almost periodic potentials and discontinuous right side Proceedings of the 7th international conference on control and optimization with industrial applications, 2, 116-118.
- Bahlulzadeh, S.J. (2017). Spectral analysis of Sturm - Liouville equation with almost periodic potentials and discontinuous right hand Proceedings of the 6th international conference on control and optimization with industrial applications, 2, 95-97

- Belishev, M.I. (1991). Inverse spectral indefinite problem for the equation on an interval, *Funct. Anal. Appl.*, 21(2), 68-69.
- Blagoveshchensky, A.S. (1969). A one-dimensional inverse boundary value problem for a secondorder hyperbolic equation. Part 2, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, Nauka, Leningrad, 15, 85-90 (in Russian). 276
- Demirbilek, U., Mamedov, Kh.R. (2021). On The Expansion Formula For A Singular SturmLiouville Operator. *Journal of Science and Arts*, 1(54), 67-76.
- Efendiev, R.F. (2004). The inverse problem for a class of ordinary differential operators with periodic coefficients, *Mat. Fiz. Anal. Geom.*, 11:1, 114 – 121.
- Efendiev, R.F., Orudzhev, H.D., Zaki, FA El-Raheem, (2016). Spectral analysis of wave propagation on branching strings. *Boundary Value Problems*, 1, 1-18.
- Efendiev, R.F., Orudzhev, H.D. (2010). Inverse wave spectral problem with discontinuous wave speed. *J. Math. Phys. Anal. Geom.*, 6 (3), 255-265 (in Russian).
- Efendiev, R.F. (2011). Spectral analysis for one class of second-order indefinite non-self-adjoint differential operator pencil. *Applicable Analysis*, 90:12, 1837-1849.
- Freiling, G., Yurko, V.A. (2001). *Inverse Sturm-Liouville Problems and their Applications*, NOVA Science.
- Gasymov, M.G. (1980). Spectral analysis of a class of second-order non-self-adjoint differential operators. *Functional analysis and its applications*, 14(1), 11-15.
- Gasymov, M.G., Orudzhev, A.D. (1986). Spectral properties of a class of differential operators with almost-periodic coefficients and their perturbations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 287 (4), 777-781.
- Grinberg, N.I. (1990). The one-dimensional inverse scattering problem for the wave equation. *Math. USSR Sb.*, 70, 557-572 , *Mat. Sb.* 181(8), 1114-1129 (in Russian).
- Krein, M.G. (1955). On determination of the potential of a particle from its S-function. *Rep. AS USSR*, 105(3), 433 - 436.
- Naimark, M.A. (1967). *Linear Differential Operators*. F. Ungar Publishing Company.
- Orujov A.D. (2015). On the spectrum of the pencil of high order differential operators with almost periodic coefficients. *Boundary value problems*. Article Number: 238. DOI: 10.1186/s13661-015-0480-8.
- Mamedov, Kh.R. (2021). An Initial Boundary Value Problem for a Mixed Type Equation in a Rectangular Domain. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 42(3), 572-578.
- Mamedov, Kh.R., Adiloghlu, A. (2019). Inverse Problem of Scattering Theory for a Class Onedimensional Schrödinger Equation. *Quaestiones Mathematicae*, 42(7), 841-856.
- Sarnak, P. (1982) Spectral behavior quasi - periodic potentials. *Comm. Math. Phys.*, 84, 377-401.

IOT: 517.91

## DESIGNING OF SMART LEARNING ENVIRONMENTS

MASIMLI PAKIZAR

Baku Engineering University

Master / Information Technology and Management

*pmesimli@std.beu.edu.az*

BAKU, AZERBAIJAN

### ABSTRACT

The paper deals with the of Smart Learning Environments's design (SLEs). It's about the communication between SLEs and so the IoT. With the question of how an interdisciplinary approach can contribute to the planning of SLEs together with the disciplines of education and architecture the study empirically applies data collected in 2016. The investigation began with the consolidation of information from transdisciplinary literature analyses into an extremely assumptive model for constructing SLEs.

The fast advancement of mobile and sensing technologies has resulted within the emergence of context-aware u-learning environments capable of detecting a student's real-world learning status further because the ambient context. Individual pupils will be given suitable information within the appropriate place and at the acceptable time. According to researchers, more aspects must be considered when creating and implementing learning systems to help students learn in real-world circumstances in sensible ways.

**Keywords:** smart learning,internet of things, u-learning environments, computer mindtools

### ПРОЕКТИРОВАНИЕ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ ОБУЧАЮЩЕЙ СРЕДЫ

### РЕЗЮМЕ

В статье рассматривается проектирование интеллектуальных обучающих сред (SLE). Речь идет о связи между SLE и IoT. Что касается вопроса о том, как междисциплинарный подход может способствовать планированию SLE вместе с дисциплинами образования и архитектуры, исследование эмпирически применяет данные, собранные в 2016 году. Исследование началось с объединения информации из междисциплинарного анализа литературы в чрезвычайно предположительную модель для построение СЛЭ.

Быстрое развитие мобильных и сенсорных технологий привело к появлению контекстно-зависимых сред и-обучения, способных определять реальный статус обучения учащегося в зависимости от окружающего контекста. Отдельным ученикам будет предоставлена соответствующая информация в соответствующем месте и в приемлемое время. По мнению исследователей, при создании и внедрении систем обучения необходимо учитывать больше аспектов, чтобы помочь учащимся учиться в реальных условиях разумным образом.

**Ключевые слова:** интеллектуальное обучение, Интернет вещей, вездесущие среды обучения, компьютерные инструменты.

### AĞILLI TƏLİM MÜHİTLƏRİNİN LAYİHƏLƏNDİRİLMƏSİ

### XÜLASƏ

Sənəd Ağilli Öyrənmə Mühitlərinin dizaynından (SLE) bəhs edir. SLE-lər və buna görə də IoT arasındakı əlaqə haqqındadır. Fənlərarası yanaşmanın təhsil və memarlıq fənləri ilə birlikdə SLE-lərin planlaşdırılmasına necə töhfə verə biləcəyi sualı ilə tədqiqat 2016-ci ildə toplanmış məlumatları empirik şəkildə tətbiq edir. Tədqiqat disiplinarası ədəbiyyat təhlillərindən əldə edilən məlumatların son dərəcə fərziyyəli bir modelə birləşdirilməsi ilə başladı. SLE-lərin qurulması.

Mobil və hissətəmə texnologiyalarının sürətli inkişafı mühit kontekstindən asılı olaraq tələbənin real dünyadakı öyrənmə statusunu daha da aşkar etməyə qadir olan kontekstdən xəbərdar olan u-təlim mühitlərinin yaranması ilə nəticələndi. Ayrı-ayrı şagirdlərə uyğun yerdə və məqbul vaxtda uyğun məlumatlar veriləcəkdir. Tədqiqatçıların fikrincə, tələbələrin real dünya şəraitində ağilli yollarla öyrənmələrinə kömək etmək üçün təlim sistemlərinin yaradılması və tətbiqi zamanı daha çox aspekt nəzərə alınmalıdır.

**Açar sözlər:** ağilli öyrənmə, əşyaların interneti, hər yerdə mövcud olan öyrənmə mühitləri, kompüter alətləri.

## **1. INTRODUCTION**

This research project aimed to go looking out if and also the way the IoT is applicable to teaching and learning processes in SLEs in an exceedingly very way that sustainably supports learning at the workplace. This paper thus focuses on corporate learning spaces that offer the best opportunities for lifelong learning and seamlessly combine informal and formal learning. Literature reviews substantiated the connection between the theoretical constructs of the IoT and smart learning environments. The authors deconstructed known and directly related learning methods in order to demonstrate clearly that IoT-based learning forms such as smart learning environments (SLEs) are a specific combination of adaptive and u-learning formats that interact to facilitate new functions and possibilities at the workplace.

Although context-aware ubiquitous learning appears to be a viable kind of learning, it is still far from ideal technology-enhanced learning, which in this study will be referred to as "smart learning." A smart learning environment not only allows learners to access digital resources and interact with learning systems from any location and at any time, but it also actively provides them with the necessary learning guidance, hints, supportive tools, or learning suggestions at the right time, in the right place, and in the right format. Essentially, a smart learning system is a technology-enhanced learning system that may advise learners to study in the actual world while still having access to digital resources. ITSs are also known as "adaptive learning systems" since their goal is to help individual students learn by modifying learning interfaces or content to their requirements. Furthermore, as computer networks have grown in popularity, many learning systems have been incorporated as web-based learning systems.

## **2. SMART LEARNING ENVIRONMENTS**

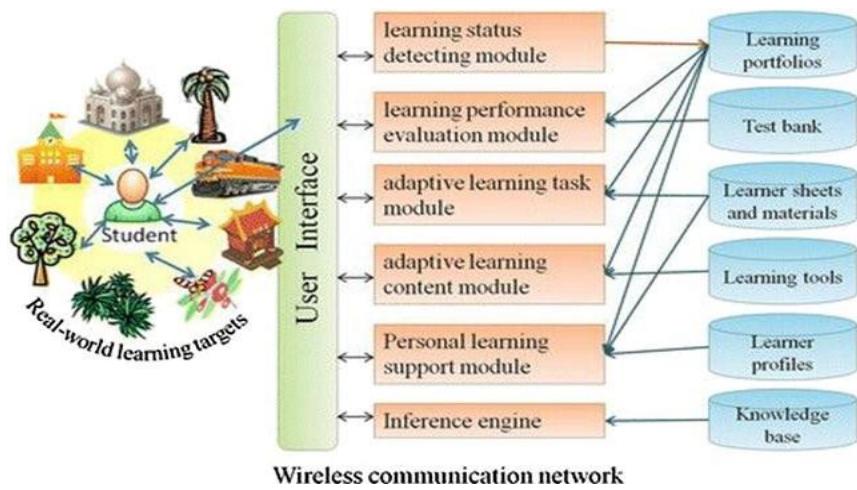
**Context - aware ubiquitous learning** - This research project aimed to go looking out if and therefore the way the IoT is applicable to teaching and learning processes in smart learning environments in a very way that sustainably supports learning at the workplace. This paper thus focuses on corporate learning spaces that offer the best opportunities for lifelong learning and seamlessly combine informal and formal learning. The learning system in a context-aware ubiquitous learning environment may employ sensing technologies to monitor learners' real-world status, communicate with them through wireless networks, and present learning support. The real-world learning status of the learners, as well as interactions between the learners and the system, may be recorded for later analysis during the learning process.

**Computer mindtools** – Mindtools are computer systems that stimulate or help students during the training process to assess, analyze, synthesize, and organize knowledge, leading to meaningful and productive thinking and learning. The relevance of Mindtools was highlighted by Jonassen et al., who stated that "technology should not assist learning by seeking to educate the learners, but rather should be employed as knowledge production tools that students learn with, not from." Mindtools, per Jonassen, are "a method of engaging learners in constructive, higher-order critical considering the topics they're studying through the utilization of a computer application software." He also included database systems, , expert systems and video conferencing systems as samples of computer applications.

**Criteria for a smart learning environment** – Contexts include interactions between learners and environments within the context of context-aware ubiquitous learning; thus, "smart learning environments" will be defined as technology-supported learning environments that adapt and

supply appropriate support within the right places and at the proper time supported individual learners' needs, which may be determined by analyzing their learning behaviors. It's important to stress that studying in a smart learning environment does not mean that students have a certain amount of free time; in other words, no learning plan is employed to substitute leisure activities. As a result, the following are some of the possible criteria for a smart learning environment:

1. The learner's position or the circumstances of the real-world environment during which the learner is placed are detected in an exceedingly smart learning environment, suggesting that the system is in a position to grant learning assistance reckoning on the learner's real-world status.
2. A smart learning environment may provide learners with immediate and adaptive support by analyzing their requirements from several viewpoints (e.g., l-habits, profiles, and private characteristics), similarly because the online and real-world environments during which they're located.
3. Individual learners' personal variables (e.g., learning styles and preferences) and learning status is accommodated in an exceedingly smart learning environment by adapting the computer programme (i.e., how information is presented) and topic content. The computer program doesn't should be a standard computer. Instead, learners can use mobile devices (such as smartphones or tablet computers), wearable devices or maybe ubiquitous computing systems embedded in ordinary items to have interaction with the educational environment.



**Figure 1.** Framework of a smart learning environment.

As a result, it merely serves as a checklist for academics and system developers looking to create smart learning environments. The following elements make up the structure of a smart learning environment, as depicted in Figure 1:

1. A module that detects whether or not a student is learning. This module connects to some sensing devices to identify learners' real-world status as well as environmental settings (e.g., temperature and humidity).
2. A module for assessing learning performance. This module assesses and records learners' performance through online or in-person exams. Learners may be required to identify the solution to a test item by watching or interacting with real-world targets in a real-world exam.

3. This module offers learners with learning help based on their specific learning requirements. Learning assistance can take the form of a learning assignment or subject guideline, a tip for the learning activity, feedback on their performance, or a Mindtool to assist them in learning more efficiently and effectively. The characteristics of the learning activities and learning content, as well as the learners' learning performance, personal circumstances, and real-world status, must all be considered when determining the type of help to be offered.

The individual design patterns and their associated success factors are presented in the next subsection in the context of their systemic interaction.

#### **1. Design pattern [0] – Corporate culture**

Empowerment is a key aspect in fostering a collaborative company culture. This should be interpreted to indicate tactics and activities that improve employee autonomy and self-management, allowing them to do their duties over time.

#### **2. Design pattern [A] – Human centricity**

Users are at the center of smart learning environments (see "Current status of research into smart learning environments"). To guarantee that SLEs are really user-centric, the design approach must be focused toward the learner. The demands of the learners who utilize these spaces must be the starting point for building smart learning environments.

#### **3. Design pattern [B] – Didactical variety**

To enable successful teaching and learning, smart learning environments must be didactically diversified (see section "Current status of research into smart learning environments"). The design pattern (B) is the second phase of the design process, and it builds on the user centricity of the first phase.

#### **4. Design pattern [C] – Hybrid learning space**

Smart learning environments are physical places that may merge digital and physical learning worlds to create hybrid experiences. Design pattern (C) it builds on the didactic diversity of the second phase. The integration of ubiquitous but invisible IoT technology in the design process for hybrid learning environments is required.

#### **5. Design pattern [D] – Learning assistance**

The ultimate goal of the SLE design process is to build a hybrid learning aid using Pattern (D). It is the ultimate and most difficult phase, which builds on earlier design patterns. To guarantee that the (hybrid) learning assistant offers the functionalities needed to give optimum learning help via a "recommender system," the success elements of Design Pattern (D) must be implemented progressively. In the design pattern [D], the factors to be executed in order are numbered and denoted with an arrow.

### **3. CONCLUSION**

The goal of this study is to provide a mainly consistent ontological foundation with defined categories that may be utilized as action suggestions in the context of organizational SLE design procedures. To address the absence of systematization in prior SLE research, the authors proposed design patterns for the concepts of "user centricity (A)", "didactical diversity (B)", "hybrid learning space (C)" and "learning assistance (D)".

It is reasonable to expect that the introduction of new learning ideas will create a number of contentious concerns, such as the ethics and moral principles of using technology in education, which are undoubtedly important topics for debate. On the other side, smart learning's potential benefits include the capacity to provide more effective and efficient learning assistance, the ability to better understand learners' learning patterns, and the ability to undertake long-term and seamless learning activities.

#### **REFERENCES**

1. C Albanesius, Google'project glass' replaces the smartphone with glasses. *PC Mag.* 4, (2012) C Albanesius, Google'project glass' replaces the smartphone with glasses. *PC Mag.* 4, (2012)
2. Azuma R, Baillot Y, Behringer R, Feiner S, Julier S, MacIntyre B: **Recent advances in augmented reality.** *IEEE Comput. Graph. Appl.* 2001
3. Andujar JM, Mejias A, Marquez MA: **Augmented reality for the improvement of remote laboratories: an augmented remote laboratory.** *IEEE Trans. Educ.* 2011
4. E. Aarts, R.S. Harwig, in The invisible future: The seamless integration of technology in everyday life. *Ambient intelligence* (2002), pp. 235–250
5. M. G. Domingo, Forner, J. A. M. Expanding the Learning Environment: Combining Physicality and Virtuality - The Internet of Things for eLearning (S. 730–731). IEEE. (2010) <https://doi.org/10.1109/ICALT.2010.211>
6. G. J. Hwang, "Definition framework and research issues of smart learning environments - a context-aware ubiquitous learning perspective", *Smart Learning Environments*, vol. 1, no. 1, pp. 1-14, 2014.
7. A conceptual framework for designing smart learning environments Sirkka Freigang<sup>1\*</sup>, Lars Schlenker<sup>2</sup> and Thomas Köhler<sup>2</sup>.

IOT: 517.977.56

## ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ С КАТАСТРОФАМИ

**Л.Э. ПОЛАДОВА**

м.н.с. Института Систем Управления  
*lamapoladova@yahoo.com*

**РЕЗЮМЕ**

Изучается модель систем управления запасами с мгновенным обслуживанием и катастрофами, которые приводят к полному уничтожению запасов системы. В системе используется политика пополнения запасов, согласно которой в момент выполнения заказа уровень запасов достигает максимального значения. Получены формулы для расчета характеристик системы и показаны результаты численных экспериментов по расчету моделей.

**Ключевые слова:** система управления запасами, катастрофа, цепь Маркова, алгоритм расчета

### KATAstroflari Olan Ehtiyatlarin İdarə Edilməsi Sisteminin Bir Modeli Haqqında XÜLASƏ

Məqalədə ani xidmət göstərilən və katastrof olduqda bütün ehtiyatları məhv olan ehtiyatların idarə edilməsi modeli öyrənilir. Sifarişlərin yerinə yetrildiyi anda ehtiyatların səviyyəsi maksimum olan ehtiyatların artırılması siyaseti istifadə olunur. Sistemin xarakteristikalarının hesablanması üçün düsturlar tapılmışdır və modelin hesablanması üzrə ədədi eksperimentlərin nəticələri göstərilmişdir.

**Açar sözlər:** ehtiyatların idarə edilməsi sistemi, katastrof, Markov zənciri, hesablama alqoritmi

**ON MODEL OF INVENTORY CONTROL SYSTEM WITH CATASTROPHES****ABSTRACT**

The model of inventory system with instant service and catastrophes that lead to complete destruction of stocks of the system is studied. The system uses a replenishment policy, according to which, at the time of order fulfillment, the inventory level reaches its maximum value. Formulas for calculating the performance measures of the system are obtained and the results of numerical experiments on the calculation of models are shown.

**Key words:** inventory control system, catastrophes, Markov chain, calculation algorithm

**Введение.** В моделях систем управления запасами (СУЗ) предполагается, что время продажи запаса потребителям равно нулю. Подробный анализ исследований в этом направлении можно найти в работах [1-7]. Отметим, что в подавляющем большинстве работ принимается допущение о том, что запасы системы являются долговечными, т.е. они никогда не портятся. А в работах, в которых изучаются модели СУЗ с портящимися запасами принимается допущение о том, что запасы системы портятся с течением времени (случайного или детерминированного). Вместе с тем, запасы системы могут быть испорчены мгновенно в результате каких-то катастрофических событий. Подобные модели СУЗ в доступной литературе почти не исследованы. Исходя из этого в настоящей работе предлагается одна модель СУЗ с катастрофами и разработан алгоритм расчета ее характеристик.

**Описание модели и постановка задачи.** В изучаемой модели принимаются следующие допущения.

- В СУЗ поступает пуассоновский поток расходующих заявок (*c*-заявки) с интенсивностью  $\lambda$ .
- Время обслуживания заявок равно нулю, при этом каждая из них требует запас единичного размера. Если в момент поступления *c*-заявки уровень запасов равен нулю, то она теряется с вероятностью единица.
- В систему поступает также пуассоновский поток деструктивных заявок (*d*-заявки) с интенсивностью  $\kappa$ , при этом в момент поступления таких заявок все запасы системы мгновенно разрушаются, т.е. уровень запасов системы опускается к нулю. Если уровень запасов равен нулю, то поступившая *d*-заявка не влияет на работу системы.
- В системе используется "Up to  $S$ " политика пополнения запасов (ППЗ), которая определяется следующим образом: если уровень запасов системы опускается до величины  $s, s < S/2$ , то делается заказ на поставку запасов; при этом объем заказа определяется таким образом, чтобы в момент пополнения запасов склад системы заполняется полностью.
- Время выполнения заказов на пополнения запасов является случайной величиной, которая имеет показательную функцию распределения с параметром  $v > 0$  и не зависит от текущего уровня запасов системы и объема поставки.

Задача заключается в нахождении следующих характеристик системы: среднего уровня запасов ( $S_{av}$ ); средней интенсивности заказов ( $RR$ ); среднего объема поставки ( $V_{av}$ ); вероятности отказа в обслуживании *c*-заявок ( $P_c$ ).

**Решение задачи.** Работа системы описывается одномерной цепью Маркова (ЦМ), где ее состояния  $m$  указывают уровень запасов системы. Поскольку максимальный размер склада системы является конечным, то пространство состояний этой цепи  $E = \{0, 1, \dots, S\}$  имеет конечную размерность.

Рассмотрим задачу нахождения генератора этой ЦМ. Переход из состояния  $m \in E$  в состояние  $m' \in E$  обозначим  $m \rightarrow m'$ . Тогда с учетом принятой политики пополнения запасов и схемы доступа разнотипных заявок, заключаем, что искомые интенсивности определяются так (см. рис. 1):

- поскольку при выполнении условия  $m > 0$  *c*-заявки принимаются для обслуживания, то интенсивность перехода  $m \rightarrow m - 1$  при выполнении указанного условия равна  $\lambda$ ;
- поскольку при выполнении условия  $m > 0$  *d*-заявки разрушают все запасы системы, то интенсивность перехода  $m \rightarrow 0$  равна  $\kappa$ ;
- поскольку в момент поступления запасов склад системы заполняются полностью, то при выполнении условия  $m \leq s$ , где  $s < S/2$ , интенсивность перехода  $m \rightarrow S$  равна  $v$ .

Стационарную вероятность состояния  $m, 0 \leq m \leq S$ , обозначим через  $p(m)$ . Существование стационарного режима выходит из следующего факта: все состояния построенной конечномерной ЦМ сообщаются друг с другом (см. рис. 1).

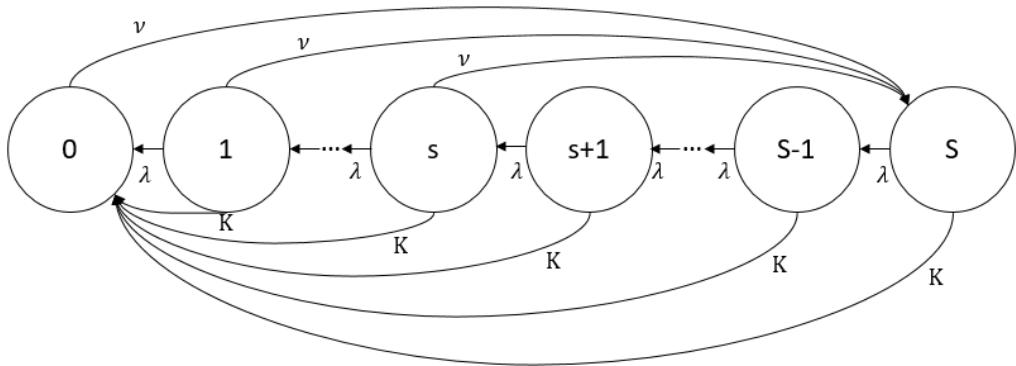


Рис. 1. Граф переходов между состояниями изучаемой ЦМ.

Исходя из описанного выше алгоритма построения генератора данной ЦМ заключаем, что система уравнений равновесия (СУР) для вероятностей состояний при использовании данной политики имеет следующий вид:

$$\nu p(0) = \lambda p(1) + \kappa \sum_{m=1}^s p(m); \quad (1)$$

$$(\lambda + \nu + \kappa)p(m) = \lambda p(m+1), \quad 1 \leq m \leq s; \quad (2)$$

$$(\lambda + \kappa)p(s) = \lambda p(s+1), \quad s+1 \leq m \leq S-1; \quad (3)$$

$$(\lambda + \kappa)p(S) = \nu \sum_{m=0}^s p(m). \quad (4)$$

К этой СУР (1)-(4) добавляется условие нормировки:

$$\sum_{m=0}^s p(m) = 1. \quad (5)$$

Разработанную СУР (1)-(5) можно решить следующим образом. Из уравнение (1) с учетом уравнение (5) получим:

$$\nu p(0) = \lambda p(1) + \kappa(1 - p(0))$$

или

$$p(1) = dp(0) - b, \quad (6)$$

$$\text{где } d = \frac{\nu + \kappa}{\lambda}; \quad b = \frac{\kappa}{\lambda}.$$

Далее из уравнений (2) находим

$$p(m) = (1+d)^{m-1} p(1), \quad 2 \leq m \leq s+1. \quad (7)$$

С учетом (6) и (7) из уравнений (3) получаем, что

$$p(m) = (1+d)^s (1+b)^{m-s-1} p(1), \quad s < m \leq S. \quad (8)$$

Объединяя формулы (7) и (8) получим следующие соотношения:

$$p(m) = a_m p(1), \quad 1 \leq m \leq S, \quad (9)$$

$$\text{где } a_m = \begin{cases} (1+d)^{m-1}, & \text{если } 1 \leq m \leq s+1, \\ (1+d)^s (1+b)^{m-s-1}, & \text{если } s+1 < m \leq S. \end{cases}$$

Окончательно, с учетом (6) и (9), из условия нормировки (5) вычисляется вероятность  $p(0)$  следующим образом:

$$p(0) = \frac{1+bc}{1+dc}, \quad (10)$$

$$\text{где } c = \sum_{m=1}^S a_m.$$

После определения стационарных вероятностей состояний характеристики системы вычисляются стандартным способом. Действительно, средний уровень запасов системы может быть определен как математическое ожидание распределение вероятностей  $p(m), m \in E$ , т.е.

$$S_{av} = \sum_{m=1}^S mp(m). \quad (11)$$

Поскольку заказ для поставки запасов делается тогда, когда их уровень опускается до величины  $s, s < S/2$ , то средняя интенсивность заказов определяется как:

$$RR = \lambda p(s+1). \quad (12)$$

Средний объем поставок вычисляется как

$$V_{av} = \sum_{m=0}^s (S-m)p(m). \quad (13)$$

Расходящие заявки покидают систему без получения запасов, если в момент их поступления уровень запасов равен нулю. Отсюда заключаем, что вероятность потери с-заявок вычисляется следующим образом:

$$P_c = p(0). \quad (14)$$

Таким образом, с помощью формул (11)-(14) вычисляются требуемые характеристики системы.

#### 4. Численные результаты

Рассмотрим результаты численных экспериментов, которые проводились на основе алгоритма вычисления характеристик системы. Цель проведения этих экспериментов заключается в изучении поведения характеристик системы относительно изменения исходных параметров системы.

Ниже во всех экспериментах считается, что объем склада системы является фиксированным, т.е.  $S = 50$ , при этом базовые значения исходных данных выбираются так:  $\lambda=25$ ,  $\kappa=0.3$ ,  $v=0.9$ . Для определенности изложения предположим, что значения точки заказа  $s$  является управляемым параметром, т.е. эта величина изменяется в отрезке  $0 \leq s \leq 25$ .

Результаты вычислительных экспериментов показаны на рис. 2-5. Анализ полученных графиков позволяет сделать следующие выводы.

- Средний уровень запасов системы ( $S_{av}$ ) является возрастающей функцией (см. рис. 2), при этом увеличение интенсивностей  $c$ -заявок ( $\lambda$ ) (рис. 2, а) и  $d$ -заявок ( $\kappa$ ) приводят к уменьшению значений этой функции (рис. 2, б); однако с увеличением интенсивности пополнения запасов ( $\nu$ ) значения этой функции также увеличивается (рис. 2, в). Такое поведение данной характеристики относительно указанных параметров является логичным и оно является теоретически ожидаемым.
- Средняя интенсивность заказов ( $RR$ ) также является возрастающей функцией (см. рис. 3), однако здесь увеличение интенсивности  $c$ -заявок приводит к увеличению значений этой функции (рис. 3, а). Этого следовало ожидать, так как увеличение интенсивности  $c$ -заявок приводить к увеличению интенсивности попадания уровня запасов к точке заказа ( $s$ ). Вместе с тем, здесь увеличение интенсивности  $d$ -заявок приводит к уменьшению значений этой функции (рис. 3, б). На первый взгляд последний факт является не логичным, так как с увеличением интенсивности деструктивных заявок следует ожидать увеличения интенсивности заказов для пополнения запасов. Такое поведение данной характеристики объясняется следующим образом: при фиксированном значении параметра  $s$  с ростом интенсивности  $d$ -заявок увеличивается интенсивность переходов системы из состояний типа

$m, m > s$ , в состояние 0, то есть к уменьшению шансов поступления заказов из состояний типа  $m, m \leq s$ . Другим, на первый взгляд неожиданным фактом, является увеличения значений этой характеристики с ростом интенсивности пополнения запасов (рис. 3, в). Этот факт имеет следующее объяснение: при фиксированном значении параметра  $s$  с ростом интенсивности пополнения запасов увеличивается интенсивность попадания системы в состояние  $S$ , и тем самым, увеличивается интенсивность попадания системы в состояние  $s+1$ , где осуществляются заказы для пополнения запасов.

- Средний объем поставок ( $V_{av}$ ) является возрастающей функцией (см. рис. 4), при этом увеличение интенсивности  $c$ -заявок приводит к увеличению значений этой функции (рис. 3, а); этого следовало ожидать, так как с ростом интенсивности  $c$ -заявок уменьшается средний уровень запасов и потому увеличивается средний объем поставок запасов. Точно также объясняется увеличение значений этой функции с ростом интенсивности  $d$ -заявок (рис. 3, б). Однако с ростом интенсивности поступления запасов уменьшается средний объем поставок (рис. 3, в).
- Вероятность потери  $c$ -заявок ( $P_c$ ) является убывающей функцией (рис. 5), при этом, как и ожидалось, увеличение интенсивностей  $c$ -заявок (рис. 5, а) и  $d$ -заявок приводит к увеличению значений этой функции (рис. 5, б). С увеличением интенсивности пополнения запасов значения этой функции уменьшаются (рис. 5, в). Отметим, что последние факты являются вполне логичными.

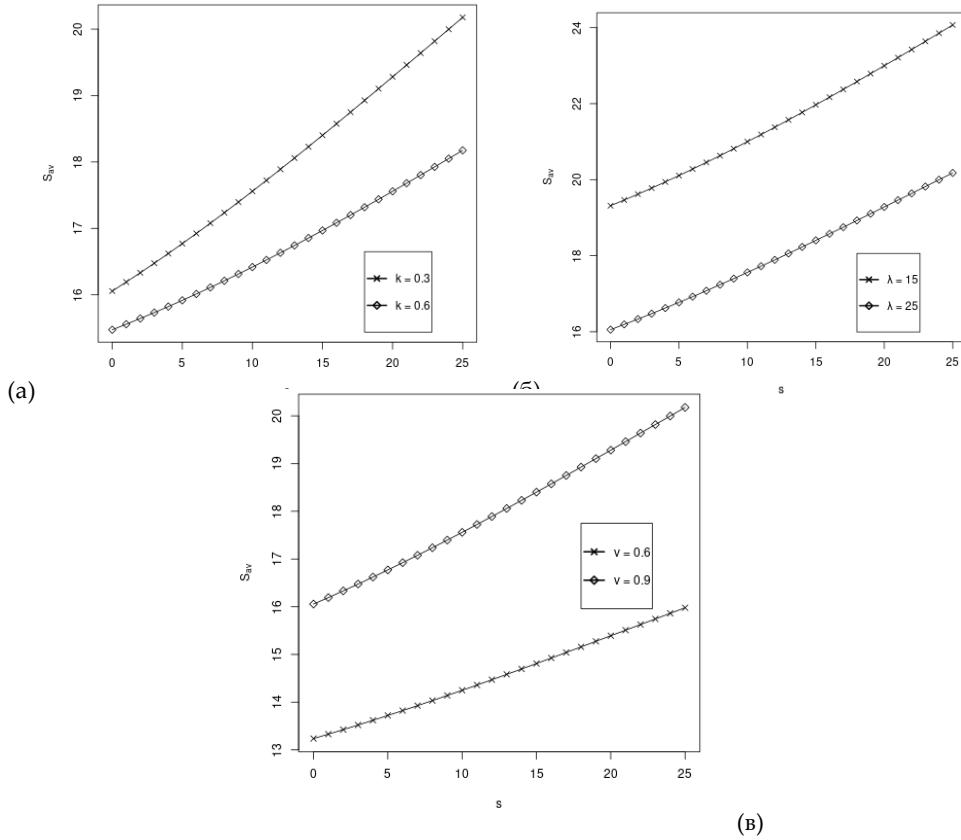


Рис. 2. Зависимость  $S_{av}$  от параметра  $s$ .

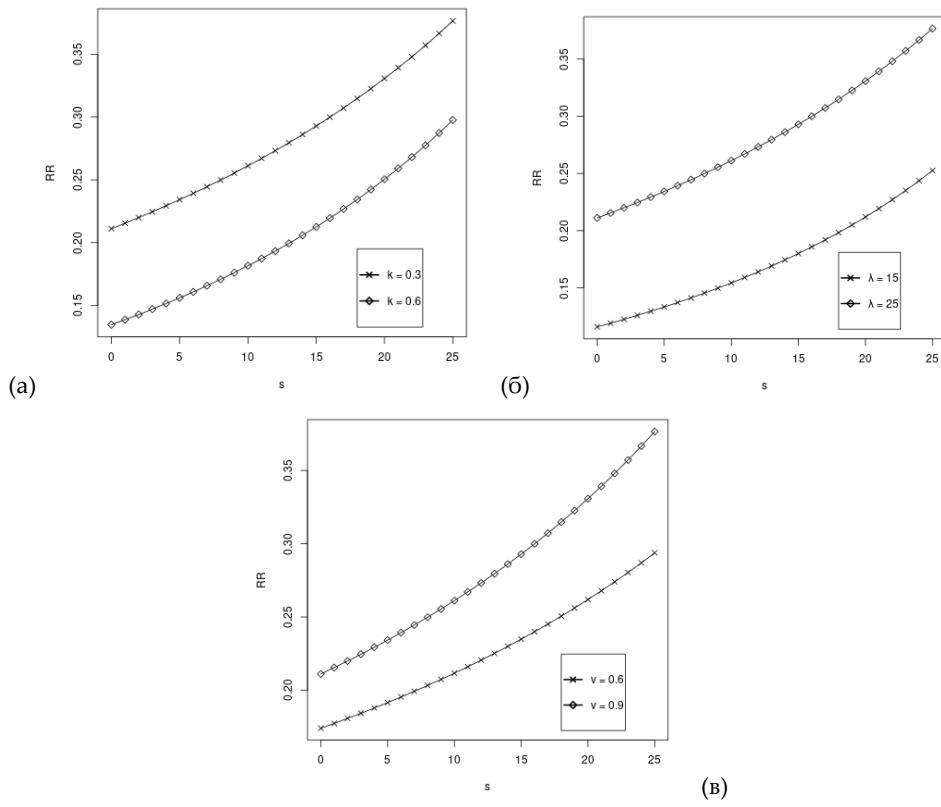


Рис. 3. Зависимость  $RR$  от параметра  $s$ .

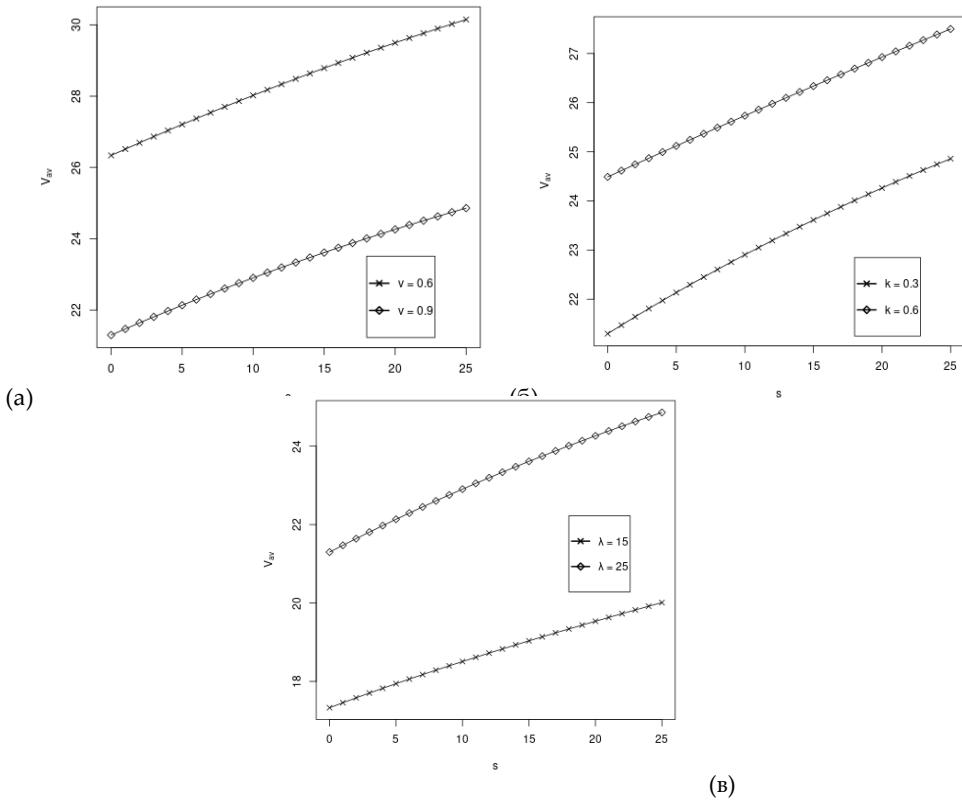


Рис. 4. Зависимость  $V_{av}$  от параметра  $s$ .

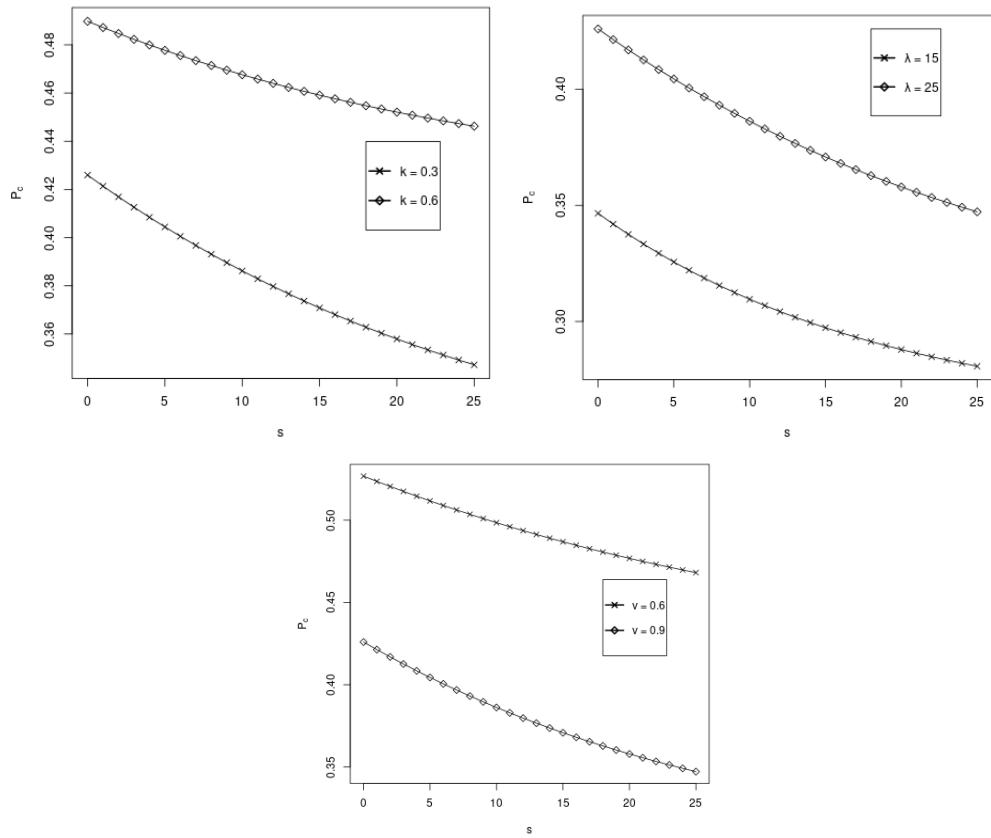


Рис. 5. Зависимость  $P_c$  от параметра  $s$ .

## **5. Заключение**

Предложена новая модель системы обслуживания-запасания с катастрофами, где расходующие заявки и разрушающие заявки являются пуссоновскими. Рассмотрена модель, в которой используется “Up to S” политика пополнения запасов с положительным временем выполнения заказов. Изучается модель с мгновенным обслуживанием расходующих заявок. Показано, что математической моделью этой системы является одномерная цепь Маркова. Построен генератор изучаемой цепи Маркова и найдены формулы для нахождения ее стационарного распределения. На основе стационарного распределения цепи Маркова получены формулы для нахождения характеристик системы обслуживания-запасания с катастрофами, проведены соответствующие численные эксперименты и проанализированы их результаты.

## **ЛИТЕРАТУРА**

1. Алиев И.А. Численное исследование и оптимизация системы управления запасами с мгновенным обслуживанием и двумя типами заявок // Системы управления и информационные технологии. 2020. №2 (80). С. 28-34.
2. Алиев И.А. Модель системы с мгновенным обслуживанием и рандомизированной политикой пополнения запасов // Проблемы информатизации и управления. 2021. Выпуск 67. С. 71-75.
3. Kouiki C., Babai M.Z., Minner S. On the Benefit of Dual-sourcing in Managing Perishable Inventory // Intern. J. of Production Economics. 2018. V. 204. Iss. 10. P. 1–17.
4. Haughton M., Isotupa K. A Continuous Review Inventory System with Lost Sales and Emergency Orders // American J. of Operations Research. 2018. V. 8. P. 343–359.
5. Boulaksil Y., Hamdouch Y., Ghoudi K., Fransoo, J.C. Comparing Policies for the Stochastic Multi-Period Dual Sourcing Problem from a Supply Chain Perspective // Intern. J. of Production Economics. 2021. V. 232.
6. Barron J. The Continuous ( $S, s, Se$ ) Inventory Model with Dual Sourcing and Emergency Orders // Europ. J. of Operations Research. 2021. 42 p.



## INSTRUCTIONS FOR AUTHORS

1. "The Baku Engineering University Mathematics and Computer Science" accepts original unpublished articles and reviews in the research field of the author.
2. Articles are accepted in English.
3. File format should be compatible with **Microsoft Word** and must be sent to the electronic mail ([journal@beu.edu.az](mailto:journal@beu.edu.az)) of the Journal. The submitted article should follow the following format:
  - Article title, author's name and surname
  - The name of workplace
  - Mail address
  - Abstract and key words
4. The title of the article should be in each of the three languages of the abstract and should be centred on the page and in bold capitals before each summary.
5. **The abstract** should be written in **9 point** type size, between **100** and **150** words. The abstract should be written in the language of the text and in two more languages given above. The abstracts of the article written in each of the three languages should correspond to one another. The keywords should be written in two more languages besides the language of the article and should be at least three words.
6. **.UDC and PACS index** should be used in the article.
7. The article must consist of the followings:
  - Introduction
  - Research method and research
  - Discussion of research method and its results
  - In case the reference is in Russian it must be given in the Latin alphabet with the original language shown in brackets.
8. **Figures, pictures, graphics and tables** must be of publishing quality and inside the text. Figures, pictures and graphics should be captioned underneath, tables should be captioned above.
9. **References** should be given in square brackets in the text and listed according to the order inside the text at the end of the article. In order to cite the same reference twice or more, the appropriate pages should be given while keeping the numerical order. For example: [7, p.15].

Information about each of the given references should be full, clear and accurate. The bibliographic description of the reference should be cited according to its type (monograph, textbook, scientific research paper and etc.) While citing to scientific research articles, materials of symposiums, conferences and other popular scientific events, the name of the article, lecture or paper should be given.

### Samples:

- a) **Article:** Demukhamedova S.D., Aliyeva İ.N., Godjayev N.M.. *Spatial and electronic structure of monomerrik and dimeric conapeetes of carnosine üith zinc*, Journal of structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010
  - b) **Book:** Christie John Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles*. Fourth Edition, Prentice Hall, p.386-398, 2002
  - c) **Conference paper:** Sadychov F.S., Aydin C., Ahmedov A.İ.. Appligation of Information – Commu-nication Technologies in Science and education. II International Conference."Higher Twist Effects In Photon- Proton Collisions", Baki, 01-03 Noyabr, 2007, ss 384-391  
References should be in 9-point type size.
10. The margins sizes of the page: - Top 2.8 cm. bottom 2.8 cm. left 2.5 cm, right 2.5 cm. The article main text should be written in Palatino Linotype 11 point type size single-spaced. Paragraph spacing should be 6 point.
  11. The maximum number of pages for an article should not exceed 15 pages
  12. The decision to publish a given article is made through the following procedures:
    - The article is sent to at least to experts.
    - The article is sent back to the author to make amendments upon the recommendations of referees.
    - After author makes amendments upon the recommendations of referees the article can be sent for the publication by the Editorial Board of the journal.

## YAZI VƏ NƏŞR QAYDALARI

1. "Journal of Baku Engineering University- Riyaziyyat və kompüter elmləri" - əvvəller nəşr olunmamış orijinal əsərləri və müəllifin tədqiqat sahəsi üzrə yazılmış icmal məqalələri qəbul edir.
2. Məqalələr İngilis dilində qəbul edilir.
3. Yazilar Microsoft Word yazı programında, ([journal@beu.edu.az](mailto:journal@beu.edu.az)) ünvanına göndərilməlidir. Göndərilən məqalələrdə aşağıdakılara nəzərə alınmalıdır:
  - Məqalənin başlığı, müəllifin adı, soyadı,
  - İş yeri,
  - Elektron ünvanı,
  - Xülasə və açar sözlər.
4. **Məqalədə başlıq hər xülasədən əvvəl** ortada, qara və böyük hərfə xülasələrin yazıldığı hər üç dildə olmalıdır.
5. **Xülasə** 100-150 söz aralığında olmaqla, 9 punto yazı tipi böyüklüyündə, məqalənin yazıldığı dildə və bundan əlavə yuxarıda göstərilən iki dildə olmalıdır. Məqalənin hər üç dildə yazılmış xülasəsi bir-birinin eyni olmalıdır. Açar sözlər uyğun xülasələrin sonunda onun yazıldığı dildə verilməklə ən azı üç sözdən ibarət olmalıdır.
6. Məqalədə UOT və PACS kodları göstərilməlidir.
7. Məqalə aşağıdakılardan ibarət olmalıdır:
  - Giriş,
  - Tədqiqat metodu
  - Tədqiqat işinin müzakirəsi və onun nəticələri,
  - İstinad ədəbiyyatı rus dilində olduğu halda orjinal dili mötərzə içərisində göstərməklə yalnız Latin əlifbası ilə verilməlidir.
8. **Şəkil, rəsm, grafik və cədvəllər** çapda düzgün, aydın çıxacaq vəziyyətdə və mətn içərisində olmalıdır. Şəkil, rəsm və grafiklərin yazıları onların altında yazılmalıdır. Cədvəllərdə başlıq cədvəlin üstündə yazılmalıdır.
9. **Mənbələr** mətn içərisində kvadrat mötərizə daxilində göstərilməklə məqalənin sonunda mətn daxilindəki sıra ilə düzülməlidir. Eyni mənbəyə iki və daha çox istinad edildikdə əvvəlki sıra sayı saxlanmaqla müvafiq səhifələr göstərilməlidir. Məsələ: [7,səh.15].

Ədəbiyyat siyahısında verilən hər bir istinad haqqında məlumat tam və dəqiq olmalıdır. İstinad olunan mənbənin bibliografiya təsviri onun növündən (monoqrafiya, dərslik, elmi məqalə və s.) asılı olaraq verilməlidir. Elmi məqalələrə, simpozium, konfrans, və digər nüfuzlu elmi tədbirlərin materiallarına və ya tezislərinə istinad edərkən məqalənin, məruzənin və ya tezisin adı göstərilməlidir.

### Nümunələr:

- a) **Məqalə:** Demukhamedova S.D., Aliyeva İ.N., Godjayev N.M.. *Spatial and electronic structure af monomeric and dimeric complexes of carnosine with zinc*, Journal of structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010
- b) **Kitab:** Christie ohn Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles*. Fourth Edition, Prentice Hall, 2002
- c) **Konfrans:** Sadychov F.S., Aydin C., Ahmedov A.İ.. Appligation of Information-Communication Technologies in Science and education. II International Conference. "Higher Twist Effects In Photon- Proton Collisions", Baki, 01-03 Noyabr, 2007, ss 384-391

Mənbələr 9 punto yazı tipi böyüklüyündə olmalıdır.

10. **Səhifə ölçüləri:** üstdən 2.8 sm, altdan 2.8 sm, soldan 2.5 sm və sağdan 2.5 sm olmalıdır. Mətn 11 punto yazı tipi böyüklüyündə, **Palatino Linotype** yazı tipi ilə və tək simvol aralığında yazılmalıdır. Paraqraflar arasında 6 punto yazı tipi aralığında məsafə olmalıdır.
11. Orijinal tədqiqat əsərlərinin tam mətni bir qayda olaraq 15 səhifədən artıq olmamalıdır.
12. Məqalənin nəşrə təqdimi aşağıdakı qaydada aparılır:
  - Hər məqallə ən azı iki ekspertə göndərilir.
  - Ekspertlərin tövsiyələrini nəzərə almaq üçün məqalə müəllifə göndərilir.
  - Məqalə, ekspertlərin tənqidini qeydləri müəllif tərəfindən nəzərə alındıqdan sonra Jurnalın Redaksiya Heyəti tərəfindən çapa təqdim oluna bilər.

## YAZIM KURALLARI

1. "Journal of Baku Engineering University- Matematik ve Bilgisayar Bilimleri" önceler yayımlanmamış orijinal çalışmaları ve yazının kendi araştırma alanın-da yazılmış derleme makaleleri kabul etmektedir.
2. Makaleler İngilizce kabul edilir.
3. Makaleler Microsoft Word yazı programında, ([journal@beu.edu.az](mailto:journal@beu.edu.az)) adresine gönderilmelidir. Gönderilen makalelerde şunlar dikkate alınmalıdır:
  - Makalenin başlığı, yazının adı, soyadı,
  - İş yeri,
  - E-posta adresi,
  - Özet ve anahtar kelimeler.
4. **Özet** 100-150 kelime arasında olup 9 font büyüğünde, makalenin yazıldığı dilde ve yukarıda belirtilen iki dilde olmalıdır. Makalenin her üç dilde yazılmış özeti birbirinin aynı olmalıdır. Anahtar kelimeler uygun özetin sonunda onun yazıldığı dilde verilmekle en az üç sözcükten oluşmalıdır.
5. Makalede UOT ve PACS tipli kodlar gösterilmelidir.
6. Makale şunlardan oluşmalıdır:
  - Giriş,
  - Araştırma yöntemi
  - Araştırma
  - Tartışma ve sonuçlar,
  - İstinat Edebiyatı Rusça olduğu halde orjinal dili parantez içerisinde göstermekle yalnız Latin alfabesi ile verilmelidir.
7. **Şekil, Resim, Grafik ve Tablolar** baskında düzgün çıkacak nitelikte ve metin içerisinde olmalıdır. Şekil, Resim ve grafiklerin yazıları onların alt kısmında yer almmalıdır. Tablolarda ise başlık, tablonun üst kısmında bulunmalıdır.
8. **Kullanılan kaynaklar**, metin dâhilinde köşeli parantez içerisinde numaralandırılmalı, aynı sırayla metin sonunda gösterilmelidir. Aynı kaynaklara tekrar başvurulduğunda sıra muhafaza edilmelidir. Örneğin: [7,seh.15]. Referans verilen her bir kaynağın küçyesi tam ve kesin olmalıdır. Referans gösterilen kaynağın türü de eserin türüne (monografi, derslik, ilmî makale vs.) uygun olarak verilmelidir. İlmi makalelere, sempozyum, ve konferanslara müracaat ederken makalenin, bildirinin veya bildiri özetlerinin adı da gösterilmelidir.

### Örnekler:

- a) **Makale:** Demukhamedova S.D., Aliyeva İ.N., Godjayev N.M.. *Spatial and Electronic Structure of Monomerik and Dimeric Conapeetes of Carnosine Üith Zinc*, Journal of Structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010
- b) **Kitap:** Christie ohn Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles*. Fourth Edition, Prentice Hall, p.386-398, 2002
- c) **Kongre:** Sadychov F.S., Aydin C., Ahmedov A.İ. Appligation of Information-Communication Technologies in Science and education. II International Conference. "*Higher Twist Effects In Photon- Proton Collisions*", Bakı, 01-03 Noyabr, 2007, ss 384-391

Kaynakların büyülüklüğü 9 punto olmalıdır.

9. **Sayfa ölçülerı;** üst: 2.8 cm, alt: 2.8 cm, sol: 2.5 cm, sağ: 2.5 cm şeklinde olmalıdır. Metin 11 punto büyülüklükte **Palatino Linotype** fontu ile ve tek aralıkta yazılmalıdır. Paragraflar arasında 6 puntoluk yazı mesafesinde olmalıdır.
10. Orijinal araştırma eserlerinin tam metni 15 sayfadan fazla olmamalıdır.
11. Makaleler dergi editör kurulunun kararı ile yayımlanır. Editörler makaleyi düzeltme için yazara geri gönderebilir.
12. Makalenin yayına sunusu aşağıdaki şekilde yapılır:
  - Her makale en az iki uzmana gönderilir.
  - Uzmanların tavsiyelerini dikkate almak için makale yazara gönderilir.
  - Makale, uzmanların eleştirel notları yazar tarafından dikkate alındıktan sonra Derginin Yayın Kurulu tarafından yayına sunulabilir.
13. Azerbaycan dışından gönderilen ve yayımlanacak olan makaleler için,(derginin kendilerine gonderilmesi zamanı posta karşılığı) 30 ABD Doları veya karşılığı TL, T.C. Ziraat Bankası/Üsküdar-İstanbul 0403 0050 5917 No'lu hesaba yatırılmalı ve makbuzu üniversitemize fakslanmalıdır.

## **ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ**

1. «Journal of Baku Engineering University» - Математики и информатики публикует оригинальные, научные статьи из области исследования автора и ранее не опубликованные.
2. Статьи принимаются на английском языке.
3. Рукописи должны быть набраны согласно программы **Microsoft Word** и отправлены на электронный адрес ([journal@beu.edu.az](mailto:journal@beu.edu.az)). Отправляемые статьи должны учитывать следующие правила:
  - Название статьи, имя и фамилия авторов
  - Место работы
  - Электронный адрес
  - Аннотация и ключевые слова
4. **Заглавие статьи** пишется для каждой аннотации заглавными буквами, жирными буквами и располагается по центру. Заглавие и аннотации должны быть представлены на трех языках.
5. **Аннотация**, написанная на языке представленной статьи, должна содержать 100-150 слов, набранных шрифтом 9 punto. Кроме того, представляются аннотации на двух других выше указанных языках, перевод которых соответствует содержанию оригинала. Ключевые слова должны быть представлены после каждой аннотации на его языке и содержать не менее 3-х слов.
6. В статье должны быть указаны коды UOT и PACS.
7. Представленные статьи должны содержать:
  - Введение
  - Метод исследования
  - Обсуждение результатов исследования и выводов.
  - Если ссылаются на работу на русском языке, тогда оригинальный язык указывается в скобках, а ссылка дается только на латинском алфавите.
8. **Рисунки, картинки, графики и таблицы** должны быть четко выполнены и размещены внутри статьи. Подписи к рисункам размещаются под рисунком, картинкой или графиком. Название таблицы пишется над таблицей.
9. **Ссылки** на источники даются в тексте цифрой в квадратных скобках и располагаются в конце статьи в порядке цитирования в тексте. Если на один и тот же источник ссылаются два и более раз, необходимо указать соответствующую страницу, сохраняя порядковый номер цитирования. Например: [7, стр.15]. Библиографическое описание ссылаемой литературы должно быть проведено с учетом типа источника (монография, учебник, научная статья и др.). При ссылке на научную статью, материалы симпозиума, конференции или других значимых научных мероприятий должны быть указаны название статьи, доклада или тезиса.

### **Например:**

- a) **Статья:** Demukhamedova S.D., Aliyeva I.N., Godjayev N.M. *Spatial and electronic structure of monomeric and dimeric complexes of carnosine with zinc*, Journal of Structural Chemistry, Vol.51, No.5, p.824-832, 2010
- b) **Книга:** Christie on Geankoplis. *Transport Processes and Separation Process Principles*. Fourth Edition, Prentice Hall, 2002
- c) **Конференция:** Sadychov F.S, Fydin C, Ahmedov A.I. Appligation of Information-Communication Nechnologies in Science and education. II International Conference. "Higher Twist Effects In Photon-Proton Collision", Bakı,01-03 Noyabr, 2007, ss.384-391

Список цитированной литературы набирается шрифтом 9 punto.

10. **Размеры страницы:** сверху 2.8 см, снизу 2.8 см, слева 2.5 и справа 2.5. Текст печатается шрифтом **Palatino Linotype**, размер шрифта 11 punto, интервал-одинарный. Параграфы должны быть разделены расстоянием, соответствующим интервалу 6 punto.
11. Полный объем оригинальной статьи, как правило, не должен превышать 15 страниц.
12. Представление статьи к печати производится в ниже указанном порядке:
  - Каждая статья посыпается не менее двум экспертом.
  - Статья посыпается автору для учета замечаний экспертов.
  - Статья, после того, как автор учел замечания экспертов, редакционной коллегией журнала может быть рекомендована к печати.